ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LIII 1971 3

УДК 533.601.

ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА

А. Б. Багдасарян

Некоторые асимптотические решения задачи неустановившегося потока тепла в газах

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 15/V 1971)

Пусть полупространство $x>0$ заполнено покоящимся, совершенным, теплопроводным газом. Давление, температура и плотность газа равны P_0, T_0 и ρ_0. В момент $t=0$ внезапно на границе газа $x=0$ возникает температура равная T_1 и сохраняется в дальнейшем постоянно. Ввиду сжимаемости, тепло, проводимое через газ, вызывает не только изменение температуры, но также изменения давления и плотности, которые, в свою очередь, создают движение газа в направлении, нормальном к границе.

Требуется определить возникающее движение газа и распространение температуры, давления и плотности в газе.

Описание этих явлений получается из уравнения Навье-Стокса для теплопроводящей, вязкой, сжимаемой жидкости, из уравнения неразрывности, из уравнения Клапейрона и из уравнения притока тепла ([1]).

$$\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{4}{3}\nu_0\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial U}{\partial x}+U\frac{\partial \rho}{\partial x}=0,$$

$$P=\rho RT, \tag{1}$$

$$c_p\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+U\frac{\partial T}{\partial x}\right)-A\left(\frac{\partial P}{\partial t}+U\frac{\partial P}{\partial x}\right)=K\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{4}{3}A\mu_0\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2,$$

где U, ρ, P и T — скорость, плотность, давление и температура газа, ν_0 — кинематический коэффициент вязкости, R — газовая постоянная, c_p — теплоемкость при постоянном давлении, $A=(c_p-c_v)/R$ — термический эквивалент работы, c_v — теплоемкость при постоянном объеме, k — коэффициент теплопроводности, μ_0 — вязкость газа, x — расстояние, t — время.

Начальными и граничными условиями являются

$$U(0,\ t) = 0,\ T(0,\ t) = T_1,\ T(x,\ 0) = T_0,$$
$$U(x,\ 0) = 0,\ P(x,\ 0) = P_0,\ \rho(x,\ 0) = \rho_0. \tag{2}$$

Переходя к безразмерным переменным

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{\nu_0 t}},\quad \tau = \frac{P_0}{\mu_0} t \tag{3}$$

и обозначая

$$U(x,\ t) = \sqrt{\frac{P_0}{\rho_0}}\cdot u(\xi,\ \tau),\ P(x,\ t) = P_0\cdot p(\xi,\ \tau),$$
$$T(x,\ t) = T_0\cdot l(\xi,\ \tau),\ \rho(x,\ t) = \rho_0 m(\xi,\ \tau) \tag{4}$$

систему уравнений (1) сводим к следующему безразмерному виду

$$\frac{4}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\xi}{2} - u\sqrt{\tau}\right)\frac{\partial u}{\partial \xi} - \tau\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sqrt{\tau}}{m}\frac{\partial p}{\partial \xi} = 0,$$

$$\left(u\sqrt{\tau} - \frac{\xi}{2}\right)\frac{\partial m}{\partial \xi} + \tau\frac{\partial m}{\partial \tau} + \sqrt{\tau}\, m\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0,$$

$$p = ml, \tag{5}$$

$$\frac{k}{c_p \nu_0 \rho_0}\cdot\frac{\partial^2 l}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\xi}{2}m - u\sqrt{\tau}\, m\right)\frac{\partial l}{\partial \xi} - \tau m\frac{\partial l}{\partial \tau} -$$

$$-\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(\frac{\xi}{2} - u\sqrt{\tau}\right)\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\gamma-1}{\gamma}\tau\cdot\frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{4}{3}\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 = 0,$$

где $\gamma = c_p/c_v$.

