

УДК 517.948.35

МАТЕМАТИКА

Ф. И. Ландер

Расширения изометрических операторов сдвига в пространстве Понтрягина $P^{(n)}$

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 12/V 1971)

1. Пусть $P^{(n)}$ — n -мерное пространство Понтрягина ⁽¹⁾, $e_0, e_1, \dots, e_{n-1}$ — базис $P^{(n)}$, V — оператор сдвига этого базиса: $Ve_k = e_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, n-2$, изометрический по отношению к индефинитной метрике (x, y) пространства $P^{(n)}$. При этом матрица Грама базиса $\{e_k\}_{k=0}^{n-1}$ является тѐплицевой эрмитовой:

$$(e_i, e_j) = c_{i-j}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2).$$

Введем обозначения (при $k = 0, 1, \dots, n-1$): $\Delta_k = |c_{i-j}|_{i,j=0}^k$ ($\Delta_{-1} = 1$); $A_{ij}(M_{ij})$ алгебраическое дополнение (минор) соответствующего элемента определителя Δ_{n-1} , $d_k(u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) = A_{k0}u_0 + A_{k1}u_1 + \dots + A_{k,n-1}u_{n-1}$; $d_k(i) = d_k(1, i, \dots, i^{n-1})$ (так как $\Delta_{n-1} \neq 0$, то $d_k(i) \equiv 0$). Обозначим также

$$\Delta_n(\zeta, \bar{v}) = \begin{vmatrix} c_0 & c_{-1} & \dots & c_{-n+1} & \bar{v} \\ c_1 & c_0 & \dots & c_{-n+2} & c_{-n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \dots & c_0 & c_{-1} \\ \zeta & c_{n-1} & \dots & c_1 & c_0 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

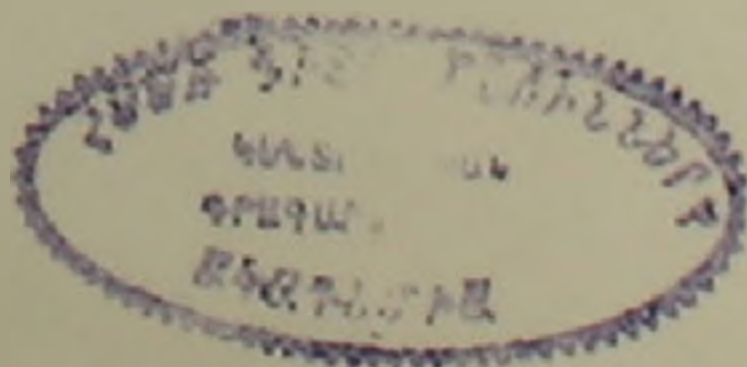
В ⁽²⁾ установлено следующее

Предложение. Расширение U изометрического оператора V сдвига является унитарным оператором тогда и только тогда, когда $Ue_{n-1} = a_0e_0 + a_1e_1 + \dots + a_{n-1}e_{n-1}$, где числа $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ являются решением системы

$$c_{-k}a_0 + c_{-k+1}a_1 + \dots + c_{-k+n-1}a_{n-1} = c_{-k+n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad c_n = \zeta,$$

в которой ζ удовлетворяет уравнению $\Delta_n(\zeta, \bar{\zeta}) = 0$, определяющему на плоскости C^1 при $\Delta_{n-2} \neq 0$ — окружность, при $\Delta_{n-2} = 0$ — прямую линию. При этом

$$a_k(\zeta) = \Delta_{n-1}^{-1} d_k(\zeta, c_{n-1}, \dots, c_2, c_1). \quad (2)$$



Применяя детерминантное тождество Сильвестра ⁽³⁾ к определителю (1) и его минору M_{0k} (порядка $n-1$) и полагая $A_{0n} = 0$, $a_n(\zeta) = -1$, получаем (при $k = 0, 1, \dots, n$)

$$A_{k0} \Delta_n(\zeta, \bar{\nu}) = -\Delta_{n-1}^2 [\overline{a_{n-1}(\nu)} + \overline{a_0(\nu)} a_k(\zeta)], \quad (3)$$

