

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ ПРОCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՎԱԴԵՄԻԱԿԱՆ ՏԵԼԵԿԱԳԻՐ

ISSN 0002-3051



Համար

Том 79 №1-2 2026

Volume

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Նվիրվում է ակադեմիկոս Գ.Ե. Բաղդասարյանի 90-ամյակին

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

МЕХАНИКА

Посвящается 90-летию академика Г.Е. Багдасаряна

PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

MECHANICS

Devoted to the 90th anniversary of academician G.Y. Baghdasaryan

Издаётся с января 1966 года

Հատոր

Том

Volume

79# №1-2 2026



ՀՀ ԳԱԱ «ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ» ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «ГИТУТЮН» НАН РА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈՒԵՑԻԱ

Հակոբյան Վ.Ն. (գլխավոր խմբագիր), Սահակյան Ա.Վ. (գլխ. խմբագրի տեղակալ), Աղալովյան Լ.Ա., Ավետիսյան Ա.Ս., Ավետիսյան Վ.Վ., Կարապետյան Կ.Ա., Ղազարյան Կ.Բ., Ղուկասյան Ա.Ա., Ջիրավյան Ս.Հ., Սարգսյան Ս.Հ.

ՄԻՋԱԶԳԱՅԻՆ ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԽՈՐՀՈՒՐԴ

Ալտենբախ Հ. (Գերմանիա), Գաչկեիչ Ա.Ռ. (Ուկրաինա), Գորյաչևա Ի.Գ. (Ռուսաստան), Հասանյան Դ.Ջ. (ԱՄՆ), Կապլունով Յու.Դ. (Մեծ Բրիտանիա), Կուդիշ Ի.Ի. (ԱՄՆ), Շավլակաձե Ն.Ն. (Վրաստան), Մարզոկա Պ. (ԱՄՆ), Սեյրանյան Ա.Պ. (Ռուսաստան), Սումբատյան Մ.Ա. (Ռուսաստան), Վատույան Ա.Հ. (Ռուսաստան)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Акопян В.Н. (главный редактор), Саакян А.В. (зам. главного редактора), Аветисян А.С., Аветисян В.В., Агаловян Л.А., Гукасян А.А., Джилавын С.А., Казарян К.Б., Карапетян К.А, Саркисян С.О.

МЕЖДУНАРОДНЫЙ РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Альтенбах Х. (Германия), Асанян Д.Дж. (США), Ватулян А.О. (Россия), Гачкевич А.Р. (Украина), Горячева И.Г. (Россия), Каплунюв Ю.Д. (Великобритания), Кудиш И.И. (США), Шавлакадзе Н.Н. (Грузия), Марзока П. (США), Сейранян А.П. (Россия), Сумбатян М.А. (Россия)

EDITORIAL BOARD

Hakobyan V.N. (editor-in-chief), Sahakyan A.V. (associate editor), Aghalovyan L.A., Avetisyan A.S., Avetisyan V.V., Ghazaryan K.B., Ghukasyan A.A., Jilavyan S.H., Karapetyan K.A., Sarkisyan S. H.

INTERNATIONAL ADVISORY BOARD

Altenbach H. (Germany), Gachkevich A.R. (Ukraine), Goryacheva I.G. (Russia), Hasanyan D.J. (USA), Kaplunov J.D. (UK), Kudish I.I. (USA), Shavlakadze N.N. (Georgia), Marzocca P. (USA), Seyranyan A.P. (Russia), Sumbatyan M.A. (Russia), Vatulyan A.O. (Russia)

Ответственный секретарь: Геворгян Г.З.

E-mail: journalmechanics@mechins.sci.am, www.flib.sci.am/eng/Mech

Հայաստանի	Республика Армения,	24/2, Baghramyan Ave.
Հանրապետություն, Երևան,	Ереван, 0019	Yerevan 0019
0019 Բաղրամյան պող. 24/2,	пр. Баграмяна 24 /2,	Republic of Armenia
Հեռ. 52-48-02	Тел. 52-48-02	Tel. 52-48-02



ГЕВОРГ ЕРВАНДОВИЧ БАГДАСАРЯН
(К 90-летию со дня рождения)

13-го января 2026г. исполнилось 90 лет со дня рождения именитого ученого, внесшего весомый вклад в отечественную и мировую науку, заслуженного деятеля науки РА, академика НАН РА Геворга Ервандовича Багдасаряна.

Г.Е. Багдасарян родился 13 января 1936г. в городе Апаран Армянской ССР.

В 1958 году с отличием окончил отделение механики физико-математического факультета Ереванского государственного университета. В 1964 году стал кандидатом, а в 1977 году – доктором физико-математических наук, с 1979 года – профессор. В 1990г. он был избран членом–корреспондентом НАН РА, в 1994 г.– действительным членом НАН РА.

Трудовую деятельность Г.Е.Багдасарян начал с 1958 года в Институте механики НАН РА, проработав до 1964г. младшим научным сотрудником, в 1964-79гг. был старшим научным сотрудником, в 1979-88гг. – заведующим отделом магнитоупругости, а в 1986-87гг. - директором Института.

