УДК 517.512

Р. С. Давтян

О представлении измеримых функций интегралами Фурье

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 23/V 1971)

В 1939 году Д. Е. Меньшовым была доказана следующая теорема о представлении измеримых функций тригонометрическими рядами (1).

Теорема I (Д. Е. Меньшов). Для любой почти везде конечной измеримой функции $f(x)$, определенной на $[-\pi, \pi]$, существует тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad (1)$$

который сходится к $f(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

В дальнейшем А. А. Талаляном была доказана теорема (см. (2), теорему 1), являющаяся усилением теоремы I.

Она формулируется следующим образом.

Теорема II (А. А. Талалян). Существует тригонометрический ряд (1), обладающий тем свойством, что для любой измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$ или равной $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры, из ряда (1) можно выделить подряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \cos n_k x + b_{n_k} \sin n_k x, \quad 0 \leq n_1 < n_2 < \dots,$$

который сходится к $f(x)$ почти всюду на том множестве, где $f(x)$ конечна и сходится к $f(x)$ по мере на том множестве, где $f(x)$ равна $+\infty$ или $-\infty$.

Заметим, что в доказательстве теоремы II существенно использована одна лемма Д. Е. Меньшова о свойствах интеграла Дирихле (см. (2), лемму 2), которая играет важную роль при доказательстве теоремы I. Однако теорема II, в отличие от теоремы I, доказывается без использования принципа локализации Римана для общих тригонометрических рядов и конструкции Д. Е. Меньшова построения нуль-

рядов. Это обстоятельство позволяет, используя метод доказательства теоремы II, доказать следующую теорему о представлении измеримых функций интегралами Фурье.

Теорема 1. Для любой почти везде конечной измеримой функции $F(x)$, определенной на $[0, \infty)$, существует непрерывная на $[0, \infty)$ функция $g(t)$ такая, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x g(t) \cos xt dt = F(x) \quad (2)$$

почти для всех x , $x \in [0, \infty)$, причем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0 \quad (3)$$

и

$$\int_0^p g \leq p \quad (p \in [0, \infty)). \quad (4)$$

Заметим, что аналогичная теорема при более слабой сходимости (сходимость по мере) интегралов (2) и без требования выполнения (4) была доказана (*), где вместо ядра $\cos xt$ рассмотрены более общие ядра.

Согласно теореме 1, оказывается, что при помощи сравнительно узкого класса функций $g(t)$, удовлетворяющих условиям (3) и (4), косинус-интегралами Фурье представляются все конечные измеримые функции, определенные на $[0, \infty)$. В связи с этим представляет интерес следующая задача.

Пусть $\varphi(p)$ неубывающая функция, заданная на $[0, \infty)$, и через B_φ обозначен класс непрерывных функций $g(t)$, удовлетворяющих (3) и условию

$$\int_0^p g = O(\varphi(p)) \quad \text{при } p \rightarrow \infty$$

Для каких функций $\varphi(p)$ можно утверждать, что B_φ является классом представления конечных функций в смысле (2)?

Теорема 1 означает, что можно взять $\varphi(p) \equiv p$.

Используя конструкцию построения универсального тригонометрического ряда (см. (2)), устанавливается существование функции $\varphi(p)$, $\varphi(p) = O(p)$ при $p \rightarrow \infty$, для которой B_φ все же является классом представления (в указанном выше смысле) для всех конечных измеримых функций.

Кроме того, легко показать, что нельзя взять $\varphi(p) = O(1)$ при $p \rightarrow \infty$. Однако нам не удалось найти окончательных оценок для $\varphi(p)$.

В доказательстве теоремы 1 существенно используется одна лемма Д. Е. Меньшова о свойствах интеграла Дирихле (см. (2), лемму 1).

Лемма 1 (Д. Е. Меньшов). Пусть $[c, d]$ любой отрезок, r и $n > 8$ произвольные натуральные числа и

$$\delta = \frac{d-c}{\sqrt{r}}, \quad c_s = c + s\delta, \quad a_s = c_s - \delta$$

$$(s = 0, 1, 2, \dots, r).$$

Тогда

$$\left| \sum_{s=1}^r \int_{a_s}^{c_s} \frac{\sin \rho(t-x)}{t-x} dt \right| < L$$

$$x \in \left[c + \frac{d-c}{\sqrt{r}}, d - \frac{d-c}{\sqrt{r}} \right], \quad \rho \in (-\infty, \infty)$$

где L — абсолютная константа*.

