

УДК 519.1

К. М. Моссян

Минимальный граф, не являющийся сильно базлируемым

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 11/V 1971)

В настоящей статье мы придерживаемся терминологии, принятой в (1). Под словом „граф“ всюду будем понимать обыкновенный граф, под раскраской графа—правильную раскраску его вершин. Через Λ обозначим класс обыкновенных графов, не содержащих треугольников.

О п р е д е л е н и е. Неориентированный граф, который можно ориентировать так, чтобы он стал базисным графом некоторого орграфа (графа частичного упорядочения), назовем базлируемым (сильно базлируемым), а соответствующую ориентацию—базлирующей (сильно базлирующей).



Рис. 1

В монографии (2) поставлена следующая задача (гл. 9, п. 1, проблема 3^a): в классе Λ найти графы с наименьшим числом ребер, которые не являются сильно базлируемыми (такие графы назовем не сильно базлируемыми).

Можно показать, что имеют место следующие утверждения:

Теорема 1. Если хроматическое число графа меньше длины минимального цикла, то граф сильно базлируемый.

Теорема 2. Если граф $L = (X, U)$ сильно базлируемый, то для произвольной вершины a существует хотя бы одна сильно базлирующая ориентация графа такая, что все инцидентные с a дуги в орграфе $L = (X, U)$ исходят из a (заходят в a).

Лемма 1. Четырехугольник может иметь только две существенно различных сильно базлирующих ориентации (рис. 1, слева), а в пятиугольнике при любой сильно базлирующей ориентации су-

существуют три ребра, ориентированные, как указано на рис. 1, справа.

Пусть M_4 — граф Мыцельского (см. (2) или (3), стр. 355) для хроматического числа $\gamma = 4$.

Лемма 2. Граф M_4 не является сильно базисруемым.

Предположим противное, т. е. что граф M_4 — сильно базисруемый. Тогда по теореме 2 существует такая сильно базисрующая ориентация α , при которой все дуги, инцидентные вершине a , исходят из нее. По лемме 1 для той же ориентации на цикле $(a, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a)$ существуют три ребра, ориентированные, как на рис. 2.

