ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LIV 1972 1

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

В. М. Еингарян

# К обобщенной проблеме моментов Стилтьеса

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 9/VI 1971)

Пусть $M(u)$ некоторая $N$-функция (см. [1]). Через $L_M[0, \infty)$ обозначим, как обычно, класс функций, определенных на $[0, \infty)$, для которых

$$\int_0^\infty M[\Phi(t)]\,dt < \infty.$$

Рассматривается следующий вариант известной проблемы моментов Стилтьеса: для заданной последовательности положительных чисел

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_n < \cdots, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_\nu} = \infty, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_\nu^2} < \infty \tag{1}$$

указать условия, наложенные на последовательности положительных чисел $\{m_n\}$, чтобы существовала функция $f(t) \in L_M[0, \infty)$ такая, что

$$\int_0^\infty t^{\gamma_n} f(t)\,dt = m_n. \tag{2}$$

История и литература по этому вопросу даны в работе [2] и там он полностью решен в случае, когда

$$\|f\|_{L_\infty} < C \text{ на } (0, \infty) \text{ и } \lim_{t\to\infty} f(t) = 0.$$

Заметим, что, пользуясь методом работы [2] и решением рассмотренного нами вопроса, можно определять классы квазианалитических функций, входящие в классы, определенные в [3], так как $M(u)-N$-функции, которые характеризуются полностью в терминах $N$-функций, и рассмотреть для этих классов вопросы включения, представимости и единственности в духе работ [2-4].

Решение обобщенной проблемы моментов Стилтьеса основано на решении следующей задачи: найти необходимые и достаточные условия представимости функции посредством обобщенного преобразования Лапласа

$$f(x) = \int_0^\infty \omega\left(\frac{x}{t},\ \gamma\right)\Phi(t)\,dt,\ \Phi(t)\in L_M[0,\ +\infty), \tag{3}$$

где

$$\omega\left(\frac{x}{t},\ \gamma\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{t}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\zeta E_{1,\infty}(\zeta,\gamma)},\ \delta>0,$$

$$E_{1,\infty}(\zeta,\ \gamma) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{\zeta}{\gamma_\nu}\right)e^{-\frac{\zeta}{\gamma_\nu}}.$$

Теорема 1. *Для того, чтобы имело место представление (3), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1. существовали производные

$$f(t) = f^{[0]}(t),\quad f^{[1]}(t) = f'(t),\quad f^{[k+1]}(t) = \left(\frac{f^{[k]}(t)}{t^{\gamma_k^{-1}-\gamma_{k-1}^{-1}}}\right)'\quad k = 1,\ 2,\ \ldots \tag{4.1}$$

2. $$M\left(\frac{(-1)^{k+1}x^{\gamma_k^{-1}}f^{[k+1]}(x)}{\prod\limits_{\nu=1}^{k}\gamma_\nu}\right) = o(1)\quad \text{при}\quad x\to\infty \ \text{для}\ \forall k \tag{4.2}$$

3. $M\,|f(x)| = o(1)$ при $x\to\infty$.

Необходимость. Пусть

$$f(x) = \int_0^\infty \omega\left(\frac{x}{t},\ \gamma\right)\Phi(t)\,dt,\quad \Phi(t)\in L_M[0,\ \infty). \tag{5}^*$$

Дифференцируя $k$ раз в смысле (4.1), имеем

$$f^{[k]}(x) = \int_0^\infty \omega^{[k]}\left(\frac{x}{t},\ \gamma\right)\Phi(t)\,dt,$$

---

* Так как при $h>0$, $\mu>0$ и $\theta\in(0,\ \infty)$ справедливо неравенство

$$\omega(h\theta,\ \gamma) \leqslant h^{-\mu}\,\Gamma(\mu,\ \gamma)\,\mu,\quad \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_\nu^2} < \infty$$

то это значит, что (5) можно дифференцировать в смысле (4.1) любое число раз с переносом знака производной под знаком интеграла правой части равенства.