Долгие годы академик Г.Е.Багдасарян развивал также плодотворную научно-организационную и педагогическую деятельность. С 1983 года до последних дней он был профессором кафедры математических методов и моделирования факультета прикладной математики и информатики Ереванского государственного университета. В 1988-2001гг. он занимал должность заведующего указанной кафедры, в 1993-1995 гг. был деканом факультета прикладной математики и информатики ЕрГУ. В 1994-1998гг. занимал должность ректора Армянского государственного педагогического института, в 1998-2002гг. – председателя Высшей Аттестационной Комиссии РА. В 2002-2007гг. занимал пост советника ректора ЕрГУ.

С 2006 года до последних дней жизни Г.Е.Багдасарян был главным научным сотрудником Института механики НАН РА.

Опубликованные Г.Е.Багдасаряном многочисленные научные статьи и семь монографий являются существенным вкладом в механику сплошной среды. В этой области, совместно с акад. С.А. Амбарцумяном и проф. М.В. Белубекяном, Г.Е. Багдасарян создал и развил такое актуальное и важное направление механики, какой является теория магнитоупругости, был первым в области исследования устойчивости тонкостенных тел, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа, (флаттер).

Работы Г.Е.Багдасаряна, в которых предложены эффективные аналитические методы и расчетные схемы для исследования нелинейных вынужденных, параметрических и флаттерных колебаний слоистых анизотропных пластин и оболочек, позволившие в вынужденных колебаниях выявить резонансы нового типа, обусловленные учетом нелинейности, в случае докритических скоростей обтекания показать возможность существования стационарных колебаний и нижней критической скорости, получили всеобщее признание.

Построена общая теория описания и исследования взаимосвязанных механических и электромагнитных явлений для тонкостенных проводящих тел (совместно с акад. С.А. Амбарцумяном и проф. М.В. Белубекяном). Были сформулированы постановки новых задач математической физики, приведшие к выявлению ряда новых явлений, обусловленных взаимодействием сплошной среды и физическими полями разного характера, в частности, исключение возможности параметрического резонанса, затухание опасных флаттерных колебаний, существенное уменьшение амплитуды вынужденных колебаний при помощи постоянного магнитного поля, возможность возбуждения резонансных колебаний вынужденного и параметрического типа при помощи нестационарного магнитного поля, оптимальное управление амплитудно-частотной характеристикой нелинейных магнитоупругих колебаний, а также управление поведением вынужденных и параметрических колебаний различного характера посредством постоянного магнитного поля.

Академиком Г.Е. Багдасаряном разработаны теоретические основы исследования распространения магнитоакустических взаимосвязанных волн в пьезоэлектрических, пьезомагнитных, магнитострикционных и ферромагнитных средах, доказана возможность возбуждения сдвиговых поверхностных и щелевых волн нового типа, обусловленных пьезомагнетическим (или магнитострикционным) эффектом, выявлена возможность существования также сопутствующих поверхностных колебаний, что позволяет акустические волны из одной пьезомагнитной среды без механического контакта передать в другую пьезомагнитную среду.

Основными признаками научной деятельности Г.Е. Багдасаряна являются актуальность, новаторство, универсальность и целеустремленность. Его научные статьи, доклады на международных конференциях и обзорные статьи известны во многих научных центрах мира.

Академик Г.Е.Багдасарян был одним из выдающихся личностей армянской школы механики, сумевшим создать собственную научную школу. Велика заслуга Г.Е. Багдасаряна в деле подготовки высококвалифицированных научных кадров. Под его руководством защищены около двадцати кандидатских и докторских диссертаций. Блестящая научно-педагогическая и организационная работа академика Геворга Ервандовича Багдасаряна отмечена многочисленными почетными званиями и наградами, а главное – уважением коллег и благодарностью воспитанных им ученых, которые достойно чтят его память и достойно продолжают дело свое Учителя.

Международный редакционный совет и редколлегия журнала глубоко чтят память великого ученого.

**СОСТАВНОЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО С
ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ ЭЛЕКТРОДОМ НА ПОВЕРХНОСТИ
ПРИСОЕДИНЕНИЯ ДВУХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ**

Агаян К.Л., Закарян В.Г.

Ключевые слова: пьезоэлектрик, поверхностная волна, электрод, потенциал, волновое число.

**Aghayan K.L., Zakaryan V.G.
A Composite Piezoelectric Space Weakened with Semi-Infinite Electrode
on Joint Surface of Two Half-Spaces**

Keywords: piezoelectric, surface wave, electrode, potential, wave number.

A solution to the problem for excitation and propagation of shear surface waves localized along the interphase between two piezoelectric half-spaces is constructed. Formulas for determination of the distribution of surface wave amplitudes, conditioned by the presence of a semi-infinite electrode in the form of a thin metal or adhesive conductive layer are derived.