Начальные и граничные условия

$$u(0,\ \tau) = 0,\ u(0,\ \ ) = 0,\ l(0,\ \tau) = T_1/T_0,$$
$$l(\infty,\ 0) = 1,\ p(\ \ ,\ 0) = 1,\ m(\infty,\ 0) = 1 \tag{6}$$

Для построения асимптотических решений системы уравнений (5), при $\tau \to 0$, $\xi > \xi_0 \gg 1$ искомые функции представим в виде:

$$l(\xi,\ \tau) = 1 + \bar{l}(\xi,\ \tau),$$
$$p(\xi,\ \tau) = 1 + \bar{p}(\xi,\ \tau),$$
$$m(\xi,\ \tau) = 1 + \bar{m}(\xi,\ \tau), \tag{7}$$
$$u(\xi,\ \tau) = \bar{u}(\xi,\ \tau).$$

Подставляя обозначения (7) в систему уравнений (5), легко обнаружить, что величины $\bar{T}(\xi, \tau)$, $\bar{p}(\xi, \tau)$, $m(\xi, \tau)$, $\sqrt{\tau}\,\bar{u}(\xi, \tau)$ имеют одинаковый порядок по τ, при $\tau \to 0$, $\xi > \xi_0$.

Ищем асимптотическое решение системы (5) в виде ряда

$$
\begin{aligned}
T(\xi, \tau) &= 1 + T_1(\xi) + T_2(\xi)\cdot\tau + \cdots \\
p(\xi, \tau) &= 1 + p_1(\xi) + p_2(\xi)\,\tau + \cdots \\
m(\xi, \tau) &= 1 + m_1(\xi) + m_2(\xi)\,\tau + \cdots \\
u(\xi, \tau) &= u_1(\xi)\,\tau^{1/2} + u_2(\xi)\,\tau^{3/2} + \cdots
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Подставляя эти значения в (5) и собирая члены первой степени, получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$
\begin{gathered}
\frac{4}{3}\frac{d^2u_1}{d\xi^2} + \frac{\xi}{2}\cdot\frac{du_1}{d\xi} - \frac{u_1}{2} - \frac{dp_1}{d\xi} = 0, \\
\frac{dm_1}{d\xi} = 0, \; p_1 = m_1 + T_1, \\
\frac{k}{c_p \nu_0 \rho_0}\frac{d^2T_1}{d\xi^2} + \frac{\xi}{2}\frac{dT_1}{d\xi} - \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\xi}{2}\frac{dp_1}{d\xi} = 0
\end{gathered}
\tag{9}
$$

с начальными условиями

$$
u_1(\infty) = T_1(\infty) = m_1(\infty) = p_1(\infty) = 0. \tag{10}
$$

Решение системы (9) с начальными условиями (10) и с учетом, что $\xi \gg 1$, имеет вид

$$
u_1(\xi) = m_1(\xi) = 0, \quad p_1(\xi) = T_1(\xi) = C_1 \,\mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{c_v \nu_0 \rho_0}{4k}}\cdot\xi\right), \tag{11}
$$

$$
\mathrm{Erfc}(x) = \int_x^\infty e^{-s^2}\,ds,
$$

где C_1 — неизвестное постоянное.

С учетом выражений (3), (4), (8) и (11) асимптотическое решение системы (1), при $t \to 0$, $x > x_0$ запишется в виде:

$$
\begin{gathered}
T(x, t) = T_0 + C_1\cdot T_0\cdot \mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{c_v \nu_0 \rho_0}{4k}\cdot\frac{x^2}{t}}\right), \\
P(x, t) = P_0 + C_1\cdot P_0\cdot \mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{c_v \nu_0 \rho_0}{4k}\cdot\frac{x^2}{t}}\right), \\
U(x, t) = 0, \quad \rho(x, t) = \rho_0.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

Из полученных решений видно, что в области t близко к нулю, при $x > x_0$ изменение температуры приводит лишь к изменению давления. Частицы газа не успевают переместиться. Плотность не изменяется (теплообмен при постоянной плотности).

