ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LIV 1972 1

УДК 517.53 512.83

МАТЕМАТИКА

А. В. Ефимов

Проходные матрицы класса LR

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 30/IX 1971)

Пусть $w(\lambda)$—рациональная матрица-функция порядка $2n$, обладающая свойствами

$$\text{(I)}\qquad \overline{w(\bar{\lambda})} \equiv w(\lambda),$$

$$\text{(II)}\qquad w^*(\lambda) J_1 w(\lambda) - J_1 \geqslant 0, \quad (\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0)$$

$$\text{(III)}\qquad w'(\lambda) J_2 w(\lambda) \equiv J_2,$$

где

$$J_1 = \begin{Vmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{Vmatrix}, \qquad J_2 = \begin{Vmatrix} 0 & iI \\ -iI & 0 \end{Vmatrix}.$$

Такую матрицу $w(\lambda)$ условимся называть *проходной*. Отметим, что $w(\lambda)$—чисто математический объект и не связывается с какими-либо физическими устройствами (ср. ([1])).

Матрицу $w(\lambda)$, обладающую дополнительно одним из свойств

$$\text{(IV)}\qquad w^*(\lambda) J_1 w(\lambda) - J_1 \equiv 0, \text{ когда } \operatorname{Re}\lambda = 0$$

$$\text{(V)}\qquad w^*(\lambda) J_2 w(\lambda) - J_2 \geqslant 0, \text{ когда } \operatorname{Im}\lambda > 0$$

$$\text{(V')}\qquad w^*(\lambda) J_2 w(\lambda) - J_2 \leqslant 0, \text{ когда } \operatorname{Im}\lambda > 0$$

будем называть проходной матрицей соответственно класса CL (а также реактивной), класса LR или CR.

Проходные реактивные матрицы изучены В. П. Потаповым (см. ([2])); в частности, исследована структура *примарных* матриц и доказана возможность представления реактивной матрицы в виде произведения примарных матриц. В ([3]) доказано, что любая реактивная матрица реализуема, то есть является A-матрицей (реактивного) $4n$-полюсника.

В настоящей заметке доказана возможность представления проходной матрицы класса $LR(CR)$ в виде произведения примарных матриц и изучена структура последних. Базой для этого являются с одной стороны теоремы В. П. Потапова ([2]), а с другой—связь между проходными матрицами классов CL, LR и CR. Более полное представление об этом дают формулируемые ниже теоремы.

Теорема 1: *Проходная матрица* $w(\lambda)$ *обладает свойством*

$$\frac{w^*(\lambda)J_1w(\lambda)-J_1}{\bar{\lambda}+\lambda}\pm\frac{w^*(\lambda)J_2w(\lambda)-J_2}{i(\bar{\lambda}-\lambda)}>0, \text{ при } \operatorname{Re}\lambda>0$$

Замечание: Аналогом этого свойства для позитивной матрицы $z(\lambda)$ является

$$\frac{z^*(\lambda)+z(\lambda)}{\bar{\lambda}+\lambda}\pm\frac{z^*(\lambda)-z(\lambda)}{\bar{\lambda}-\lambda}>0, \text{ при } \operatorname{Re}\lambda>0.$$

Это неравенство является обобщением известного неравенства

$$|\arg z(\lambda)|\leqslant|\arg\lambda|$$

для скалярной позитивной функции $z(\lambda)$.

Теорема 2. *Постоянная проходная матрица*

$$R=\begin{Bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22}\end{Bmatrix}$$

однозначно представима в виде

$$R=H_1H_2T \quad (R=H_2H_1T),$$

где

$$H_1=\begin{Bmatrix} 1 & h_1 \\ 0 & 1\end{Bmatrix},\quad H_2=\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ h_2 & 1\end{Bmatrix}-$$

проходные матрицы ($h_1>0$, $h_2>0$), *а*

$$T=\begin{Bmatrix} t' & 0 \\ 0 & t^{-1}\end{Bmatrix}$$

проходная матрица класса CL.

Замечание. Теорема 2 позволяет легко доказать следующий факт: диагональные блоки *произвольной* проходной матрицы

$$w(\lambda)=\begin{Bmatrix} w_{11}(\lambda) & w_{12}(\lambda) \\ w_{21}(\lambda) & w_{22}(\lambda)\end{Bmatrix}$$

являются неособенными матрицами (порядка n).