**Աղայան Կ.Լ., Ջաքարյան Վ.Գ.
Բաղադրյալ պիեզոէլեկտրիկ տարածությունը երկու կիսատարածությունների միացման
մակերևույթում տեղադրված կիսաանվերջ էլեկտրոդի առկայությամբ**

Հիմնաբառեր. պիեզոէլեկտրիկ, մակերևույթային ալիք, էլեկտրոդ, պոտենցիալ, ալիքային թիվ:

Կառուցված է, երկու պիեզոէլեկտրական կիսատարածություններից կազմված տարածությունում նյութերի բաժանման հարթությունում մակերևույթային էլեկտրաառաձգական ալիքների գրգռման և տարածման խնդրի լուծումը Ֆուրյեի ինտեգրալների տեսքով: Ստացվել են վերջավոր տեսքի բանաձևեր, որոնցով որոշվում են մակերևույթային, անդրադարձվող և անցնող ալիքների ամպլիտուդների բաշխումները, պայմանավորված մետաղական կամ առանձին բարակ սալի տեսքով կիսաանվերջ էլեկտրահաղորդիչ էլեկտրոդով:

Построено решение задачи возбуждения и распространения сдвиговых поверхностных волн, локализованных по границе раздела двух пьезоэлектрических полупространств. Получены формулы в конечном виде, определяющие распределение амплитуд поверхностных волн, обусловленное наличием полубесконечного электрода в виде тонкого металлического или клеевого электропроводящего слоя.

1. Введение.

Вопросу возбуждения и распространения сдвиговых поверхностных волн по граничной поверхности неоднородных пьезоэлектрических конструкций, посвящены многочисленные работы. Это, с одной стороны, связано с более растущим спросом на современные электромеханические структуры, различные составные электропроводящие элементы и детали, с другой стороны, - с чисто теоретическими вопросами о возможности устранения или возбуждения поверхностной волны на контактных поверхностях составных электромеханических конструкций. В этих работах, в довольно общих постановках, исследованы закономерности и особенности распро-

странения и дифракции волновых процессов в однородных и составных диэлектрических средах, обладающих свойством пьезоэффекта или взаимодействия упругих и электрических полей. В этих исследованиях особое место занимают работы, в которых рассматриваются задачи распространения и дифракции волновых полей в составных пьезоэлектрических конструкциях. Пьезоэффект и конструктивные (механические или электрические) неоднородности могут существенно влиять на распределение общего волнового поля в кусочно-однородных деформированных твердых телах.

Не вникая в подробности, коротко остановимся на некоторых работах, тесно связанных с рассматриваемой здесь задачей. В первую очередь, отметим книгу [1], в которой впервые было обнаружено существование поверхностных волн в пьезоэлектрическом полупространстве, а также [2-4], посвященных исследованию и разработке основных вопросов, возникающих в указанной области.

В работе [5] получены условия существования и некоторые особенности распространения электроупругих поверхностных волн на границе двух пьезоэлектрических полупространств, склеенных тонким электропроводящим слоем. В работах [6-15] изучаются волновые процессы, связанные, в основном, с появлением и распространением поверхностных сдвиговых волн в пьезоупругих средах. Исследуются контактные и смешанные задачи для составных пьезоэлектрических пространств, полупространств и слоев, содержащих концентраторы напряжений в виде трещин, включений и электродов разных длин. Предполагается, что на разделяющих поверхностях осуществляются различные смешанные механические и электрические условия, обусловленные наличием на контактных поверхностях тонких металлических слоев, трещин, заземленных электродов бесконечной, полубесконечной или конечной длины.

2. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений.

Рассмотрим, обладающее пьезоэффектом, составное упругое пространство в декартовой системе координат $Oxyz$. Пространство состоит из двух, соединенных между собой, пьезоэлектрических полупространств, занимающих соответственно области $\Omega_1 (|x| < \infty, y > 0, |z| < \infty)$ и $\Omega_2 (|x| < \infty, y < 0, |z| < \infty)$. Главная ось этих пьезоэлектрических полупространств (кристалл *бтт* гексагональной симметрии) параллельна оси Oz . На контактной плоскости $y = 0$, отделяющей полупространства, приклеен полубесконечный электрод в виде тонкого металлического или клевого электропроводящего слоя. Предполагается, что электрод невесомый, абсолютно гибкий и идеально проводящий, так что механическим взаимодействием электрода с полупространствами пренебрегается.

Введем некоторые обозначения, связанные с электромеханическими параметрами пьезоэлектрических полупространств, отличающиеся индексом $j = 1, 2$. $k_j = \omega/c_j$

– волновое число, $c_j = \sqrt{\mu_j(1 + \chi_j)}/\rho_j$ – фазовая скорость распространения сдвиговой упругой волны, μ_j, ρ_j – модуль сдвига и плотность, $\chi_j = e_j^2/\mu_j \varepsilon_j$ – коэффициент электромеханической связи, $e_j = e_{15}^{(j)}$, $\varepsilon_j = \varepsilon_{11}^{(j)}$ – диэлектрические и пьезоэлектрические постоянные соответствующих полупространств [1,5].