$$\omega^{[k]}\left(\frac{x}{t},\ \gamma\right)=\frac{(-1)^k\prod_{\nu=1}^{k-1}\gamma_\nu}{2\pi i}x^{-\gamma_{k-1}^{-1}}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\left(\frac{x}{t\beta_{k-1}}\right)^{-\zeta}d\zeta}{E_{k,\infty}(\zeta,\ \gamma)},$$

$$\beta_{k-1}=\exp\left(\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{1}{\gamma_\nu}\right).$$

Следовательно

$$\frac{(-1)^k x^{\gamma_{k-1}+1}}{\prod_{\nu=1}^{k}\gamma_\nu}f^{[k]}(x)=\int_0^\infty\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\left(\frac{x}{t\beta_k}\right)^{-\zeta}d\zeta}{(\zeta+\gamma_k)E_{k+1,\infty}(\zeta,\ \gamma)}\Phi(t)\,dt$$

и согласно неравенству Иенсена и $M(\varepsilon u)\leqslant\varepsilon M(u)$, если $0<\varepsilon\leqslant 1$

$$M\left(\frac{(-1)^k x^{\gamma_{k-1}+1}f^{[k]}(x)}{\prod_{\nu=1}^{k}\gamma_\nu}\right)=M\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\left(\frac{x}{t\beta_k}\right)^{-\zeta}d\zeta}{(\zeta+\gamma_k)E_{k+1,\infty}(\zeta,\ \gamma)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\int_0^\infty\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{(x/t\beta_k)^{-\zeta}d\zeta}{(\zeta+\gamma_k)E_{k+1,\infty}(\zeta,\ \gamma)}\Phi(t)dt}{\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{(x/t\beta_k)^{-\zeta}d\zeta}{(\zeta+\gamma_k)E_{k+1,\infty}(\zeta,\ \gamma)}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^\infty\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\left(\frac{x}{t\beta_k}\right)^{-\zeta}d\zeta}{(\zeta+\gamma_k)E_{k+1,\infty}(\zeta,\ \gamma)}M|\Phi(t)|\,dt=o(1)$$

при $x\to\infty$,

так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\left(\frac{x}{t\beta_k}\right)^{-\zeta}d\zeta}{(\zeta+\gamma_k)E_{k+1,\infty}(\zeta,\ \gamma)}=0.$$

Выполнение условия (4.3) следует из определения $N$-функции и из того, что $f(x)=O(1)$ при $x\to\infty$.

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы. Рассмотрим обобщенную формулу Тейлора функции $f(x)$ ([1])

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\omega_k\left(\frac{x}{u},\ \gamma\right)+\int_x^\infty f^{[n+1]}(t)t^{\gamma_n}dt\times$$

$$\times \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i} \int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{t}\right)^{-\xi} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n} (\zeta+\gamma_\nu)},$$

$$a_0 = f(u), \quad a_k = \frac{(-1)^k u^{\gamma_{k-1}+1} f^{[k]}(u)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu} \quad (k = 1, 2, \cdots), \tag{6}$$

$$\omega_0\left(\frac{x}{u}, \gamma\right) = 1, \quad \omega_k\left(\frac{x}{u}, \gamma\right) = \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{k} \gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{u}\right)^{-\xi} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=1}^{k} (\zeta+\gamma_\nu)}.$$

Учитывая условие (4.2) и устремляя $u \to \infty$, получаем

$$f(x) = \int\limits_{x}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} f^{[n+1]}(t)\, t^{\gamma_n}}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu} \tilde{\omega}_{1,n}\left(\frac{x}{t}, \gamma\right), \tag{7}$$

где

$$\tilde{\omega}_{1,n}\left(\frac{x}{t}, \gamma\right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{t}\right)^{-\xi} d\zeta}{\zeta \prod\limits_{\nu=1}^{n} \left(1+\frac{\zeta}{\gamma_\nu}\right)}.$$

Замена переменной $t = \beta_n t'$ нам даст

$$f(x) = \int\limits_{x/\beta_n}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} f^{[n+1]}(\beta_n t)(\beta_n t)^{\gamma_n}}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu} \omega_{1,n}\left(\frac{x}{t}, \gamma\right) \beta_n dt,$$

$$\omega_{1,n}\left(\frac{x}{t}, \gamma\right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{t}\right)^{-\xi} d\zeta}{\zeta \prod\limits_{\nu=1}^{n} \left(1+\frac{\zeta}{\gamma_\nu}\right) e^{-\frac{\xi}{\gamma_\nu}}}$$

