

МАТЕМАТИКА

УДК 519.46

Р. О. Назарян

О разложении некоторых простых вещественных групп Ли

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 20/V 1971)

Предполагается, что все рассматриваемые группы Ли и их подгруппы являются связными. Тройка (G, G', G'') , где G группа Ли, G' и G'' ее собственные подгруппы Ли, называется разложением, если $G = G'G''$, т. е. если каждый элемент $g \in G$ представляется в виде $g = g'g''$, где $g' \in G'$, $g'' \in G''$. Разложение $G = G'G''$ называется редуктивным, если G — редуктивная группа Ли, G' , G'' — редуктивные в G подгруппы Ли. Разложение называется максимальным, если G' , G'' максимальные подгруппы в G . В работе ⁽¹⁾ найдены все редуктивные и все максимальные разложения некомпактных простых вещественных групп Ли. В настоящей работе рассматриваются минимальные разложения, т. е. такие разложения $G = G'G''$, для которых не существует подгрупп $G_0' \subset G'$, $G_0'' \subset G''$ таких, что тройка (G, G_0', G_0'') является разложением и что $G_0' \neq G'$ или $G_0'' \neq G''$. Мы находим все минимальные разложения групп $SO(p, q)$, $SU(p, q)$, $Sp(p, q)$ и всех нормальных вещественных простых групп Ли. Знание всех максимальных и всех минимальных разложений этих групп дает возможность легко найти все их разложения. Для групп $SO(1, q)$, $SU(1, q)$, $Sp(1, q)$ это было сделано в работе ⁽¹⁾. Пусть $G = G'G''$ — разложение. Обозначим соответственно через $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{X}''$ алгебры Ли, отвечающие группам G , G' , G'' . Тогда $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}' + \mathfrak{X}''$ ⁽¹⁾. Мы будем описывать разложения групп Ли при помощи соответствующих разложений алгебр Ли.

Разложение $G = G'G''$ будем называть разложением без пересечения, если $\mathfrak{X}' \cap \mathfrak{X}'' = 0$. Такое разложение является минимальным. Примером разложения без пересечения является так называемое разложение Ивасава $G = KT$, где K — максимальная компактная в G подгруппа, а T — максимальная треугольная в G подгруппа ⁽²⁾.

Пусть $\mathfrak{X}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{R}$. Π -система простых корней этой алгебры Ли. $\Pi_1 \subset \Pi$ подсистема корней, не равных нулю на некомпактной части картановской подалгебры, $\mathfrak{u}_1$ -параболическая подалгебра в $\mathfrak{X}$, соответствующая подсистеме $\Gamma \subset \Pi_1$. Рассмотрим

$\Gamma = \emptyset$ и положим $u = m + n$, где $m \subset h_- + v$, причем m изоморфно проектируется на $h_- = c_-$. Тогда u — k -подалгебра т. е. $\mathfrak{X} = u + k_0$ и это есть разложение без пересечения. Назовем это разложение обобщенным разложением Инасана.

Теорема. Минимальные разложения групп $SO(p, q)$, $SU(p, q)$, $Sp(p, q)$ и нормальных вещественных простых групп Ли исчерпываются разложениями, перечисленными в таблицах 1, 2 а все остальные минимальные разложения имеют компактную $\mathfrak{X}''$. В таблице 1 даны все минимальные редуктивные разложения.

Таблица 1

$\mathfrak{X}$	$\mathfrak{X}'$	$\mathfrak{X}''$
$sl(2n, R)$	$sp(n, R)$	$sl(2n - 1, R)$
$su(2p, 2q)$	$sp(p, q)$	$so(2p - 1, 2q)$ $so(2p, 2q - 1)$
$su(n, n)$	$sp(n, R)$	$su(n - 1, n)$
$so(3, 4)$	G_2	$so(1, 4)$ $so(2, 3)$
$so(2p, 2q)$	$su(p, q)$	$so(2p - 1, 2q)$ $so(2p, 2q - 1)$
$so(n, n)$	$sl(n, R)$	$so(n - 1, n)$
$so(4p, 4q)$	$sp(p, q)$	$so(4p - 1, 4q)$ $so(4p, 4q - 1)$
$so(2n, 2n)$	$sp(n, R)$	$so(2n - 1, 2n)$
$so(8, 8)$	$so(7, 8)$	$so(1, 8)$ $so(4, 5)$
$so(4, 4)$	$so(3, 4)$	$so(1, 4)$ $so(2, 3)$