В пьезоэлектрическом полупространстве Ω_1 распространяется заданная сдвиговая плоская упругая волна антиплоской деформации (SH - волна) с сопутствующим потенциалом электрического поля, падающая из бесконечности под углом β ($0 < \beta < \pi/2$) к плоскости xz и поляризованная вдоль оси симметрии $w_\infty(x, y)e^{-i\omega t}$ и $\varphi_\infty(x, y)e^{-i\omega t}$ где:

$$w_\infty(x, y) = A_0 e^{ipx - iqy}, \quad \bar{\varphi}_\infty(x, y) = (e_1/\varepsilon_1) w_\infty(x, y), \quad p = k_1 \cos \beta; \quad q = k_1 \sin \beta \quad (2.1)$$

амплитуды упругого перемещения и электрического потенциала падающих волн.

В (2.1) A_0 – постоянная, ω – частота колебаний падающей волны, t – время.

Рассматривается задача определения, обусловленного наличием в контактной зоне полубесконечного электрода, дифрагированного электроупругого волнового поля в составном пространстве, состоящем из Ω_1 и Ω_2 , при дифракции сдвиговой электроупругой плоской волны (2.1).

При этом, основное внимание будет уделено на поверхностные волны, возникающие на контактной поверхности.

Для определения амплитуд упругого перемещения $w_j(x, y)$ и электрического потенциала $\varphi_j(x, y)$ в соответствующих полупространствах имеем уравнения [1,2]:

$$\begin{aligned} \Delta w_j(x, y) + k_j^2 w_j(x, y) &= 0, & (x, y) \in \Omega_j \\ \Delta \varphi_j(x, y) + k_j^2 e_j/\varepsilon_j w_j(x, y) &= 0, & (x, y) \in \Omega_j \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$e_j = e_{15}^{(j)}, \quad \varepsilon_j = \varepsilon_{11}^{(j)}, \quad k_j = \omega/c_j, \quad c_j = \sqrt{\mu_j(1 + \chi_j)}/\rho_j, \quad \chi_j = e_j^2/\mu_j \varepsilon_j \quad (2.3)$$

По постановке задачи решения уравнений (2.2) должны удовлетворять следующим контактными – граничным условиям на плоскости $y = 0$ (непрерывность электроупругого поля):

$$\begin{aligned} w_1(x, +0) &= w_2(x, -0), & |x| < \infty \\ \sigma_{yz}^{(1)}(x, +0) &= \sigma_{yz}^{(2)}(x, -0), & |x| < \infty \\ \varphi_1(x, +0) - \varphi_2(x, -0) &= f_-(x), & |x| < \infty \\ D_{y1}(x, +0) - D_{y2}(x, -0) &= g_+(x), & |x| < \infty \end{aligned} \quad (2.4)$$

Выше, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – оператор Лапласа; $f_-(x)$ – значение электрического потенциала при $x < 0$, при $x > 0$ $f_-(x) = 0$; $g_+(x)$ – неизвестный скачок электрической индукции при $x > 0$, при $x < 0$ $g_+(x) = 0$,

$$D_y(x, y) = e_{15} \frac{\partial w}{\partial y} + \varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (2.5)$$

на полубесконечном электроде $(0, \infty)$.

Решение задачи должно удовлетворять еще и условиям уходящей волны [16].

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению краевой задачи (2.2) – (2.4).

3. Решение задачи (2.2) – (2.4) и вывод определяющего уравнения.

Введем функции

$$W_1(x, y) = w_1(x, y) - w_\infty(x, y); \quad \Phi_1(x, y) = \varphi_1(x, y) - \varphi_\infty(x, y) \quad (3.1)$$

где $w_\infty(x, y)$ и $\varphi_\infty(x, y)$ даются формулами в (2.1).

Подставим (3.1) в (2.2) и применим преобразование Фурье (ПФ) по переменной x к полученным уравнениям и к граничным условиям (2.4). В итоге придем к следующей краевой задаче

$$\frac{d^2 \bar{W}_1}{dy^2} - \gamma_1^2 \bar{W}_1(\sigma, y) = 0; \quad \frac{d^2 \bar{\Phi}_1}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\Phi}_1(\sigma, y) + \frac{e_1}{\varepsilon_1} k^2 \bar{W}_1(\sigma, y) = 0, \quad y > 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{d^2 \bar{W}_2}{dy^2} - \gamma_2^2 \bar{W}_2(\sigma, y) = 0; \quad \frac{d^2 \bar{\Phi}_2}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\Phi}_2(\sigma, y) + k_2^2 \frac{e_2}{\varepsilon_2} \bar{w}_2(\sigma, y) = 0, \quad y < 0,$$

$$\bar{W}_1(\sigma, +0) + \bar{w}_\infty(\sigma, +0) = \bar{w}_2(\sigma, -0) \quad (3.3)$$

$$\bar{\Phi}_1(\sigma, +0) + \bar{\varphi}_\infty(\sigma, +0) = \bar{\varphi}_2(\sigma, -0) = 0 \quad (3.4)$$

$$\left(e_1 \frac{d\bar{w}_1}{dy} - \varepsilon_1 \frac{d\bar{\varphi}_1}{dy} \right) \Big|_{y=+0} - \left(e_2 \frac{d\bar{w}_2}{dy} - \varepsilon_2 \frac{d\bar{\varphi}_2}{dy} \right) \Big|_{y=-0} = \bar{G}_+(\sigma) \quad (3.5)$$

$$\left[\mu_1 \frac{d\bar{w}_1}{dy} + e_1 \frac{d\bar{\varphi}_1}{dy} \right] \Big|_{y=+0} = \left[\mu_2 \frac{d\bar{w}_2}{dy} + e_2 \frac{d\bar{\varphi}_2}{dy} \right] \Big|_{y=-0} \quad (3.6)$$