В этой области теплообмен совершается так же, как и в твердом теле. Процесс теплопередачи, описываемый полученной формулой (12), обладает тем свойством, что влияние всякого теплового возмущения распространяется мгновенно на все полупространство, т. е. из стены $x = 0$ тепло распространяется так, что уже в следующий момент времени температура газа обращается в начальное значение T_0, лишь асимптотически на бесконечности.

Для построения асимптотических решений системы (5), при $\tau \to \infty$, $\xi < \xi_1 < \infty$ искомые функции представим в виде

$$l(\xi, \tau) = \frac{T_1}{T_0} + \tilde{l}(\xi, \tau), \quad p(\xi, \tau) = \frac{P_1}{P_0} + \tilde{p}(\xi, \tau), \tag{13}$$

$$m(\xi, \tau) = \frac{\rho_1}{\rho_0} + \tilde{m}(\xi, \tau), \quad u(\xi, \tau) = \tilde{u}(\xi, \tau).$$

где P_1 и ρ_1 значения давления и плотности газа при $t = \infty$. Подставляя обозначения (13) в систему уравнений (5), легко обнаружить, что

величины $\tilde{l}(\xi, \tau)$, $\dfrac{\tilde{p}(\xi, \tau)}{\tau}$, $\tilde{m}(\xi, \tau)$ и $\dfrac{\tilde{u}(\xi, \tau)}{\sqrt{\tau}}$ имеют одинаковый

порядок по τ, при $\tau \to \infty$, $\xi < \xi_1$.

Ищем асимптотическое решение системы (5) в виде ряда

$$\begin{aligned} l(\xi, \tau) &= \frac{T_1}{T_0} + l_1(\xi) + l_2(\xi)\tau + \cdots, \\ m(\xi, \tau) &= \frac{\rho_1}{\rho_0} + m_1(\xi) + m_2(\xi)\tau + \cdots, \\ p(\xi, \tau) &= \frac{P_1}{P_0} + p_1(\xi)\tau^{-1} + p_2(\xi)\tau^{-2} + \cdots, \\ u(\xi, \tau) &= u_1(\xi)\tau^{-1/2} + u_2(\xi)\tau^{-3/2} + \cdots. \end{aligned} \tag{14}$$

Подставляя эти значения в (5) и собирая члены первой степени, получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{8}{3}\frac{d^2u_1}{d\xi^2} + \xi\frac{du_1}{d\xi} + u_1 - \frac{2\rho_0}{\rho_1}\frac{dp_1}{d\xi} = 0,$$

$$\frac{2\rho_1}{\rho_0}\frac{du_1}{d\xi} - \xi\frac{dm_1}{d\xi} = 0, \quad \frac{\rho_1}{\rho_0} l_1(\xi) + \frac{T_1}{T_0} m_1(\xi) = 0, \tag{15}$$

$$\frac{2k}{c_p \nu_0 \rho_1}\frac{d^2 l_1}{d\xi^2} + \xi\frac{dl_1}{d\xi} = 0$$

граничные условия

$$u_1(0) = l_1(0) = m_1(0) = p_1(0) = 0. \tag{16}$$

Решение системы (15), с учетом условия (16), запишется в виде

$$l_1(\xi) = C_2 \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{c_p \nu_0 \rho_1}{4k}}\cdot\xi\right),$$

$$m_1(\xi) = -C_2\frac{\rho_1 T_0}{\rho_0 T_1}\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{c_p \nu_0 \rho_1}{4k}}\cdot\xi\right),$$

$$u_1(\xi) = C_2\frac{T_0}{2T_1}\sqrt{\frac{k}{c_p \nu_0 \rho_1}}\exp\left(-\frac{c_p \nu_0 \rho_1}{4k}\xi^2\right), \tag{17}$$

$$p_1(\xi) = C_2\frac{\rho_1 T_0}{8\rho_0 T_1}\sqrt{\frac{\pi\cdot k}{c_p \nu_0 \rho_1}}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{c_p \nu_0 \rho_1}{k}\right)\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\rho_1 c_p \nu_0}{4k}}\cdot\xi\right),$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x e^{-\eta^2}d\eta,$$

где C_2 — неизвестное постоянное.