или

$$f(x) = \int\limits_{0}^{\infty} \omega_n\left(\frac{x}{t}, \gamma\right) \alpha_n(t)\, dt, \tag{8}$$

где

$$\omega_n\left(\frac{x}{t}, \gamma\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in \left(0, \frac{x}{\beta_n}\right) \\ \omega_{1,n}\left(\frac{x}{t}, \gamma\right), & \text{если } t \in \left(\frac{x}{\beta_n}, \infty\right) \end{cases}$$

$$\alpha_n(t)=\frac{(-1)^{n+1} f^{[n+1]}(\beta_n t)(\beta_n t)^{\gamma_n}\cdot\beta_n}{\prod_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu}.$$

Так как $\omega_n\left(\frac{x}{t},\ \gamma\right)\to\omega\left(\frac{x}{t},\ \gamma\right)$ равномерно при $n\to\infty$ в $(0,\ \infty)$, то для завершения доказательства теоремы нужно показать, что $\alpha_n(t)$-функция ограниченной вариации на $(0,\ \infty)$ для $\forall n$, применять теорему Хелли и, наконец, доказать, что предельная функция $\alpha(t)\in L_M[0,\ +\infty)$.

Имеем для $\forall R<\infty$

$$\int_0^R |d\,\alpha_n(t)|=\frac{\beta_n}{\prod_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu}\int_0^R |d\,(f^{[n+1]}(t)\,t^{\gamma_n})|\,dt=$$

$$=\frac{\beta_n}{\prod_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu}\int_0^R |f^{[n+2]}(t)|\,t^{\gamma_{n+1}-1}\,dt+$$

$$+\frac{(\gamma_{n+1}-1)\beta_n}{\prod_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu}\int_0^R t^{\gamma_n-1}\,|f^{[n+1]}(t)|\,dt<\infty,$$

так как

$$f^{[n+1]}(t)=\begin{cases} o\left(\dfrac{1}{t^{\gamma_{n+1}-1+\varepsilon}}\right) & \text{при } t\to\infty,\\[2ex] O\left(\dfrac{1}{t^{\gamma_{n+1}-1+\varepsilon}}\right) & \text{при } t\to 0\end{cases}\tag{9}$$

Последние соотношения следуют из следующих выкладок: так как

$$M\left(\frac{x^{\gamma_k+1} f^{[k+1]}(x)}{\prod_{\nu=1}^{k}\gamma_\nu}\right)\leqslant\frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k}\gamma_\nu}M(x^{\gamma_k+1}f^{[k+1]}(x))<C<\infty,$$

то подавно

$$\frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k}\gamma_\nu}x^{\gamma_k+1}|f^{[k+1]}(x)|<C,$$

следовательно

$$|f^{(k+2)}(x)| < C\prod_{\nu=1}^{k+2}\gamma_\nu\,\frac{1}{x^{\gamma_{k+2}+1}} = C\prod_{\nu=1}^{k+2}\gamma_\nu\,\frac{1}{x^{\gamma_{k+1}+\varepsilon}}\,\frac{1}{x^{\gamma_{k+2}-\gamma_{k+1}+1-\varepsilon}} =$$

$$= o\left(\frac{1}{x^{\gamma_{k+1}+\varepsilon}}\right) \qquad \text{при } x\to\infty.$$

Второе из условий (9) следует из теоремы 1.2 работы [2].

Согласно теореме Хелли существует последовательность $\{n_k\}$ такая, что $\alpha_{n_k}(t)\to\alpha(t)$ при $k\to\infty$, притом $\alpha(t)$ также имеет ограниченную вариацию на $(0, +\infty)$.