В (3.1) – (3.6)

$$\gamma_j(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_j^2}, \quad \bar{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx$$

$$\bar{w}_\infty(\sigma, y) = 2\pi A_0 e^{iqy} \delta(\sigma + p); \quad \bar{\varphi}_\infty(\sigma, y) = 2\pi A_0 (e_1/\varepsilon_1) e^{iqy} \delta(\sigma + p),$$

а $\delta(\sigma)$ - дельта функция Дирака.

Общее решение системы (3.2), представляющее уходящие волны, ищем в виде:

$$\bar{w}_1(\sigma, y) = A_1 e^{-\gamma_1 y} + \bar{w}_\infty(\sigma, y), \quad y > 0 \quad (3.7)$$

$$\bar{\Phi}_1(\sigma, y) = B_1 e^{-|\sigma|y} + (e_1/\varepsilon_1) \bar{W}_1(\sigma, y) + \bar{\varphi}_\infty(x, y), \quad y > 0$$

$$\bar{w}_2(\sigma, y) = A_2 e^{\sqrt{\gamma_2} y}, \quad y < 0 \quad (3.8)$$

$$\bar{\Phi}_2(\sigma, y) = B_2 e^{|\sigma|y} + (e_2/\varepsilon_2) \bar{w}_2(\sigma, y), \quad y < 0$$

где A_i, B_i ($i = 1, 2$), подлежащие определению, постоянные интегрирования.

Теперь, при помощи (3.7) и (3.8), удовлетворяя условиям (3.3) – (3.5), для A_i, B_i ($i=1,2$) получим:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 - \bar{w}_\infty(\sigma, 0), \quad B_1 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} B_2 + \frac{1}{\varepsilon_1 |\sigma|} \bar{G}_+(\sigma) \\ A_2 &= -\frac{1}{e_1 + e_2} \frac{1}{|\sigma|} \bar{G}_+(\sigma) + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{e_1 + e_2} \bar{F}_-(\sigma) \\ B_2 &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 (e_1 + e_2)} \frac{\bar{G}_+(\sigma)}{|\sigma|} + \frac{e_1 \varepsilon_2 - e_2 \varepsilon_1}{\varepsilon_2 (e_1 + e_2)} \bar{F}_-(\sigma) \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$\bar{G}^+(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} g_+(x) e^{i\sigma x} dx; \quad \bar{F}_-(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f_-(x) e^{i\sigma x} dx \quad (3.10)$$

Удовлетворяя, при помощи (3.7) – (3.9), граничному условию (3.6), приходим к следующему функциональному уравнению (краевая задача типа Римана) на действительной оси, относительно неизвестных функции $\bar{F}_-(\sigma)$ и $\bar{G}_+(\sigma)$:

$$|\sigma|^{-1} \bar{G}_+(\sigma) + \bar{K}(\sigma) (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \bar{F}_-(\sigma) = A_0^{(1)} (e_1 + e_2) \delta(\sigma + p) \quad (3.11)$$

где

$$\bar{K}(\sigma) = \bar{K}_f(\sigma) / \bar{K}_g(\sigma) \quad (3.12)$$

$$\bar{K}_g(\sigma) = \mu_1^* [\gamma_1(\sigma) - \tilde{\chi}_1 |\sigma|] + \mu_2^* [\gamma_2(\sigma) - \tilde{\chi}_2 |\sigma|] \quad (3.13)$$

$$\bar{K}_f(\sigma) = \mu_1^* [\gamma_1(\sigma) - \tilde{\chi}_1^* |\sigma|] + \mu_2^* [\gamma_2(\sigma) - \tilde{\chi}_2^* |\sigma|] \quad (3.13)$$

$$A_0^{(1)} = 4\pi i A_0 \mu_1^* q [\bar{K}_g(-p)]^{-1}; \quad \mu_j^* = \mu_j (1 + \chi_j) \quad (3.14)$$

$$\chi_j = e_j^2 / \mu_j \varepsilon_j; \quad \tilde{\chi}_j = \chi_j / (1 + \chi_j); \quad \tilde{\chi}_j^* = r_j \tilde{\chi}_j; \quad (j=1,2) \quad (3.14)$$

$$r_1 = r / e_1 \varepsilon_2; \quad r_2 = r / e_2 \varepsilon_1; \quad r = (e_1 \varepsilon_2 - e_2 \varepsilon_1)^2 / \varepsilon_1 \varepsilon_2 (e_1 + e_2)$$

Таким образом, решение поставленной задачи, при общей неоднородности, свелось к решению функционального уравнения (3.11) относительно неизвестных функций $\bar{G}_+(\sigma)$ и $\bar{F}_-(\sigma)$. Имея эти функции, при помощи формул (3.7)-(3.9), можно определить дифракционное электроупругое волновое поле в полупространствах Ω_1 и Ω_2 .