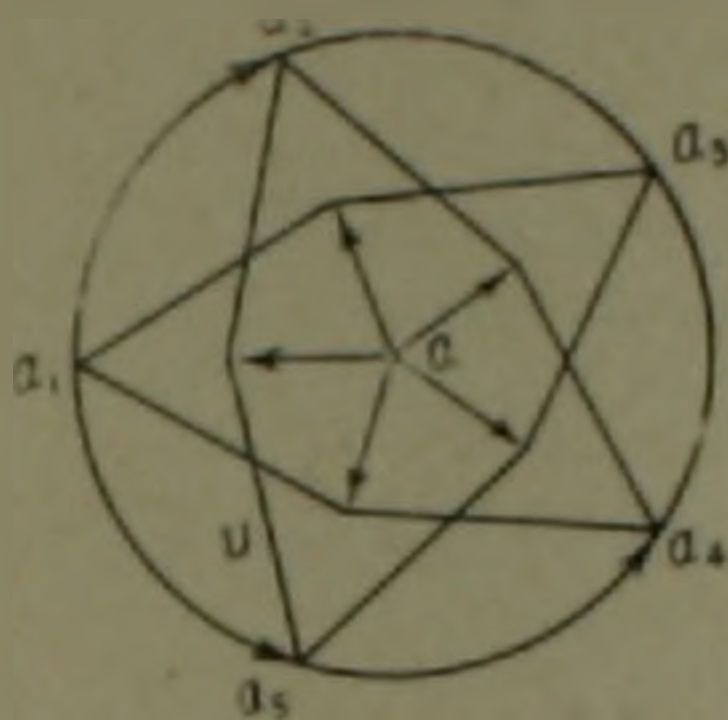


Рис. 2

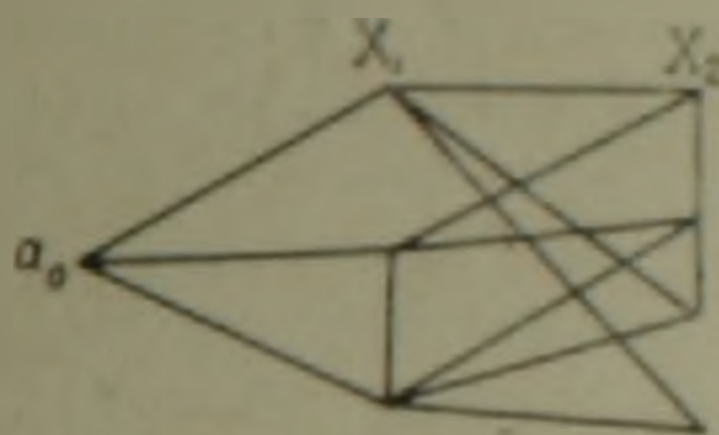


Рис. 3

При ориентации α ребро uv может иметь одно из двух возможных направлений. Ориентируя ребро uv в любом из этих направлений и применяя лемму 1 несколько раз, мы сорентируем все ребра, но полученные при этом ориентации не будут сильно базисрующими.

Определение. Пусть множество вершин графа $L = (X, U)$ разделено на три непересекающихся подмножества следующим образом:

$$X_0 = \{a_0\},$$

$$X_1 = \{x \mid x \in X \text{ и } a_0x \in U\},$$

$$X_2 = X \setminus (X_0 \cup X_1).$$

Тогда граф $L' = (a_0, X_1, X_2; U)$ (см. рис. 3) назовем двудольным представлением графа $L = (X, U)$ из вершины a_0 .

Лемма 3. Если $M \in \Lambda$ и имеет хроматическое число $\gamma(M) \geq 4$, то при любом двудольном представлении L в M найдется цикл нечетной длины, принадлежащий подграфу $M(X_2)$.

Действительно, в противном случае $M(X_2)$ был бы графом Кёнига и, следовательно, граф M можно было бы окрасить тремя цветами.

Теорема 3. В классе Λ , графов из Λ , обладающих хроматическим числом $\gamma = 4$, существует только один (с точностью до

изоморфизма) граф с наименьшим числом ребер и только один с наименьшим числом вершин: оба они изоморфны M_4 .

Доказательство.

Пусть $M(X, U)$ — один из вершинно (или реберно) минимальных графов класса Λ_4 .

Так как $M(X, U)$ критический, то верно (см. (2))

$$\forall x \in X \quad r(x) \geq 3 \quad (1)$$

а по теореме Брукса

$$\exists x \in X \quad r(x) \geq 4.$$

Пусть $a_0 \in X$ такая, что

$$r(a_0) = \max_{x \in X} r(x).$$

Найдем двудольное представление графа $M(X, U)$ из вершины a_0 . По лемме 3 в этом представлении существует цикл нечетной длины, принадлежащий подграфу $M(X_1)$.

Возможны следующие случаи:

I. Длина минимального цикла C нечетной длины в подграфе $M(X_1)$ равна пяти. Обозначим $C = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$.

1) Пусть $r(a_0) = 5$ и $|X_1| = 5$.

Очевидно, из любой $x \in X_1$ может идти не более двух ребер в X_2 , а используя (1), получим, что вершины множеств X_1 и X_2 соединяются десятью ребрами. В графе $M(X, U)$ ни одна из вершин множества X_2 не может иметь степень меньше 4, иначе граф допускал бы раскраску тремя цветами. Значит, в графе $M(X, U) \forall a_i \in X_2 \quad (a_i) = 4$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$). Непосредственно проверяется, что существует единственный граф с такими свойствами и что он совпадает с M_4 .

Итак, построен граф M_4 с $\gamma = 4$, с $n(M_4) = 11$ вершинами и $m(M_4) = 20$ ребрами.

Простой проверкой убеждаемся, что если в подграфе $M(X_1)$ кроме цикла C есть еще хотя бы одна вершина, то $n(M) > n(M_4)$ и $m(M) > m(M_4)$.

2) Пусть $r(a_0) = 4$.

Можно показать, что в этом случае $n(M) > n(M_4)$ и $m(M) > m(M_4)$.

