ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LIII 1971 3

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М. А. Александрян

Вдавливание двух штампов в полуплоскость с круговым отверстием

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 3/V 1971)

Рассматривается задача о вдавливании двух симметрично расположенных штампов в упругую полуплоскость с круговым отверстием под действием нормальных сил величины P. Трение между штампами и полуплоскостью отсутствует. Внешняя граница полуплоскости вне штампов, а также контур отверстия для простоты считается свободным от внешних нагрузок.

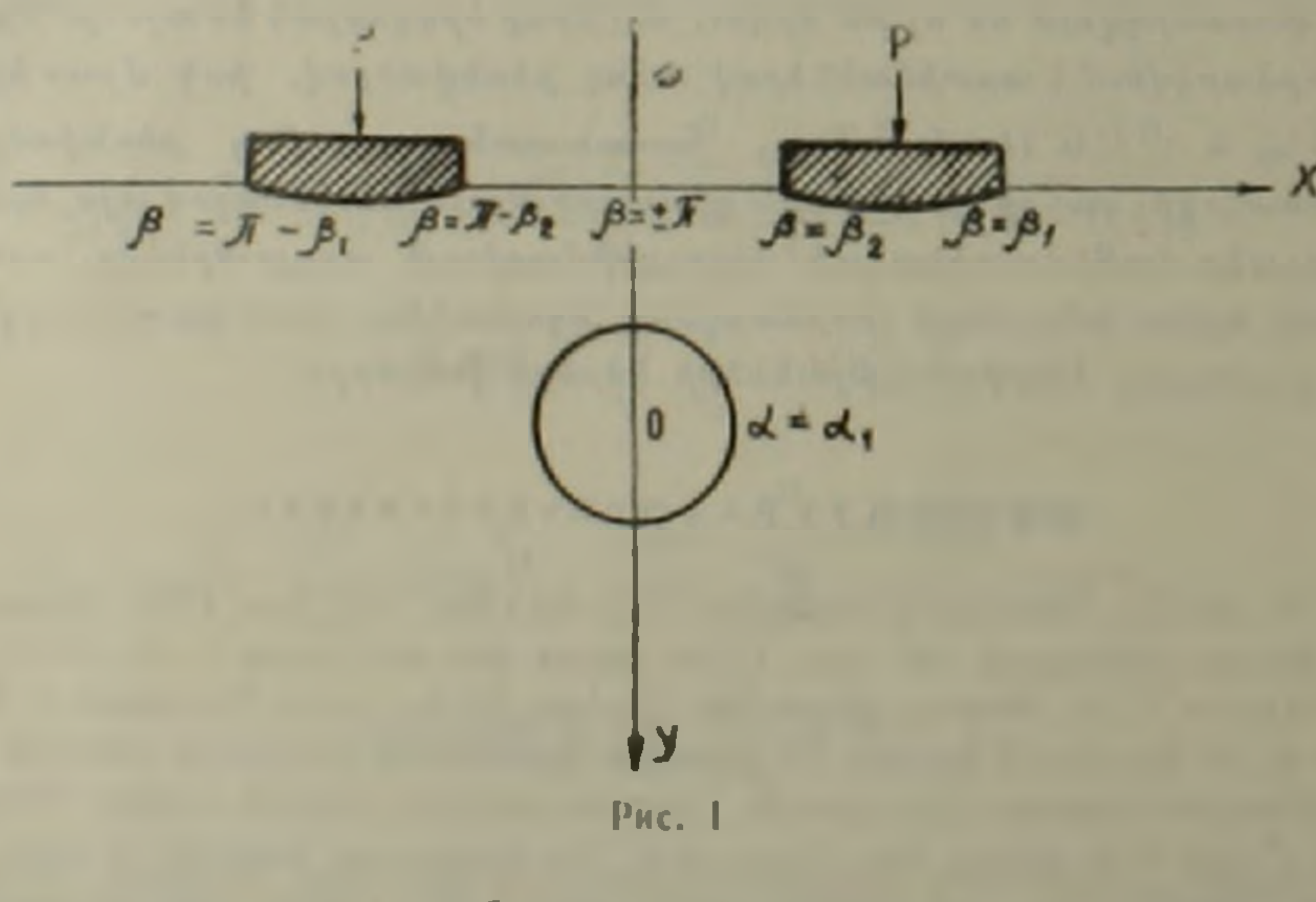

Рис. 1

Задача решается в биполярной системе координат методом Фурье. Известно ([1]), что плоская задача теории упругости в биполярных координатах сводится к решению дифференциального уравнения —

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + 2\,\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial\beta^4} - 2\,\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + 2\,\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + 1\right](g\Phi) = 0, \qquad (1)$$

где $ag = \operatorname{ch}\alpha - \cos\beta$ — масштаб преобразования, a — параметр, а $\Phi(\alpha, \beta)$ — функция напряжения.