4. Решение определяющего уравнения (3.11).

Обращаясь к решению функционального уравнения (3.11), заметим следующее. Построение аналитического решения для (3.11), методом факторизации, как нам кажется, практически невозможно. Это связано с тем обстоятельством, что в выраже-

нии $\bar{K}(\sigma)$ функции $\gamma_1(\sigma)$, $\gamma_2(\sigma)$ и $|\sigma|$ входят с довольно сложными сочетаниями параметров задачи.

В некоторых частных случаях, например, при $r = 0$ ($e_1 \varepsilon_2 = e_2 \varepsilon_1$), удается, при помощи обобщенных функций, построить решение для (3.11). Но полученное решение очень сложно и практически непригодно для исследования волнового поля без дополнительных упрощений полученных формул.

Исходя из сказанного, решение (3.11) построим в предположении, что $k_1 = k_2$, что не означает однородность пространства. Например, в частично - неоднородном случае, когда имеет место равенство:

$$\frac{\mu_1 + e_1^2/\varepsilon_1}{\rho_1} = \frac{\mu_2 + e_2^2/\varepsilon_2}{\rho_2}$$

условие $k_1 = k_2$ удовлетворяется точно.

Тогда вместо (3.11) получается следующее уравнение:

$$|\sigma|^{-1} \bar{G}_+(\sigma) + \bar{K}_0(\sigma)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \bar{F}_-(\sigma) = -A_0^{(1)}(e_1 + e_2) \delta(\sigma + p) \quad (4.1)$$

$$\bar{K}_0^*(\sigma) = \frac{(1 + \chi_0^*)[\gamma_0(\sigma) - \chi_{02}|\sigma|]}{(1 + \chi_0)[\gamma_0(\sigma) - \chi_{01}|\sigma|]} \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \sqrt{\sigma^2 - k_0^2}; \quad \chi_{01} = \chi_0/(1 + \chi_0); \quad \chi_{02} = \chi_0^*/(1 + \chi_0^*) \\ \chi_0 &= \frac{\mu_1 \chi_1 + \mu_2 \chi_2}{\mu_1 + \mu_2}; \quad \tilde{\chi}_0 = \frac{\mu_1 \tilde{\chi}_1 + \mu_2 \tilde{\chi}_2}{\mu_1 + \mu_2} \\ \chi_0^* &= \frac{\mu_1 \chi_1 r_1 + \mu_2 \chi_2 r_2}{\mu_1 + \mu_2}; \quad \tilde{\chi}_0^* = \frac{\mu_1 \tilde{\chi}_1 r_1 + \mu_2 \tilde{\chi}_2 r_2}{\mu_1 + \mu_2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

а χ_j , $\tilde{\chi}_j$ и r_j ($j = 1, 2$) даются формулами (3.14), а k_0 - число, связанное с k_1 и k_2 определенным образом.

Решение уравнения (4.1) построим методом факторизации [16]. Относительно функции $\gamma_0(\sigma)$ принимаются следующие предположения.

Считается, что в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ действительная ось обходит точку ветвления функции $\gamma_0(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - k_0^2}$ $\sigma = -k_0$ сверху, а $\sigma = k_0$ - снизу, т.е. принимается, что $\sqrt{\sigma^2 - k_0^2} > 0$ при $|\sigma| > k$ и $\sqrt{\sigma^2 - k_0^2} = -i\sqrt{k_0^2 - \sigma^2}$ при $|\sigma| < k$ [16,17]. Принимается также, что $\gamma_0(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_0^2} \rightarrow |\sigma|$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$, которым обеспечивается условие уходящей волны.

Представим функцию $\bar{K}_0(\sigma)$ из (4.2) в виде

$$\bar{K}_0^*(\sigma) = (\bar{K}_{00}(\sigma)\bar{K}_{11}(\sigma))/\bar{K}_{12}(\sigma) \quad (4.4)$$

$$\bar{K}_{00}(\sigma) = \frac{(\sigma - \sigma_{n2})(\sigma + \sigma_{n2})}{(\sigma - \sigma_{n1})(\sigma + \sigma_{n1})}; \quad \bar{K}_{1j}(\sigma) = \frac{\sqrt{\sigma^2 - k_0^2 + \chi_{0j}|\sigma|}}{(1 + \chi_{0j})\sqrt{\sigma^2 - k_0^2}} \quad (4.5)$$

$$\sigma_{n1} = \frac{k_0}{\sqrt{1 - \chi_{01}^2}} = k_0 \frac{1 + \chi_{01}}{\sqrt{1 + 2\chi_{01}}} > k_0; \quad \sigma_{n2} = \frac{k_0}{\sqrt{1 - \chi_{02}^2}} = k_0 \frac{1 + \chi_{02}}{\sqrt{1 + 2\chi_{02}}} > k_0 \quad (4.6)$$

Здесь σ_{n1} и σ_{n2} волновые числа хорошо известных бездисперсионных сдвиговых поверхностных электроупругих волн Блюстейна – Гуляева [1,12], локализованных возле граничной поверхности $y = 0$. При этом, σ_{n1} соответствует граничной полуплоскости ($y = 0, x > 0$), где расположен электрод, а σ_{n2} - полуплоскости ($y = 0, x < 0$), где осуществляется полный электромеханический контакт между Ω_1 и Ω_2 .

