

УДК 517.9

Д. О. Мелкумян

Интегральный признак устойчивости функциональных уравнений

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Ф. Т. Саркисяном 25/V 1971)

1. *Линейные дифференциальные уравнения.* Рассмотрим систему

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad (1)$$

где A — постоянная матрица с размером $n \times n$, X — вектор, t — время.

Для асимптотической устойчивости линейной однородной системы (1) необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения

$$P(\lambda) \equiv \det(A - \lambda E) = 0 \quad (2)$$

обладали отрицательными вещественными частями ($\text{Re } \lambda < 0$). Однако вычисление корней уравнения (2) представляет собой достаточно трудоемкую задачу, поэтому, устойчивость системы определяется при помощи специальных критериев. При высокой размерности системы (1) реализация на ЦВМ существующих критериев устойчивости Рауса и Гурвица (^{4,5}) также очень трудоемка.

Для рассмотренных систем справедлива

Теорема 1. *Для того, чтобы система (1) была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Re} [P'(iz)/P(iz)] dz = n\pi. \quad (3)$$

Доказательство. Положим в (2) $\lambda = iz$ и рассмотрим действительную часть логарифмической производной от характеристического многочлена

$$f(z) = \text{Re} \left[\frac{P'(iz)}{P(iz)} \right] = \sum_{m=1}^n \frac{-x_m}{x_m^2 + (z - y_m)^2}, \quad (4)$$

где $\lambda_m = x_m + iy_m$ — корни уравнения (2). Так как для любого m

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-x_m dz}{x_m^2 + (z - y_m)^2} = \begin{cases} +\pi, & \text{если } x_m < 0; \\ 0, & \text{если } x_m = 0; \\ -\pi, & \text{если } x_m > 0, \end{cases}$$

то доказательство теоремы становится очевидным. В силу сходимости интеграла (3) и четности подинтегральной функции (4), условие (3) можно привести к виду

$$\int_0^{\pi} \operatorname{Re} [P'(iz)/P(iz)] dz \approx n\pi. \quad (5)$$

Таким образом задача асимптотической устойчивости системы (1) сводится к вычислению определенного интеграла (5).

2. *Линейные разностные уравнения.* Аналогичный критерий существует для линейных разностных уравнений вида

$$X(n+1) = AX(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Условие асимптотической устойчивости системы (6) заключается в том, чтобы все собственные значения матрицы A лежали внутри единичного круга (2).

Теорема 2. Для того, чтобы система (6) была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^{\pi} \operatorname{Re} [P'(e^{iz})/P(e^{iz})] dz = n\pi. \quad (7)$$

Еренин-В

Доказательство. Положим в (2) $\lambda = e^{iz}$ и рассмотрим действительную часть логарифмической производной от характеристического многочлена

$$f(z) \equiv \operatorname{Re} \left[\frac{P'(e^{iz})}{P(e^{iz})} \right] = \sum_{m=1}^n \frac{1 - R_m \cos(z - \varphi_m)}{1 + R_m^2 - 2R_m \cos(z - \varphi_m)}, \quad (8)$$

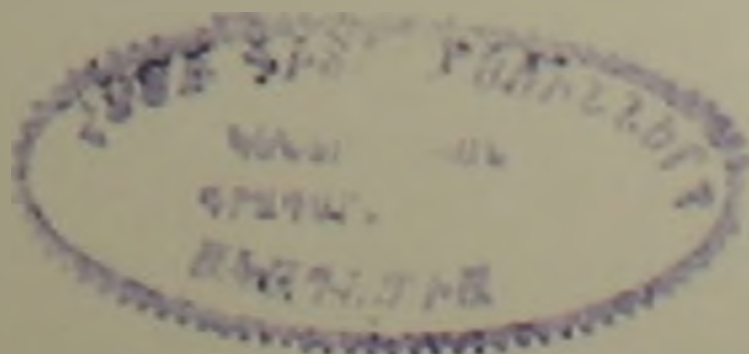
где $\lambda_m = R_m \operatorname{Exp}(i\varphi_m)$ — корни уравнения (2). Так как для любого m

$$\int_0^{\pi} \frac{1 - R_m \cos(z - \varphi_m)}{1 + R_m^2 - 2R_m \cos(z - \varphi_m)} dz = \begin{cases} \pi, & \text{если } R_m < 1; \\ \pi/2, & \text{если } R_m = 1; \\ 0, & \text{если } R_m > 1, \end{cases}$$

то доказательство теоремы становится очевидным.

Таким образом задача асимптотической устойчивости системы (6) также сводится к вычислению определенного интеграла (7).

Еренинский ИИИ математических машин



Ֆունկցիոնալ հավասարումների կայունության ինտեգրալային չափանիշ

Հաստատուն գործակիցներով դժային դիֆերենցիալ և տարրերույթային հավասարումների ասիմպտոտիկ կայունության որոշման համար առաջադրվում է ինտեգրալային չափանիշ, որը գոյություն ունեցողների (Ռաուս, Հուր-վից և այլն) նկատմամբ հարմար է հաշվիչ մեքենաներում իրագործման տեսակետից:

Դիտարկվող հավասարումների ասիմպտոտիկ կայունության խնդիրը բերվում է որոշյալ ինտեգրալի հաշվման:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Р. Белман, Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, ИЛ, 1954. ² Р. Белман, Введение в теорию матриц, «Наука», М., 1969. ³ Б. П. Демидович, Лекции по математической теории устойчивости, «Наука», М., 1967. ⁴ Н. Г. Чеботарев, Н. Н. Мейман, Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций. Труды мат. инст. АН СССР, 26 (1949). ⁵ Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, «Наука», М., 1967.