В силу симметрии задачу решаем для половины основной области ($\beta > 0$), требуя при этом выполнение условий симметрии:

$$\tau_{\alpha\beta} = v = 0 \text{ при } \beta = 0, \pi$$

Для рассматриваемой задачи граничные условия имеют вид

$$\begin{gathered}\tau_{\alpha\beta}(\alpha_1, \beta) = \tau_{\alpha\beta}(0, \beta) = \sigma_\alpha(\alpha_1, \beta) = 0, \ (0 < \beta < \pi)\\ u(0, \beta) = f_1(\beta), \quad (\beta_1 < \beta < \beta_2)\\ \sigma_\alpha(0, \beta) = f_2(\beta), \quad (0 < \beta < \beta_1;\ \beta_2 < \beta < \pi)\end{gathered} \tag{3}$$

Решение уравнения (1) ищем в виде ([1])

$$g\Phi(\alpha, \beta) = A\,\mathrm{sh}\,\alpha + B\,\mathrm{ch}\,\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(\alpha)\cos k\beta, \tag{4}$$

где функции $\psi_k(\alpha)$ определяются соотношениями:

$$\begin{gathered}\psi_k(\alpha) = E_k\,\mathrm{sh}\,k(\alpha_1 - \alpha)\,\mathrm{sh}(\alpha_1 - \alpha) + G_k\,\mathrm{sh}\,k(\alpha_1 - \alpha)\,\mathrm{sh}\,\alpha +\\ + F_k\,\mathrm{sh}\,k\alpha\,\mathrm{sh}(\alpha_1 - \alpha) + H_k\,\mathrm{sh}\,k\alpha\,\mathrm{sh}\,\alpha, \quad k \geqslant 2\\ \psi_1(\alpha) = E_1\,\mathrm{sh}\,2\alpha + G_1\,\mathrm{ch}\,2\alpha + F_1\alpha + H_1.\end{gathered} \tag{5}$$

Удовлетворяя граничным условиям, получаем ряд соотношений для определения коэффициентов Фурье. Рассматривая эти соотношения как интегральные уравнения Вольтера и решая их ([2]), получаем следующие тройные тригонометрические ряды-уравнения по косинусам:

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{\infty} Y_k \cos k\beta = C\cos\beta + F(\beta), \quad (0 < \beta < \beta_1)\\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{k}(1 - M_k)\cos k\beta = Y_0\cos\beta + Y\sin\beta + F_1(\beta), \quad (\beta_1 < \beta < \beta_2)\\ \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \cos k\beta = F(\beta), \quad (\beta_2 < \beta < \pi)\end{gathered} \tag{6}$$

где $F(\beta)$ и $F_1(\beta)$ выражаются через граничные функции $f_i(\beta)$ ($i = 1, 2$) соотношениями

$$F(\beta) = -\frac{f_2(\beta)}{1 - \cos\beta} - \int_0^{\beta} \frac{\sin x\cos\beta + (1 - \cos x)\sin\beta}{(1 - \cos x)^2} f_2(x)\,dx,$$

$$(0 < \beta < \beta_1)$$

$$F(\beta) = -\frac{f_2(\beta)}{1-\cos\beta} + \int_\beta^\pi \frac{\sin x\cos\beta + (1-\cos x)\sin\beta}{(1-\cos x)^2} f_2(x)\,dx,$$

$$(\beta_2 < \beta < \pi)$$

$$F_1(\beta) = -\frac{2\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\left[\sin\beta\int_{\beta_1}^{\beta}\frac{f_1(x)\,dx}{1-\cos x} + f_1(\beta)\right], \quad (\beta_1 < \beta < \beta_2)$$

а остальные постоянные определяются по формулам:

$$k^2\psi_k(0) = Y_k, \quad (k = 2, 3\cdots\cdots)$$

$$(k^2-1)\int^0 \psi_k(\alpha)\,d\alpha = -\frac{2}{k}(1-M_k)Y_k, \quad (k=2, 3\cdots\cdots) \tag{8}$$

$$M_k = \frac{-2k^2\,\mathrm{sh}^2\,\alpha_1 - k\,\mathrm{sh}\,\alpha_1 - 1 + e^{-2k\alpha_1}}{\mathrm{sh}\,2k\alpha_1 + k\,\mathrm{sh}\,2\alpha_1 - 2k^2\,\mathrm{sh}^2\,\alpha_1 - k\,\mathrm{sh}\,\alpha_1 - 1 + e^{-2k\alpha_1}}.$$