Устремляя $n\to\infty$ в (8), получим:

$$f(x) = \int_0^{\infty}\omega\left(\frac{x}{t},\ \gamma\right)\alpha(t)\,dt. \tag{10}$$

Остается доказать, что $\alpha(t)\in L_M[0, +\infty)$. Для этого заметим, что в силу теоремы Медведева [5] достаточно доказать следующее:

$$\sum_{i=0}^{k-1}(t_{i+1}-t_i)\,M\left(\frac{\alpha_n(t_{i+1})-\alpha_n(t_i)}{t_{i+1}-t_i}\right) < B < \infty.$$

Согласно неравенству Иенсена имеем:

$$M\left(\frac{\alpha_n(t_{i+1})-\alpha_n(t_i)}{t_{i+1}-t_i}\right) = M\left(\frac{\displaystyle\int_{t_{i+1}}^{t_i} f^{(n+1)}(\beta_n t)(\beta_n t)^{\gamma_n}\beta_n\,dt}{\displaystyle\prod_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu\,(t_{i+1}-t_i)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_{i+1}}^{t_i} M\left(\frac{f^{(n+1)}(\beta_n t)(\beta_n t)^{\gamma_{n+1}+1}}{\displaystyle\prod_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu}\right)(\beta_n t)^{\gamma_n-\gamma_{n+1}-1}\,dt/(t_{i+1}-t_i) =$$

$$= A\,\frac{\displaystyle\int_{t_{i+1}}^{t_i}(\beta_n t)^{\gamma_n-\gamma_{n+1}-1}\beta_n\,dt}{t_{i+1}-t_i}.$$

Следовательно

$$\sum_{i=0}^{k}(t_{i+1}-t_i)\,M\left(\frac{\alpha_n(t_{i+1})-\alpha_n(t_i)}{t_{i+1}-t_i}\right) \leqslant$$

$$\leqslant A\beta_n^{\gamma_n-\gamma_{n+1}}\sum_{i=0}^{k-1}\left|t_{i+1}^{\gamma_n-\gamma_{n+1}} - t_i^{\gamma_n-\gamma_{n+1}}\right| =$$

$$= A\beta_n^{\gamma_n-\gamma_{n+1}}\left(t_n^{\gamma_n-\gamma_{n+1}} - t_0^{\gamma_n-\gamma_{n+1}}\right) < C < \infty \quad \forall n.$$

Теорема 1 таким образом доказана.

Применим теперь доказанную теорему к решению обобщенной проблемы моментов Стилтьеса. Докажем теорему

Теорема 2. *Для существования решения $f(t)$ проблемы моментов*

$$\int_0^\infty t^{\gamma_n} f(t)\,dt = m_n \quad f(t) \in L_{\text{н}}[0, \infty).$$

*Стилтьеса необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\varphi(t)$, удовлетворяющая условиям*

$$\lim_{x\to 0+} \frac{(-1)^n \varphi^{[n]}(x)}{x^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1}} = \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n-1}(\gamma_n-\gamma_\nu)}{|g'(\gamma_n)|}\cdot m_n, \tag{11.1}$$

*где*

$$g(z) = z\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\gamma_\nu}\right)e^{\frac{z}{\gamma_\nu}}$$

$$M[\varphi(x)] = O(1) \quad \textit{при} \quad x\to\infty \tag{11.2}$$

$$M\left(\frac{x^{\gamma_k+1}\varphi^{[k]}(x)}{\prod\limits_{\nu=1}^{k}\gamma_\nu}\right) < \infty \quad \textit{для} \quad \forall k. \tag{11.3}$$

Необходимость. Пусть существует $f(t) \in L_{\text{н}}[0, +\infty)$ такая, что

$$\int_0^\infty t^{\gamma_n} f(t)\,dt = m_n \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Составим функцию

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \omega(xt)\, f(t)\,dt.$$

После $n$-кратного обобщенного дифференцирования будем иметь

$$(-1)^n \varphi^{[n]}(x) = \prod_{\nu=1}^{n-1}\gamma_\nu \int_0^\infty f(t)\,\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^{-\gamma_{n-1}-1}(xt)^{-\zeta}\,d\zeta}{\beta_{n-1}^{-1}E_{n,\infty}(\zeta,\gamma)}\,dt,$$