откуда при $k = 0$ и $\nu = 3$ вытекает (см. также ⁽⁴⁾)

$$\Delta_{n-2} \Delta_n(\zeta, \bar{\zeta}) = \Delta_{n-1}^2 [1 - |a_0(\zeta)|^2]. \quad (4)$$

При $\Delta_{n-2} = 0$ имеем $a_0(\zeta) = \text{const}$, $|a_0(\zeta)| = 1$, откуда и следует, что уравнение $\Delta_n(\zeta, \bar{\zeta}) = 0$ определяет (при $\Delta_{n-2} = 0$) прямую линию (ср. ⁽³⁾).

Расширения U оператора V , определенные равенством $Ue_{n-1} = a_0(\zeta)e_0 + a_1(\zeta)e_1 + \dots + a_{n-1}(\zeta)e_{n-1}$, будем обозначать через U_ζ , оговаривая там, где это необходимо, их унитарность (при $\Delta_n(\zeta, \bar{\zeta}) = 0$). Заметим, что при $\Delta_{n-2} = 0$ унитарные операторы U_ζ обладают любопытным свойством: если операторы U_{ζ_i} ($i = 1, 2, \dots, m$) унитарны и $\zeta_0 = (\zeta_1 + \dots + \zeta_m) m^{-1}$, то оператор $m^{-1}(U_{\zeta_1} + \dots + U_{\zeta_m}) = U_{\zeta_0}$ также унитарен, что приводит к равенству

$$m(U_{\zeta_1} + \dots + U_{\zeta_m})^{-1} = m^{-1}(U_{\zeta_1}^{-1} + \dots + U_{\zeta_m}^{-1}).$$

2. Обозначим (при $k = 1, 2, \dots, n$; $c_n = \zeta$)

$$\Delta_k(\lambda) = \begin{vmatrix} c_0 & c_{-1} & \dots & c_{-k+1} & 1 \\ c_1 & c_0 & \dots & c_{-k+2} & \lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k-1} & c_{k-2} & \dots & c_0 & \lambda^{k-1} \\ c_k & c_{k-1} & \dots & c_1 & \lambda^k \end{vmatrix}, \quad \Delta_0(\lambda) = c_0. \quad (5)$$

Характеристический многочлен оператора U_ζ имеет вид

$$\psi_\zeta(\lambda) = \lambda^n - a_{n-1}(\zeta)\lambda^{n-1} - \dots - a_1(\zeta)\lambda - a_0(\zeta) =$$

$$= \Delta_{n-1}^{-1} \Delta_n(\lambda) = \Delta_{n-1}^{-1} [C(\lambda) - \zeta B(\lambda)], \quad \text{где } C(\lambda) = \Delta_{n-1} \psi_0(\lambda),$$

$\zeta = c_n$, $B(\lambda) = \Delta_{n-1}^*(\lambda)$ (что легко проверить при помощи тождества $A_{ij} = \bar{A}_{n-1-i, n-1-j}$, справедливого для эрмитовых матриц, симметричных относительно побочной диагонали).

Все дальнейшие предложения о собственных числах операторов U_ζ являются также предложениями о нулях многочленов, ортогональных относительно последовательности $c_0, c_1, \dots, c_n$ (см. ^(4,5)), причем обычное ограничение $\Delta_k \neq 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-2$) нами не налагается.

* Если $f(\lambda) = a_m \lambda^m + \dots + a_1 \lambda + a_0$ то по определению $f^*(\lambda) = \bar{a}_0 \lambda^m + \bar{a}_1 \lambda^{m-1} + \dots + \bar{a}_m$.