Теорема 3. *Для того, чтобы матрица-функция* $\tilde{w}(\lambda)$ *являлась проходной матрицей* CR, *необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление*

$$\tilde{w}(\lambda)=P(\lambda)\cdot w(\lambda)\cdot P^{-1}(\lambda),$$

где $w(\lambda)$—*проходная матрица класса* LR, *а*

$$P(\lambda)=\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda 1\end{Bmatrix}.$$

Эта теорема устанавливает связь между матрицами классов LR и CR: она позволяет ограничиться изучением одного из этих классов.

Очень важной для изучения матриц класса LR является

Теорема 4. *Пусть $w(\lambda)$ обладает свойствами (I), (III), (V). Для того, чтобы $w(\lambda)$ являлась проходной матрицей класса LR (то есть обладала бы свойством (II)), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\bar{w}(\lambda) = P(\lambda) \cdot w(\lambda) \cdot P^{-1}(\lambda)$$

обладала свойством (V′).

Из этой теоремы вытекают следующие основные теоремы 5 и 6.

Теорема 5. *Если $w(\lambda)$ — проходная матрица класса LR, то матрица-функция*

$$r(\lambda) = P(\lambda) \cdot w(\lambda^2) \cdot P^{-1}(\lambda)$$

является проходной матрицей класса CL.

Теорема 6. *Если $r(\lambda)$ — проходная матрица класса CL, то*

1) *$P^{-1}(\lambda) \cdot r(\lambda) \cdot P(\lambda)$ является рациональной функцией от λ^2:*

$$P^{-1}(\lambda) \cdot r(\lambda) \cdot P(\lambda) = w(\lambda^2)$$

2) *$w(\lambda)$ — проходная матрица класса LR.*

По поводу теорем 3, 5, 6 нелишне сделать следующее

Замечание. Связь между матрицами сопротивления (проводимости) двухэлементных многополюсников хорошо известна в теории цепей (напр. [4, 5]).

Теорема Ланжевена (см. [1]) позволяет легко установить связь и между A-матрицами таких многополюсников.

В обоих случаях связи устанавливаются, исходя из физических соображений (при этом и в случае матриц сопротивления — проводимости удобнее пользоваться теоремой Ланжевена).

Теоремы 3, 5, 6 показывают, что такая связь является логическим следствием соотношений (I) -(V′).

Теоремы 5, 6 вместе с результатами В. П. Потапова [3] позволяют непосредственно получить следующую теорему о мультипликативном представлении проходной матрицы класса LR.

Теорема 7. *Проходная матрица $w(\lambda)$ класса LR может быть представлена в виде произведения*

$$w(\lambda) = w_1(\lambda) \cdot w_2(\lambda) \cdot \ldots \cdot w_s(\lambda) \cdot T,$$

где $w_k(\lambda)$ — примарные матрицы класса LR, T — постоянная матрица класса CL.

При этом матрицу $w(\lambda)$ класса LR мы называем *примарной*, если матрица (класса CL)

$$r(\lambda) = P(\lambda) \cdot w(\lambda^2) \cdot P^{-1}(\lambda)$$

является примарной.

Следующие теоремы выясняют структуру примарных матриц. Они доказываются с помощью теоремы 4 (но могут быть получены и как следствия соответствующих теорем Потапова).

Теорема 8. *Примарная матрица-функция*

$$w(\lambda) = C_0 + \frac{C}{\lambda - \lambda_0} + \frac{\overline{C}}{\lambda - \overline{\lambda}_0}, \quad где$$

$$C_0 = \begin{Bmatrix} 1 & 2\mathrm{Re}\,\dfrac{f_1^* g_2}{\lambda_0} \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}, \qquad C = \begin{Bmatrix} f_1^* g_1 & f_1^* g_2 \\ f_2^* g_1 & f_2^* g_2 \end{Bmatrix} = f^* g \neq 0,$$

$\mathrm{Im}\,\lambda_0 > 0$, $f = (f_1, f_2)$, $g = (g_1, g_2)$, *а* f_k, g_k*—n-мерные векторы-строки, является проходной матрицей класса LR в том и только в том случае, если*