Тройные уравнения типа (6) были рассмотрены в работе ([3]), где система сводится к интегральному уравнению первого рода, а последнее решается методом М. Г. Крейна. Здесь мы нашли удобным решить тройные уравнения (6) применяя результаты, полученные Л. И. Чибриковой ([4]). После определения Y_k старые неизвестные будем определять по формулам:

$$G_k = -\frac{k^2-1}{k^2\Delta k}Y_k(1-M_k)\,\mathrm{sh}\,k\alpha_1; \qquad F_k = -\frac{k^2-1}{k\Delta k}Y_k(1-M_k)\,\mathrm{sh}\,\alpha_1$$

$$E_k = H_k = 0; \quad \Delta k = \mathrm{sh}\,k\alpha_1\,\mathrm{ch}\,k\alpha_1 + k\,\mathrm{sh}\,\alpha_1\,\mathrm{ch}\,\alpha_1$$

$$\psi_1(0) - C_1 = Y_1; \quad Y_0 = Y_1 - \frac{\mu A}{\lambda+2\mu};$$

$$Y = \frac{(Y_1 - Y_0)\sin\beta_1 - \sum_{k=2}^{\infty}(1-M_k)k^{-1}Y_k\sin k\beta_1}{1-\cos\beta_1}.$$

Для решения тройных уравнений (6) введем обозначение

$$h(\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k\cos k\beta, \quad (\beta_1 < \beta < \beta_2) \tag{10}$$

тогда из (6) и (10) получим

$$\frac{\pi}{2}Y_k = \int_0^{\beta_1}[F(x) + C\cos x]\cos kx\,dx + \int_{\beta_1}^{\pi}F(x)\cos kx\,dx +$$

$$+\int_{\beta_1}^{\beta_2} h(x)\cos kx\,dx. \tag{11}$$

Подставляя значение Y_1 во второе уравнение (6) для определения функции $h(x)$ получаем следующее интегральное уравнение:

$$\frac{1}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2} h(x)\ln\frac{1}{4\sin\frac{x+\beta}{2}\sin\frac{|x-\beta|}{2}} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} h(x)\sum_{k=1}^{\infty} M_k\frac{\cos kx\cos k\beta}{k}\,dx +$$

$$+F_2(\beta), \quad (\beta_1<\beta<\beta_2) \tag{12}$$

где $F_2(\beta)$ известная функция

$$F_2(\beta)=\frac{\pi}{2}\left[Y_0\cos\beta+Y\sin\beta+F_1(\beta)\right]-\int_0^{\beta_1} F(x)\,s_0(\beta,x)\,dx-$$

$$-\int_{\beta_2}^{\pi} F(x)\,s_0(\beta,x)\,dx-\int_0^{\beta_2}\cos x s_0(\beta,x)\,dx. \tag{13}$$

Принимая $h(-x)=h(x)$ уравнение (12) можно представить в виде:

$$\int_L h(x)\operatorname{ctg}\frac{x-\beta}{2}\,dx=4F_2'(\beta)-\int_L h(x)\,s_3(\beta,x)\,dx, \tag{14}$$

где L совокупность отрезков $[\pi-\beta_2,\ \pi-\beta_1]$ и $[\beta_1,\ \beta_2]$, а $S_3(\beta,x)$ определяется формулой:

$$S_3(\beta,x)=2\sum_{k=1}^{\infty} M_k\cos kx\sin k\beta. \tag{15}$$

Известно ([4]), что решение интегрального уравнения

$$\int_L \varphi(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau-x}{2}\,d\tau=C(x) \tag{16}$$

имеет вид

$$\varphi(x)=-\frac{X(x)}{4\pi^2}\int_L \frac{C(\tau)}{X(\tau)}\operatorname{ctg}\frac{\tau-x}{2}\,d\tau-\frac{\beta_1}{\pi}X(x)\sin x, \tag{17}$$

где

$$X(z)=e^{\Gamma(z)}\prod_{k=1}^{4}\left(\sin\frac{z-c_k}{2}\right)^{\alpha_k}=$$

$$=\left(\sin\frac{a+z}{2}\sin\frac{b+z}{2}\sin\frac{b-z}{2}\sin\frac{z-a}{2}\right)^{-1/2},$$

$$F(z)=\frac{1}{2}\ln\frac{\sin\frac{a+z}{2}\sin\frac{b-z}{2}}{\sin\frac{b+z}{2}\sin\frac{a-z}{2}}\pm\frac{\pi i}{2},\quad \chi=\sum_{k=1}^{4}\chi_k=2$$

Пользуясь решением (17) сингулярное интегральное уравнение (14) можно представить в виде

$$h(x)=-\frac{X(x)}{4\pi^2}\int_L\left[4F_2(\beta)-\int_L h(z)S_3(\beta,z)\,dz\right]\operatorname{ctg}\frac{\beta-x}{2}\frac{d\beta}{X(\beta)}+$$

$$+\frac{B_1}{\pi}X(x)\sin x. \tag{18}$$

Здесь коэффициент B_1 определяется через силу P, приложенную на штамп.