С учетом выражений (3), (4), (14), (17), асимптотическое решение системы (1), при $t\to\infty$, $x < x_1$ запишется в виде

$$U(x, t) = \frac{C_2 T_0}{2T_1}\sqrt{\frac{P_0 k}{\rho_0\rho_1 c_p \nu_0 t}}\exp\left(-\frac{c_p\rho_1 x^2}{4kt}\right),$$

$$T(x, t) = T_1 + C_2 T_0 \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{c_p\rho_1 x^2}{4kt}}\right), \tag{18}$$

$$P(x, t) = P_1 + C_2\frac{T_0 P_0 \rho_1}{T_1 \rho_0 t}\sqrt{\frac{\pi\cdot k}{c_p \nu_0 \rho_1}}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{c_p \nu_0 \rho_1}{k}\right)\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\rho_1 c_p x^2}{4kt}}\right),$$

$$\rho(x, t) = \rho_1 - \frac{C_2\rho_1 T_0}{T_1}\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{c_p\rho_1 x^2}{4kt}}\right).$$

Полученные формулы (18) показывают, что при $t\to\infty$, $x < x_1$ изменение температуры приводит к изменению плотности. Изменение давления по сравнению с плотностью имеет порядок малости $1/t$, а скорость частиц — $1/\sqrt{t}$. Получается теплообмен при постоянном давлении. Движение частиц газа останавливается и теплообмен происходит так, как в твердом теле.

Полученные асимптотические решения (12) и (18) можно использовать при численном решении поставленной задачи для уменьшения области интегрирования. Неизвестные постоянные C_1, C_2, ρ_1 и P_1 нужно определить при численном решении задачи.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ա. Բ. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

Գազերում ջերմության ոչ ստացիոնար հոսքի խնդրի մի քանի ասիմպտոտիկ լուծումներ

Կիսատարածությունը լցված է իրական, ջերմահաղորդող գազով, որի ճնշումը, ջերմաստիճանը և խտությունը հաստատուն է։ Գազի սահմանագծում ջերմաստիճանը հանկարծակի փոփոխվում է և հետագայում պահպանվում է հաստատուն։ Գազի սեղմելիության պատճառով, ջերմաստիճանը, որը հաղորդվում է գազով ոչ միայն փոփոխում է գազի ջերմաստիճանը, այլև ստեղծում է գազի շարժում սահմանագծին ուղղահայաց ուղղությամբ։

Այդ երևույթների նկարագրությունը ստացվում է Նավյե-Ստոկսի հավասարումներից՝ ջերմահաղորդող, մածուցիկ, սեղմելի հեղուկի համար։ Այդ հավասարումներում անցնելով անչափելի փոփոխականների և գնահատելով որոնելի մեծությունները, կառուցված են ասիմպտոտիկ լուծումներ փոքր և մեծ ժամանակների համար։

Փոքր ժամանակների համար ջերմաստիճանի փոփոխումից փոփոխվում է միայն ճնշումը, գազի մասնիկները չեն հասցնում տեղափոխվել։ Ջերմափոխանցումը կատարվում է այնպես, ինչպես պինդ մարմնում։

Բարձր ջերմաստիճանների դեպքում ջերմության փոփոխումը փոփոխում է խտությունը։ Ստացվում է ջերմափոխանակում հաստատուն ճնշման դեպքում։

Գազի մասնիկները կանգնում են, ջերմափոխանցումը կատարվում է այնպես, ինչպես պինդ մարմնում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. Мизес*, Математическая теория течений сжимаемой жидкости, М., 1961. [2] *Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон*. Курс современного анализа, ч. II. М., 1963.