Очевидно, что $\sigma_{n1} > \sigma_{n2} > k_0$, из чего следует следующая связь между скоростями соответствующих поверхностных волн $\omega/\sigma_{n1} < \omega/\sigma_{n2} < c$, где c - скорость распространения электроупругой волны в пьезоэлектрике.

Функция $\bar{K}_{00}(\sigma)$ из (4.5) допускает простую факторизацию в виде [17]:

$$\bar{K}_{00}(\sigma) = \bar{K}_{00}^+(\sigma)\bar{K}_{00}^-(\sigma); \quad \bar{K}_{00}^+(\sigma) = \frac{\sigma + \sigma_{n2}}{\sigma + \sigma_{n1}}; \quad \bar{K}_{00}^-(\sigma) = \frac{\sigma - \sigma_{n2}}{\sigma - \sigma_{n1}} \quad (4.7)$$

Факторизация (4.3) следует из очевидного утверждения, что $\bar{K}_0^+(\alpha) = (\alpha + \sigma_{n2})/(\alpha + \sigma_{n1})$, как функция комплексного переменного $\alpha = \sigma + i\tau$, является аналитическим продолжением функции $\bar{K}_0^+(\sigma)$ в полуплоскость $\text{Im}\alpha > 0$, а функция $\bar{K}_0^-(\alpha) = (\alpha - \sigma_{n2})/(\alpha - \sigma_{n1})$ соответственно в полуплоскость $\text{Im}\alpha < 0$. Обеспечивая условие уходящей волны, в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ принимается, что действительная ось обходит точки $\sigma = -\sigma_{n1}; -\sigma_{n2}; -k_0$ сверху, а точки $\sigma = k_0; \sigma_{n2}; \sigma_{n1}$ - снизу, где точки $\sigma = \pm k_0$ являются точками ветвления функции $\gamma(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - k_0^2}$.

Для функции $\bar{K}_{1j}(\sigma)$, при больших $|\sigma|$, из (4.5) получена приближенная факторизация в следующем виде:

$$\bar{K}_{1j}(\sigma) = \bar{K}_{1j}^+(\sigma)\bar{K}_{1j}^-(\sigma); \quad \bar{K}_{1j}^\pm(\sigma) = \frac{\sqrt{\sigma \pm k_0 \pm i\sqrt{\chi_{0i}}(\sigma \pm i0)^{1/2}}}{(1 \pm i\sqrt{\chi_{0i}})\sqrt{\sigma \pm k_0}} \quad (4.8)$$

Теперь, имея факторизационные формулы (4.7) и (4.8), по известной процедуре [17,18], для решения функционального уравнения (4.1) получим

$$\bar{G}_+(\sigma) = \frac{Q(-p)}{2\pi i} \frac{\mu_1^*}{\mu_{01}} \frac{\bar{K}_{00}^+(\sigma) \bar{K}_{11}^+(\sigma)}{\bar{K}_{12}^+(\sigma)} \frac{(\sigma + i0)^{1/2}}{(\sigma + p + i0)} \quad (4.9)$$

$$\bar{F}_-(\sigma) = -\frac{Q(-p)\mu_1^*}{(1 + \chi_{01})(\varepsilon_1 + \varepsilon_0)\mu_{02}} \frac{\bar{K}_{12}^-(\sigma)}{\bar{K}_{00}^-(\sigma) \bar{K}_{11}^-(\sigma)} \frac{1}{(\sigma - i0)^{1/2} (\sigma + p - i0)} \quad (4.10)$$

$$Q(-p) = 4\pi i A_0 \frac{(e_1 + e_2)}{(\sigma_{n1} + p)(\sigma_{n2} - p)} \sqrt{\frac{1 + \chi_{01}}{1 + \chi_{02}}} \frac{\sqrt{k_0 + p - i\chi_{01}\sqrt{p}}}{[\sqrt{k_0 - p - \chi_{02}\sqrt{p}}]^{-1}} \quad (4.11)$$

Отметим, что при получении этих формул, для $\delta(\sigma + p)$ и $|\sigma|$ принимались разложения [20]:

$$\delta(\sigma + p) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{(\sigma + p - i0)} - \frac{1}{(\sigma + p + i0)} \right); |\sigma| = (\sigma - i0)^{1/2} (\sigma + i0)^{1/2} \quad (4.12)$$

Имея $\bar{G}_+(\sigma)$ и $\bar{F}_-(\sigma)$, при помощи (3.9), определяются значения постоянных A_i, B_i ($i = 1, 2$). Далее из (3.7) и (3.8), после обратного преобразования Фурье, получим окончательные выражения для $w_j(x, y)$ и $\varphi_j(x, y)$, определяющие распределение электроупругого волнового поля в соответствующих подобластях рассматриваемого составного пьезоэлектрического пространства.