Применяя к определению $\Delta_n(\lambda)$ и его минору $A_{nn} = \Delta_{n-2}$ детерминантное тождество Сильвестра, получаем*

$$\Delta_{n-2} \Delta_n(\lambda) = \Delta_{n-1} [\lambda \Delta_{n-1}(\lambda) - c_0(c_n) \Delta_{n-1}^*(\lambda)]. \quad (6)$$

Из (3) следует

$$\Delta_{n-1}^*(\lambda) \Delta_n(\bar{\lambda}) = \Delta_{n-1}^2 [\psi_n^*(\lambda) + \overline{c_0(\lambda)} \psi_n(\lambda)]. \quad (7)$$

Заметим, что (6) можно получить из (7), и обратно.

3. Как и в (6), введем вектор h_λ , ортогональный к подпространству $R_V(\lambda) = (V - \lambda I) D_V$, где $D_V = \text{л.о. } \{e_k\}_{k=0}^{n-2}$. При нормировке $(h_\lambda, e_0) = 1$ имеем

$$h_\lambda = \Delta_{n-1}^{-1} [d_0(\bar{\lambda}) e_0 + d_1(\bar{\lambda}) e_1 + \dots + d_{n-1}(\bar{\lambda}) e_{n-1}],$$

$$(h_\lambda, h_\mu) = -\Delta_{n-1}^{-1} \Psi(\bar{\lambda}, \mu), \quad (h_\lambda, h_\lambda) = -\Delta_{n-1}^{-1} \Psi(\bar{\lambda}, \lambda),$$

где через $\Psi(\lambda, \mu)$ обозначен определитель (впервые, по-видимому, рассматривавшийся Кронекером (7), см. также (8-10))

$$\Psi(\lambda, \mu) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \lambda & \dots & \lambda^{n-1} \\ 1 & c_0 & c_{-1} & \dots & c_{-n+1} \\ \mu & c_1 & c_0 & \dots & c_{-n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu^{n-1} & c_{n-1} & c_{n-2} & \dots & c_0 \end{vmatrix} = - \sum_{i,j=0}^{n-1} A_{ij} \lambda^i \mu^j. \quad (8)$$

Так как $\Delta_{n-1} \neq 0$, то $\Psi(\lambda_0, \lambda) \neq 0$ ни при каком λ_0 . Из тождества $A_{ij} = \bar{A}_{n-1-i, n-1-j}$ следует (см. также (10)).

$$\Psi(\lambda^{-1}, \mu^{-1}) = (\lambda\mu)^{1-n} \Psi(\mu, \lambda). \quad (9)$$

Имеет место

Лемма 1. Если U_λ унитарный оператор и $U_\lambda z_\lambda = \lambda z_\lambda$ ($z_\lambda \neq 0$), то $z_\lambda = h_\lambda (\lambda^* = \bar{\lambda}^{-1})$.

Поскольку $d_{n-1}(\lambda^{-1}) = \lambda^{1-n} B(\lambda)$, то справедлива

Лемма 2. Вектор $h_{\lambda_0}^*$ принадлежит D_V тогда и только тогда, когда $\Delta_{n-1}^*(\lambda_0) = B(\lambda_0) = 0$.

Следствие 1. Ни один из корней многочлена $\Delta_{n-1}^*(\lambda)$ не может быть собственным числом оператора U_λ .

Таким образом, многочлены $\Delta_n(\lambda)$ и $\Delta_{n-1}^*(\lambda)$ взаимно просты (при $\Delta_{n-1} \neq 0$)*.

Введем теперь дробно-рациональную функцию

$$\zeta(\lambda) = \frac{C(\lambda)}{B(\lambda)}$$

она не имеет устранимых особых точек и не может иметь более

* Доказательство тождества (6), приведенное в (4), в случае $\Delta_n = 0$ должно быть дополнено соображениями непрерывности.

$n - 1$ полюсов. Имеет место

Теорема 1. Число λ_0 принадлежит $\sigma(U_-)$ (спектру U_-) тогда и только тогда, когда $B(\lambda_0) \neq 0$ и $\zeta_0 = \zeta(\lambda_0)$.