Исходя из этой леммы и применяя методы работы (2), доказываются сформулированные ниже леммы 1 и 2, при помощи которых устанавливается теорема 1.

Лемма 1. Для любых положительных чисел A и $\varepsilon < 1$ можно определить $\delta > 0$ такое, что какова бы ни была измеримая функция $f(x)$,

$$f(x) = 0, \quad \text{при } x \notin E, \quad E \subset [0, A]$$

и

$$|f(x)| \leq \delta, \quad x \in E$$

и каковы бы ни были положительные числа a, z, B и τ , существуют измеримое множество R , отрезок $[q, s]$ и измеримая функция $g(x)$, $x \in [q, s]$, для которых выполняются следующие условия:

a) $s > q > z$, $g(x)$ непрерывна на $[q, s]$ и $g(q) = g(s) = 0$,

$$|g(x)| < \varepsilon \quad (x \in [q, s]);$$

b) $R \subset E$, $\mu R > \mu E - \varepsilon$;

c) $\left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_q^s g(t) \cos xt dt - f(x) \right| < \eta \quad (x \in R)$;

d) $\left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_q^s g(t) \cos x t dt \right| < \varepsilon \quad (x \in R, \rho \in [q, s])$;

e) $B + \int_q^s g < a\rho \quad (\rho \in [q, s])$.

Лемма 2. Пусть $A > 1$ некоторое число, а $f(x)$ — почти везде конечная на $[0, A]$ измеримая функция, равная нулю вне некоторого множества $E \subset [0, A]$. Тогда для любых положительных чисел ε, z, B и $\delta < 1$ существуют измеримые множества P и Q , от-

* ρ не обязан быть целым.

резок $[q, s]$ и измеримая функция $g(x)$, $x \in [q, s]$, которые удовлетворяют условиям:

1) $s > q > 0$, $g(x)$ непрерывна на $[q, s]$ и $g(q) = g(s) = 0$,
 $|g(x)| < \delta$ ($x \in [q, s]$);

2) $P \subset E$, $\mu P > \mu E - \delta$,

3) $Q \subset [0, A] - E$, $\mu Q > \mu\{[0, A] - E\} - \delta$,

4) $\left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_q^s g(t) \cos xt dt - f(x) \right| < \delta$ ($x \in P$),

5) $\left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_q^s g(t) \cos xt dt \right| < \delta$ ($x \in Q$, $\rho \in [q, s]$),

6) $B + \bigvee_q^s g \leq \alpha \rho$ ($\rho \in [q, s]$).

В заключение автор выражает благодарность А. А. Талалюну за постановку задачи и оказанную помощь при ее решении.

Институт математики и механики
 Академии наук Армянской ССР

Ռ. Ս. ԴԱՎԹՅԱՆ

Չափելի ֆունկցիաները Ֆուրյեի ինտեգրալներով ներկայացման մասին

Ներկա աշխատանքում ասպարոցվում է հետևյալ թեորեմը:

* Ե ո թ ե մ, $[0, \infty)$ -ում որոշված ցանկացած համարյա ամենուրեք վերջավոր չափելի $F(x)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $[0, \infty)$ -ում որոշված $g(t)$ աննդհատ ֆունկցիա այնպիսին, որ

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\lambda g(t) \cos xt dt = F(x)$$

$[0, \infty)$ -ին պատկանող համարյա բոլոր x -երի համար ընդ որում՝

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0, \quad \text{և} \quad \bigvee_0^t g \leq \rho \quad (\rho \in [0, \infty)).$$

ЛИТЕРАТУРА — ЦИЦЦУПРЪ ЗПРЪ

1 Д. Е. Меньшов, Матем. сб., 9 (51), (1941), 667—692. 2 А. А. Талалай, Известия АН СССР, сер. матем., т. 27 (1963), 621—660. 3 Д. Е. Меньшов, Матем. сб., 8, (50) (1940), 493—518. 4 А. А. Талалай, Матем. сб., 53 (95), № 3 (1961), 287—312.