где

$$E_{n,\infty}(\zeta,\gamma) = \prod_{\nu=n}^{\infty}\left(1+\frac{\zeta}{\gamma_\nu}\right)e^{-\frac{\zeta}{\gamma_\nu}}, \quad \beta_{n-1} = \exp\left(\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{\gamma_\nu}\right).$$

откуда после замены $\zeta$ на $\zeta'-\gamma_n$ получаем

$$\frac{(-1)^n \varphi^{[n]}(x)}{x^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1}} = \int_0^\infty A_n(xt) t^{\gamma_n} f(t)\,dt,$$

где

$$A_n(xt) = \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1} \gamma_\nu}{\beta_n^{\gamma_n} E_{n,\infty}(-\gamma_n, \gamma)} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\left(\frac{xt}{\beta_n}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\zeta\,\varepsilon_{n+1,\infty}(\zeta, \gamma, -\gamma_n)},$$

$$\varepsilon_{n+1,\infty}(\zeta, \gamma, -\gamma_n) = \prod_{\nu=n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{\zeta}{\gamma_\nu - \gamma_n}\right) e^{-\frac{\zeta}{\gamma_\nu}}.$$

Так как

$$0 \leqslant A_n(xt) \leqslant \lim_{x\to 0+} A_n(xt) = \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1} \gamma_\nu}{\beta_n^{\gamma_n} E_{n,\infty}(-\gamma_n, \gamma)} \qquad \text{(см. ([7]))}$$

то

$$\lim_{x\to 0+} \frac{(-1)^n \varphi^{[n]}(x)}{x^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1}} = \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1} \gamma_\nu}{\beta_n^{\gamma_n} E_{n,\infty}(-\gamma_n, \gamma)} \cdot m_n =$$

$$= \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1} (\gamma_n - \gamma_\nu)}{|g'(\gamma_n)|} \cdot m_n, \tag{12}$$

Таким образом (11.1) доказана. Проверим выполнение условия (11.2). По неравенству Иенсена имеем

$$M\,|\varphi(x)| = M\left(\int_0^\infty \omega(x, t) f(t)\,dt\right) \leqslant \int_0^\infty \omega(xt)\, M\,|f(t)|\,dt = 0/1) \quad x \to \infty,$$

так как $\omega(xt) \to 0$ при $x \to \infty$.

Выполнение условия (11.3) следует из теоремы 1.

Достаточность. Пусть существует функция $\varphi(t)$, удовлетворяющая условиям теоремы 2. Тогда, согласно теореме 1, существует функция $f(t) \in L_M[0, +\infty)$, посредством которой функция $\varphi(x)$ в $(0, \infty)$ представляется интегралом

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \omega(xt) f(t)\,dt. \tag{13}$$

Нам остается доказать, что существуют интегралы

$$\int_0^\infty t^{\gamma_n} f(t)\,dt, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

и выполняются условия

$$\int_0^\infty t^{\gamma_n} f(t)\,dt = m_n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Легко доказать, что (13) можно любое число раз обобщенно дифференцировать. Имеем

$$\frac{(-1)^n \varphi^{[n]}(x)}{x^{\gamma_n - \gamma_{n-1} - 1}} =$$

$$= \frac{\prod_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu}{\beta_n^{\gamma_n} E_{n,\infty}(-\gamma_n, \gamma)} \int_0^\infty \omega^*\left(\frac{xt}{\beta_n}, \gamma_\nu - \gamma_n\right) t^{\gamma_n} f(t)\,dt,$$

где

$$\omega^*(\theta, \gamma_\nu - \gamma_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} \frac{\theta^{-\zeta}\,d\zeta}{\zeta\, \varepsilon_{n,\infty}(\zeta, \gamma_\nu - \gamma_n)}.$$