Введя новую (ограниченную) неизвестную функцию $H(x)$

$$H(x)=h(x)X^{-1}(x)$$

интегральное уравнение можно представить в окончательном виде

$$H(x)=\int_L K(x,z)H(z)\,dz+g(x),\quad (x\in L) \tag{19}$$

где введены обозначения:

$$K(x,z)=\sum_{k=1}^{\infty}M_k X(z)\cos kz\int_L\frac{\sin k\beta}{X(\beta)}\operatorname{ctg}\frac{\beta-x}{2}\,d\beta, \tag{20}$$

$$g(x)=\frac{B_1}{\pi}\sin x-\frac{1}{\pi^2}\int_L\frac{F_2(\beta)}{X(\beta)}\operatorname{ctg}\frac{\beta-x}{2}\,d\beta.$$

Нетрудно видеть, что ядро (20) является непрерывной функцией своих аргументов, поэтому уравнение (19) будет уравнением Фредгольма второго рода. Так как $M_k=O(k^2e^{-2kh})$, то заменяя ядро вырожденным, с любой наперед заданной точностью (ограничиваясь небольшим числом первых членов) можно элементарным путем получить эффективное решение уравнения (19). Пользуясь тем, что ядро $K(x,z)$ имеет вид (20), интегральное уравнение (19) можно привести также к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, сумма коэффициентов которой в силу (8) будет стремиться к нулю, т. е. эта система будет квази—вполне регулярной.

После определения функции $h(x)$ неизвестное контактное напряжение $\sigma_\theta(0, \beta)$ будем определять по формуле:

$$a\sigma_\theta(0, \beta) = -(1-\cos\beta)\,h(\beta) + \sin\beta\int_{\beta_1}^{\beta} h(y)\,dy -$$

$$-\int_0^{\beta}(\beta-\xi)\,h(\xi)\,d\xi + B(\beta-\beta_1-\sin\beta) - A, \quad (\beta_1<\beta<\beta_2). \qquad (21)$$

где постоянные A и B выражаются через коэффициенты Y_k следующим образом:

$$A = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos k\beta}{k^2}\,Y_k; \quad B = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\beta}{k}\,Y_k.$$

Отметим, что эти постоянные связаны с силой P и моментом M, действующими на штамп или же с величинами осадки δ и угла поворота γ штампов. Связь между P, M, δ, γ можно получить из уравнений равновесия штампов, используя при этом соотношение (21).

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Մ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ

Երկու շտամպների ճնշումը կլոր անցքով կիսահարթության վրա

Դիտարկվում է երկու սիմետրիկ դասավորված շտամպների ճնշման խնդիրը՝ շրջանային խոռոչով կիսահարթության վրա։ Պարզության համար ենթադրված է, որ կիսահարթության եզրը շտամպից դուրս, ինչպես նաև խոռոչի եզրը, ազատ են արտաքին ուժերից։ Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի մեթոդով, բիպոլյար կոորդինատային սիստեմում։ Խնդիրը բերվում է «եռակի» շարք հավասարումների լուծմանը՝ ըստ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների։

Օգտվելով Լ. Ի. Չիբրիկովայի ստացած արդյունքներից (4) «եռակի» շարք հավասարումները բերվում են Ֆրեդհոլմի 2 սեռի ռեգուլյար հավասարման։ Խնդրի լուծումը կարելի է բերել նաև քվազի—լիովին ռեգուլյար գծային անվերջ հավասարումների սիստեմի։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *Я. С. Уфлянд*. Биполярные координаты в теории упругости. Госиздат, М.—Л., 1950. 2 *М. А. Александрян*. ДАН Арм. ССР, т. XXXXVI, № 5 (1968). 3 *А. А. Баблоян, С. Н. Мхитарян*. «Известия АН Арм. ССР», Механика, т. XXII, № 6 (1969). 4 *Л. И. Чибрикова*. О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений. Ученые записки Казанского гос. университета им. В. И. Ульянова—Ленина, т. 122, кн. 3, 1962.