Многочлены $\Delta_n(\lambda)$ и $\Delta_{n-1}(\lambda)$ имеют общие корни тогда и только тогда, когда $\Delta_n(0) = 0$ ($\alpha_0(c_1) = 0$), при этом $\Delta_{n-2} \neq 0$ и $\Delta_n(\lambda) \equiv \Delta_{n-2}^{-1} \Delta_{n-1} \Delta_{n-1}(\lambda)$.

4. Пусть ξ_{n-1}, η_{n-1} соответствующие координаты векторов x, y в базисе $e_0, e_1, \dots, e_{n-1}$. Тогда

$$(U_- x, U_- y) - (x, y) = -\Delta_{n-1}^{-1} \xi_{n-1} \bar{\eta}_{n-1} \Delta_n(\zeta, \bar{\nu}).$$

Если $x = z_\lambda, y = z_\mu, U_- z_\lambda = \lambda z_\lambda, U_- z_\mu = \mu z_\mu$, то

$$(1 - \lambda \bar{\mu})(z_\lambda, z_\mu) = \Delta_{n-1}^{-1} \xi_{n-1} \bar{\eta}_{n-1} \Delta_n(\zeta, \bar{\nu}). \quad (11)$$

При $\lambda = \mu$ формула (11) переходит в формулу (4) из ⁽²⁾ (см. также ⁽³⁾). Из (11) вытекает

Теорема 2. а) Если $\lambda_0 \in \sigma(U_-), \lambda_0^* \in \sigma(U_-)$, то $\Delta_n(\zeta, \bar{\nu}) = 0^*$.
б) Если $\lambda_0 \in \sigma(U_-), \mu_0 \in \sigma(U_-)$ и $(z_{\lambda_0}, z_{\mu_0}) = 0$, то $\Delta_n(\zeta, \bar{\nu}) = 0$.

Из а) следует (при $\zeta = \nu$) вторая часть теоремы 2 из ⁽³⁾.

Из теоремы 2 заключаем, что $\Delta_n[\zeta(\lambda), \overline{\zeta(\lambda^*)}] \equiv 0$, откуда получаем:

$$\Delta_n[\zeta(\lambda), \overline{\zeta(\mu)}] = -\Delta_{n-1} \alpha_0[\zeta(\lambda)] \overline{[\zeta(\mu) - \zeta(\lambda^*)]}. \quad (12)$$

Следствие 2. Оператор $U_{(\lambda_0)}$ унитарен тогда и только тогда, когда $\zeta(\lambda_0) = \zeta(\lambda_0^*)$.

Из (11) и (12) выводим:

$$\Delta_{n-1}(\bar{\mu} - 1) \Psi(\bar{\mu}, \lambda) = B(\lambda) \overline{B(\mu)} \Delta_n[\zeta(\lambda), \overline{\zeta(\mu)}], \quad (13)$$

$$(1 - \bar{\lambda}\mu) \Psi(\bar{\lambda}, \mu) = \overline{\alpha_0[\zeta(\lambda)]} \overline{B(\lambda)} B(\mu) [\zeta(\mu) - \zeta(\lambda^*)]. \quad (14)$$

Так как $\alpha_0[\zeta(\lambda)] \Delta_{n-1}^*(\lambda) \equiv \lambda \Delta_{n-1}(\lambda)$, то

$$(\lambda - \mu) \Psi(\lambda^{-1}, \mu) \lambda^{n-1} = -B(\lambda) B(\mu) [\zeta(\lambda) - \zeta(\mu)]. \quad (15)$$

Обозначим $\Psi(\lambda^{-1}, \mu) \lambda^{n-1} = \Phi(\lambda, \mu)$, тогда

$$(\lambda - \mu) \Phi(\lambda, \mu) = -B(\lambda) B(\mu) [\zeta(\lambda) - \zeta(\mu)] \quad (15')$$