Метод нахождения минимальных разложения состоит в следующем. Пусть $G = G'G''$ — минимальное разложение группы G . Обозначим через K, K', K'' максимальные полупростые компактные подгруппы в G, G', G'' соответственно такие, что $K \supset K', K''$. Из работы (1) следует, что тройка (K, K', K'') является разложением. Пусть $\bar{G}', \bar{G}''$ — максимальные подгруппы в G , содержащие G', G'' соответственно, $\bar{K}', \bar{K}''$ — их максимальные полупростые компактные подгруппы. Все разложения компактных групп Ли подробно изучены в работе (2). Результаты ее позволяют явно найти все разложения $K = \bar{K}', \bar{K}''$, где

$K' \subset \bar{K}', K'' \subset \bar{K}'$. Подгруппы $\bar{G}, \bar{G}''$ описаны в работе (1). Ищем те подгруппы $G' \subset \bar{G}'$ и $G'' \subset \bar{G}''$, которые содержат соответственно K', K'' и из этих подгрупп выбираем те, которые дают минимальное разложение.

Таблица 2

$\mathfrak{X}$	$\mathfrak{X}'$	$\pi_1 \setminus \Gamma$	$\mathfrak{X}''$
$sl(2n, R)$	$sl(2n - 1, R) + n_r$	a_1	$sl(n, C)$ $sp\left(\frac{n}{2}, C\right)$ $su^*(2m) \ m = \frac{n}{2}$
$su(p, q)$ $0 < p \leq q, q > 1$	$sl(p, C) + n_r$	a_p, a_q	$su(1, q)$
$su(2p, 2q)$ $0 < p \leq q$	$su(2p - 1, 2q - 1) + n_r$	$a_1, a_{2p+2q-1}$	$sp(p, q)$
$so(p, q)$ $0 < p \leq q, q > 2$	$sl(p, R) + n_r$	a_p	$so(1, q)$
$so(2p, 2q)$ p или q нечет.	$so(2p - 1, 2q - 1) + n_r$	a_1	$su(p, q)$
$so(4p, 4q)$	$so(4p - 1, 4q - 1) + n_r$	a_1	$sp(p, q)$
$sp(2n, R)$	$sp(2n - 1, R) + n_r$	a_1	$sp(n, C)$
$sp(p, q)$	$su^*(2p) + n_r$	a_{2p}	$sp(1, q)$

Таблица 3

$\mathfrak{X}$	$\mathfrak{X}'$	$\pi_1 \setminus \Gamma$	$\mathfrak{X}''$
$so(p, q)$ $0 < p \leq q, q > 2$	$sl(p, R) + n_r$	a_p	$so(1, q)$
	$sl(p, R) + c_r^- + n_r$		$so(q)$
$su(p, q)$ $0 < p \leq q, q > 1$	$sl(p, C) + n_r$	a_p, a_q	$su(1, q)$
	$sl(p, C) + c_r^- + n_r$		$su(q)$
$sp(p, q)$ $0 < p \leq q$	$su^*(2p) + c_r^- + n_r$	a_{2p}	$sp(q)$

Следствие. Все разложения без пересечения групп $SO(p, q)$, $SU(p, q)$, $Sp(p, q)$ исчерпываются разложениями, перечисленными в табл. 3 и обобщенными разложениями Ивасава.

В заключение выражаю искреннюю благодарность А. Л. Оницику за постоянное внимание и руководство.

Ереванский государственный университет

Ռ. Հ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ

Որոշ իրական պարզ լիի խմբերի վերլուծումների մասին

Հոդվածում դիտարկվում է $(SO(p, q), SU(p, q), Sp(p, q))$ խմբերի և լիի նորմալ իրական պարզ խմբերի վերլուծումները, Գտնված են այդ խմբերի բոլոր այն վերլուծումները, որոնք Իվասավայի վերլուծումների հետ միասին սպառում են մինիմալ ռեդուկտիվ և մնացած բոլոր մինիմալ վերլուծումները, Գտնված են նաև $SO(p, q)$, $SU(p, q)$, $Sp(p, q)$ խմբերի բոլոր առանց հատման վերլուծումները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. Л. Онищик, Матем. сб., т. 80 (122), 4, 553—599, (1969). ² С. Хелгасон, Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, изд. «Мир», М., 1965. ³ А. Л. Онищик, Труды Моск. матем. об-ва, XI, 199—242 (1962).