3) Пусть $r(a_0) \geq 6$.

Тогда $n(M) > 12$, а $m(M) > 23$.

II. Длина минимального цикла нечетной длины в подграфе $M(X_1)$ равна 7.

В этом случае число вершин в графе $M(X, U)$ не менее 12, а ввиду замечания, сделанного в (1), число ребер будет не менее 25.

III. Длина минимального цикла нечетной длины в подграфе $M(X_1)$ не меньше 9.

В этом случае число вершин не менее 14, а число ребер не менее 21.

Все возможные случаи рассмотрены. Этим завершено доказательство теоремы*.

Теорема 4. *Граф M_0 — единственный не сильно базисуемый граф класса Λ , имеющий наименьшее число ребер (вершин).*

Доказательство.

Если число ребер (вершин) какого-нибудь графа $L \in \Lambda$, отличного от M_0 , будет не больше числа ребер (вершин) графа M_0 , то по теореме 3 будет $\tau(L) < 4$ и, следовательно, по теореме 1 граф L окажется сильно базисуемым.

Простой проверкой убеждаемся в справедливости следующей леммы:

Лемма 4. *Если при некоторой базисующей ориентации ψ графа $H = (V, E)$ одна из сторон какого-то четырехугольника принадлежит ориентации, то этот четырехугольник ориентирован циклически.*

Очевидно, граф с наименьшим числом вершин (ребер) и не являющийся базисуемым есть четырехвершинный полный граф. Единство имеет место

Теорема 5. *Граф M_0 — единственный не базисуемый граф класса Λ , имеющий наименьшее число ребер (вершин).*

Докажем, что граф M_0 не базисуемый. Если бы существовала базисующая ориентация ψ для графа M_0 , то, так как он не является сильно базисуемым (лемма 2), при ориентации ψ в графе M_0 существовал бы ориентированный цикл C . Какой бы ни был ориентированный цикл C в графе M_0 , существует четырехугольник, имеющий с этим циклом одно общее ребро. Применяя несколько раз лемму 4, мы приходим к противоречию.

Так как сильная базисуемость графа влечет его базисуемость, то остальные утверждения теоремы 5 следуют из теоремы 4.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Կ. Մ. ՄԱՍԻՍՅԱՆ

Ու ուժեղ բաղիւսալիւղ միւնիւսլ գրաֆ

Հոգիւսմում գրաֆիկում է սոգորական գրաֆիկի երեւ երկարութիւնը
քիւլի շարունակող Λ երկարութիւնը

Ու հոգմնորոշման գրաֆիկ կանգնեմք բաղիւսալիւղ (ուժեղ բաղիւսալիւղ):
Եթէ այն կարելի է հոգմնորոշել այնպէս, որ գտնուի որեւէ գրաֆիկ (մասնակի
կարգաւորման գրաֆիկ) բաղիւսալիւղ գրաֆիկ:

Ապացուցման է, որ Λ -ում կա 6-խումբային միւնիւսլ մէկ հոգմնիւղ (գտնաբերման)
միւնիւսլ գրաֆիկ այն իզոմորֆ է Միւնիւսլիւղ: Կանտորիցիւսլիւղ
ստացման M_0 գրաֆիկ: Ապացուցման է նաեւ, որ M_0 -ը Λ -ի միւնիւսլ գրաֆիկ է

* Писая установления этих результатов автором были обнаружены, что утверждения теоремы относительно вершин писаны в работе (4), но без доказательства и ссылки на какие-нибудь источники.

է. որը բաղիսացվող (ուժեղ բաղիսացվող) չէ և ունի միևնույն թվով դադաթներ (անկախ կողերի թվից) ու կողեր (անկախ դադաթների թվից):

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. А. Зыков, Теория конечных графов, I, изд. Наука, Новосибирск, 1969. ² О. Оре, Теория графов, изд. Наука, М., 1968. ³ J. Mycielski, Sur le coloriage des graphs. Colloq. Math., № 2, 161—162, 3 (1955). ⁴ V. Chvátal, The smallest triangle-free 4-chromatic 4-regular graph. J. Combin. Theory, 9, № 1, 93—94, 1970.