Следствие 3. Оператор $U_{(\lambda_0)}$ унитарен тогда и только тогда, когда выполняется (при $B(\lambda_0) \neq 0$) хотя бы одно из равенств:

$$\text{а) } |\lambda_0| = 1 \ (\lambda_0 = \lambda_0^*), \quad \text{б) } \Psi(\bar{\lambda}_0, \lambda_0) = 0 \ (\Phi(\lambda_0^*, \lambda_0) = 0).$$

Из (15') можно получить $\zeta'(\lambda) = -B^{-2}(\lambda) \Phi(\lambda, \lambda)$, в силу чего $\Phi(\lambda^*, \lambda) \neq 0$ ($\Psi(\bar{\lambda}, \lambda) \neq 0$) на единичной окружности (см. также ⁽⁴⁾).

* а) следует также из (7) и следствия 1.

Заменяя в (15') $\zeta(\lambda)$ на $C(\lambda)B^{-1}(\lambda)$, получаем (ср. с (8'))

$$(\lambda - \mu)\Phi(\lambda, \mu) = -\Delta_{n-1}[\varphi_-(\lambda)B(\mu) - \varphi_-(\mu)B(\lambda)], \quad (16)$$

откуда, в частности, вновь можно получить следствие 1.

Полагая в (16) $\mu = \lambda_0$, $\zeta = \zeta(\lambda_0)$, находим

$$\varphi_{-(\lambda_0)}(\lambda) = -\Delta_{n-1}^{-1}B^{-1}(\lambda_0)\Phi(\lambda_0, \lambda). \quad (17)$$

Следствие 4. Число λ_0 ($B(\lambda_0) \neq 0$) является кратным корнем многочлена $\varphi_{-(\lambda_0)}(\lambda)$ тогда и только тогда, когда

$$\Phi(\lambda_0, \lambda_0) = 0 \quad (h_{\lambda_0}^*, h_{\lambda_0}) = 0).$$

Следствие 5. Существует не более $2n - 2$ значений λ (значений ζ), которые могут быть кратными корнями многочленов $\varphi_{\pm}(\lambda)$ (при которых многочлены $\varphi_{\pm}(\lambda)$ имеют кратные корни).

5. Алгебраическую кривую, определяемую уравнением $\Psi(\bar{\lambda}, \lambda) = 0$, обозначим L_0 (если матрица $\|c_{\lambda} - d_{\lambda}^{n-1}\|_{\lambda=0}$ дефинитна, то L_0 является пустым множеством). Из (9) следует, что L_0 симметрична относительно единичной окружности. Перефразируя следствие 3, получаем, что геометрическим местом собственных чисел унитарных операторов U является объединение единичной окружности и линии L_0 за вычетом (возможно лежащих на них) корней многочлена $B(\lambda)$.

Лемма 3. Если $\Delta_{n-2} \neq 0$ (и $\Delta_{n-1} \neq 0$), то среди корней многочлена $B(\lambda)$ нет симметричных относительно единичной окружности, в том числе на ней лежащих, и нет корней, лежащих на линии L_0 . Если же $\Delta_{n-2} = 0$, то множество (ненулевых) корней многочлена $B(\lambda)$ симметрично относительно единичной окружности, и все они лежат на ее объединении с линией L_0 .

Случай $n = 1$ ($n = n - 1$) выделяется своей простотой: имеет место

Лемма 4. Если $n = 1$ ($n = n - 1$), $B(\lambda_0) = 0$ ($\lambda_0 \neq 0$) и $\Delta_{n-2} = 0$, то $\Delta_{n-1}\Psi(\bar{\lambda}_0, \lambda_0) > 0$ (< 0), т. е. $\lambda_0 \in \overline{L_0}$.

6. Дадим следующие определения (ср. с (11)): унитарный оператор U в пространстве Π_n называется эллиптическим (параболическим, гиперболическим), если он имеет n -мерное положительное инвариантное подпространство (если $\varepsilon(U)$ целиком лежит на единичной окружности, но U не является эллиптическим; если U не является ни эллиптическим, ни параболическим оператором).