1) *вектор* f *обеспечивает совместность неравенств*

$$\begin{Bmatrix} \alpha & \theta \\ \overline{\theta} & \alpha \end{Bmatrix} > 0, \qquad \begin{Bmatrix} \widetilde{\alpha} & \widetilde{\theta} \\ \overline{\widetilde{\theta}} & \widetilde{\alpha} \end{Bmatrix} > 0,$$

где

$$\alpha = \frac{f J_2 f^*}{i(\overline{\lambda}_0 - \lambda_0)}, \quad \widetilde{\alpha} = \frac{\widetilde{f} J_2 \widetilde{f}^*}{i(\lambda_0 - \overline{\lambda}_0)}, \quad \widetilde{f} = f \cdot P(\overline{\lambda}_0),$$

θ*—комплексный параметр,* $\widetilde{\theta} = f_2 \overline{f}_1^* - \overline{\lambda}_0 \cdot \theta$,

2) *вектор* g *определяется соотношениями*

$$f_1 = \widetilde{\alpha} \cdot \widetilde{g}_2 + \widetilde{\theta} \cdot \overline{\widetilde{g}}_2$$

$$f_2 = \alpha \cdot g_1 + \theta \cdot \overline{g}_1$$

где

$$\widetilde{g} = (\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2) = g \cdot P^{-1}(\lambda_0).$$

Теорема 9. *Условия*

1) $f = (f_1, f_2)$*—вещественный вектор*

2) $\theta > 0$, $f_2 f_1^* - \sigma_0 \cdot \theta > 0$,

3) $f_2 = \theta \cdot g_1$, $f_1 = \dfrac{1}{\sigma_0}(f_2 f_1^* - \sigma_0 \cdot \theta) \cdot g_2$

необходимы и достаточны для того, чтобы отличная от постоянной примарная матрица

$$w(\lambda) = \begin{Bmatrix} 1 & \dfrac{1}{\sigma_0} f_1^* g_2 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} + \frac{f^* g}{\lambda - \sigma_0},$$

где $\overline{\sigma}_0 = \sigma_0 \neq 0$, $g = (g_1, g_2)$, *являлась проходной матрицей класса LR.*

Примарные матрицы класса LR остальных типов имеют вид

$$\begin{Vmatrix} 1 & f^*g \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ f^*g & 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\lambda} f^*g & 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & \lambda f^*g \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Ввиду их простоты характеристика здесь не приводится.

Изложенная в этой заметке теория проходных матриц класса LR (CR) позволяет, по-видимому, доказать реализуемость матриц этого класса подобно тому как это сделано в ([5]) для реактивных матриц.

Одесский педагогический институт

Ա. Վ. ԽՅՈՒՐՈՎ

LR դասի անցումային մատրիցներ

Դիտարկվում են (I)—(II) հատկություններով և լրացուցիչ (V) հատկությունով օժտված $\mathfrak{W}(t)$ ռացիոնալ մատրից-ֆունկցիաներ։ Կապ է հաստատվում այդ մատրիցների և CR((VI) լրացուցիչ հատկություններով) ու CL ((IV) լրացուցիչ հատկությունով) դասերի մատրիցների միջև։ Ստացված է LR դասի մատրիցների մուլտիպլիկատիվ ներկայացումը և ուսումնասիրված է այդ դասի պրիմար մատրիցների կառուցվածքը։ LR դասի մատրիցների մշակված տեսությունը, ըստ երևույթին, հիմք է հանդիսանում նրանց միայն ինդուկտիվություններ ու դիմադրություններ պարունակող պարզագույն 4n-բևեռների կասկադի տեսքով իրացնելու համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Г. Маркосян.* ДАН Арм. ССР, LII, № 1 (1971)). [2] *К. Берж.* „Теория графов и ее применения“. ИЛ, 1962. [3] *C. E. Shannon.* The zero error capacity of a noisy channel. TRE Trans. № 3, (1956). 8 [4] *О. Оре.* Теория графов. „Наука“, М., 1968. [5] *А. Г. Маркосян.* Число внутренней устойчивости в декартовом произведении простых циклов. „Известия АН Арм. ССР.“ серия „Математика“, т. VI, № 5 (1971). [6] *M. Rosenfeld.* Proc. Amer. Math. Soc., 18, № 2 (1967).