Так как при $x > 0$ функция $\omega^*\left(\frac{xt}{\beta_n}, \gamma_\nu - \gamma_n\right) t^{\gamma_n}$ ограничена [2] и, кроме того, по неравенству Иенсена и $M(\alpha u) \leqslant \alpha M(u)$ $0 < \alpha \leqslant 1$ имеем:

$$M\left(\frac{\prod_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu}{\beta_n^{\gamma_n} E_{n,\infty}(-\gamma_n, \gamma)} \int_0^\infty \omega^*\left(\frac{xt}{\beta_n}, \gamma_\nu - \gamma_n\right) t^{\gamma_n} |f(t)|\,dt\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\prod_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu}{\beta_n^{\gamma_n} E_{n,\infty}(-\gamma_n, \gamma)} \int_0^\infty \omega^*\left(\frac{xt}{\beta_n}, \gamma_\nu - \gamma_n\right) t^{\gamma_n} M[f(t)]\,dt < \infty$$

то, переходя к пределу при $x \to 0+$, имеем из (12)

$$\lim_{x \to 0+} \frac{(-1)^n \varphi^{[n]}(x)}{x^{\gamma_n - \gamma_{n-1} - 1}} = \frac{\prod_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu}{\beta_n^{\gamma_n} E_{n,\infty}(-\gamma_n, \gamma)} \int_0^\infty t^{\gamma_n} f(t)\,dt = m_n.$$

так как

$$\lim_{x\to 0+} \omega^{\theta}\left(\frac{xt}{\beta_n}\cdot\gamma_\nu - \gamma_n\right) = 1.$$

Таким образом теорема 2 полностью доказана.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Վ. Մ. ԷԴԻԳԱՐՅԱՆ

## Ստիլտյեսի ընդհանրացված մոմենտների խնդրի վերաբերյալ

*Դիտարկվում է Ստիլտյեսի մոմենտների խնդրի հետևյալ ընդհանրացումը։*

*Տրված* $0=\gamma_0<\gamma_1<\cdots<\gamma_n<\cdots$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_k}=\infty$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_k^2}<\infty$ *իրական թվային հաջորդականության առկայությամբ գտնել պայմաններ* $\{m_n\}$ *հաջորդականության համար, որպեսզի գոյություն ունենա* $f(t)\in L_M[0,\infty)$ *ֆունկցիա, որտեղ* $M(u)$*-ն ուռուցիկ* $N$*-ֆունկցիա է, այնպիսին որ.*

$$\int_0^{\infty} t^{\gamma_n} f(t)\,dt = m_n.$$

*Ցույց է տրվում, որ այդ մոմենտների խնդրի լուծման համար անհրաժեշտ է և բավարար գոյություն ունենա* $[0,\infty)$*-ի վրա որոշված* $\varphi(t)$ *անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիա, որը բավարարի հետևյալ պայմաններին՝*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(-1)^n\varphi^{[n]}(x)}{x^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1}} = \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1}(\gamma_n-\gamma_\nu)}{|g'(\gamma_n)|}\cdot m_n \tag{1}$$

$$M(\varphi(x) = O(1) \tag{2}$$

$$M\left(\frac{x^{\gamma_k+1}\varphi^{[k]}(x)}{\prod_{\nu=1}^{k}\gamma_k}\right)<\infty \quad \forall k \tag{3}$$

*որտեղ՝*

$$\varphi^{[1]}(x)=\varphi'(x),\quad \varphi^{[2]}(x)=\left(\frac{\varphi^{[1]}(x)}{x^{\gamma_1-1}}\right)',\cdots,\quad \varphi^{[k+1]}(x)=\left(\frac{\varphi^{[k]}(x)}{x^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1}}\right)',$$

$$k=2,3,\cdots$$

$$g(z)=z\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\gamma_\nu}\right)e^{\frac{z}{\gamma_\nu}}:$$

*Ստացված է այդպիսի անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիաների ինտեգրալ ներկայացումը։*

## ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Красносельский и Рутицкий*. Выпуклые функции и пространства Орлича. М., 1958. [2] *Г. В. Бадалян*, ИАН СССР, сер. мат., т. 31, вып. 3, 491—530 (1967). [3] *Г. В. Бадалян*, ИАН СССР, сер. мат., т. 34, в. 3, 584—620 (1970). [4] *Хиршман и Уиддер*. Преобразование типа свертки. [5] *Ю. Т. Медведев*, Успехи мат. наук, VIII, в. 6 (58), 115—118, 1953.