Можно привести (при $n > 2$) примеры операторов V , не допускающих эллиптических (эллиптических и параболических) расширений U . Что касается гиперболических расширений, то имеет место (для $n = 1$ доказанная в (11)).

Теорема 3. Изометрический оператор V сдвига в пространстве $\Pi_n^{(n)}$ всегда допускает гиперболические расширения U . Множество соответствующих ζ открыто на линии, определяемой уравнением $\Delta_n(\zeta, \bar{\zeta}) = 0$. Граничные точки этого множества соответствуют параболическим U .

Доказательство этой теоремы приведено в ⁽¹²⁾. Иное доказательство можно получить рассуждением от противного: если при $|p| > 1$ будет $\Psi(\bar{\lambda}, \lambda) > 0 (< 0)$, то при $|p| = 1$ будет $\Psi(\bar{\lambda}, \lambda) \geq 0 (\leq 0)$. Но тогда собственные векторы унитарного оператора U_λ с простым спектром, лежащим на единичной окружности, образуют ортогональный базис, состоящий только из положительных или только из отрицательных векторов (см. следствия 4, 5), что приводит к положительности или отрицательности формы (x, y) .

В заключение заметим, что из формулы (11) и теоремы 2 следует, что число корней многочлена $\psi_\lambda(\rho)$, лежащих вне единичного круга постоянно для всех λ , удовлетворяющих неравенству $\Delta_\lambda(\zeta, \bar{\zeta}) > 0 (< 0)$, откуда немедленно вытекает теорема 2 из ⁽³⁾.

Автор пользуется случаем выразить глубокую благодарность Н. С. Нохвидову за руководство и постоянное внимание к работе.

Воронежский государственный
педагогический институт

Ն. Ի. ԼԱՆԴԵՐ

Պոնտրյազինի $\Pi_\lambda^{(n)}$ տարածության մեջ տեղաշարժի օպերատորի իզոմետրիկ լայնացումները

Ուսումնասիրվում են Պոնտրյազինի $\Pi_\lambda^{(n)}$ վերջավոր չափանի տարածության մեջ V իզոմետրիկ օպերատորի լայնացումները: Ստացված են այդպիսի լայնացումների ունիտարության նոր հայտանիշներ: Ապացուցվում է, որ ցանկացած x -ի համար $1 < x < n$, այդպիսի օպերատորն ունի հիպերբոլիկ լայնացումներ: Միաժամանակ ստացված են օրթոգոնալ բազմանդամների վերաբերյալ մի շարք թեորեմների նոր ապացույցներ (համապատասխան մատուցի գլխավոր միտոնների վրա առանց սահմանափակումներ դնելու):

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ И. С. Нохвидов, М. Г. Крейн, Тр. Моск. матем. общ., 5, 169 (1956), 8, 413 (1959).
- ² И. С. Нохвидов, ДАН СССР, 173, № 5, 1002 (1967).
- ³ Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, М., 1967.
- ⁴ Я. Л. Геронимус, Уч. записки ХГУ, 35 (1948).
- ⁵ М. Г. Крейн, Теория функций, функц. анализ и их прилож., вып. 2, 131 (1966).
- ⁶ Ф. И. Ландер, Расширения операторов сдвига в пространстве Понтрягина, ДАН СССР, 199, № 3, 529 (1971).
- ⁷ L. Kronecker, Sitzungsber. Akad. Berlin, 1881.
- ⁸ G. Frobenius, Sitzungsber. der Königl. Preuss. Akad. der Wissenschaft., 16—31 (1912).
- ⁹ И. И. Ахузер, Классическая проблема моментов, М., 1961.
- ¹⁰ У. Гренандер, Г. Сеге, Теплицевы формы и их прилож., М., 1961.
- ¹¹ И. С. Нохвидов, ДАН СССР, 173, № 4, 758 (1967).
- ¹² Ф. И. Ландер, Об одном свойстве многочленов, ортогональных на единичной окружности, Сборник статей аспирантов ВГУ, вып. 1, 47—53 (1971).