В частности, для упругого перемещения $w_1(x, y)$ в полупространстве $\Omega_1(y > 0)$ будем иметь

$$w_1(x, y) = \frac{Q_1(-p)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{R}_1^+(\sigma) \frac{(\sigma + i0)^{1/2}}{|\sigma|(\sigma + p + i0)} e^{-\gamma_0 y - i\sigma x} d\sigma - \frac{Q_2(-p)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\bar{R}_1^+(\sigma)} \frac{e^{-\gamma_0 y - i\sigma x}}{(\sigma - i0)^{1/2} (\sigma + p - i0)} d\sigma + A_0 (e^{-iqy} - e^{iqy}) e^{i\sigma x}; \quad (4.13)$$

$$Q_1(-p) = \frac{Q(-p)}{2\pi i (e_1 + e_2)}; \quad Q_2(-p) = \frac{Q(-p)\mu_{01}}{2\pi i \mu_{02} (1 + \chi_{01})};$$

$$\bar{R}_1^\pm(\sigma) = \bar{K}_{00}^\pm(\sigma) \bar{K}_{11}^\pm(\sigma) / \bar{K}_{12}^\pm(\sigma); \quad (x, y) \in \Omega_1$$

Здесь $Q(-p)$ дается формулой (4.11), а $\bar{K}_{ij}^\pm(\sigma)$ - формулами (4.5) и (4.7).

В подынтегральные выражения (4.13) входят довольно сложные, по своей структуре, факторизованные функции. Очевидно, что в подобных случаях, для полного изучения характерных особенностей волнового поля в пьезоэлектрическом полупространстве, следует подробно исследовать интегральные составляющие, входящие в (4.13), и, в итоге, получить аналитические выражения для соответ-

ствующих потенциалов, которые более адекватно представляют дифрагированное волновое поле в рассматриваемой области.

Не останавливаясь на вычислительных подробностях, отметим лишь, что исследование интегральных составляющих, входящих в (4.13) (и в подобных случаях в дальнейшем), проведена методом контурного интегрирования, следуя работам [10,12,13,17].

При этом для выбора ветвей двузначной функции $\gamma_0(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - k_0^2}$ и $|\alpha|$ в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ проведены соответствующие разрезы [10]. В итоге, из (4.13) и аналогичных выражений получены аналитические представления для амплитуд всех компонентов электроупругого волнового поля – упругое перемещение и потенциал электрического поля в Ω_1 и Ω_2 .

Эти выражения в полном объеме здесь не приводятся. В основном остановимся на амплитудных компонентах дифрагированных поверхностных, неоднородных и отраженных волн.

Обратимся теперь к (4.13). Обозначим через $w_1^{(\pm)}(x, y)$ суммарную амплитуду, от внешних воздействий, для упругого перемещения в подобластях $\Omega_1^{(+)}(x > 0, y > 0, |z| < \infty)$ и $\Omega_1^{(-)}(x < 0, y > 0, |z| < \infty)$ соответственно. Тогда из (4.13) получим:

$$\begin{aligned} w_1^{(+)}(x, y) &= w_{\text{пад}}(x, y) + w_{\text{отр}}^{(+)}(x, y) + w_{\text{пов}}^{(+)}(x, y) + W_1^{(+)}(x, y) \\ w_1^{(-)}(x, y) &= w_{\text{пад}}(x, y) + w_{\text{отр}}^{(-)}(x, y) + w_{\text{пов}}^{(-)}(x, y) + W_1^{(-)}(x, y) \end{aligned} \quad (4.14)$$

где

$$w_{\text{пад}}(x, y) = w_{\infty}(x, y) = A_0 e^{ipx - iqy} \quad (4.15)$$

$$w_{\text{отр}}^{(+)}(x, y) = \left[-A_0 + Q_1(-p) \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{(1 + \chi_{02})(\sigma_{n2} - p) \chi_{01} p - iq}{(1 + \chi_{01})(\sigma_{n1} - p) \chi_{03} p - iq} \right] e^{ipx + iqy} \quad (4.16)$$

$$w_{\text{отр}}^{(-)}(x, y) = \left[-A_0 + Q_2(-p) \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{(1 + \chi_{01})(\sigma_{n1} - p) \chi_{02} p - iq}{(1 + \chi_{02})(\sigma_{n2} - p) \chi_{01} p - iq} \right] e^{ipx + iqy} \quad (4.17)$$

$$w_{\text{пов}}^{(+)}(x, y) = -iQ_1(-p)(\sigma_{n1} - \sigma_{n2}) e^{-\sqrt{\sigma_{n1}^2 - k_1^2} y} e^{i\sigma_{n1} x} \quad (4.18)$$

$$w_{\text{пов}}^{(-)}(x, y) = -iQ_2(-p)(\sigma_{n1} - \sigma_{n2}) e^{-\sqrt{\sigma_{n2}^2 - k_2^2} y} e^{-i\sigma_{n2} x} \quad (4.19)$$

Волновое поле, задаваемое $W_1^{(\pm)}(x, y)$ из (4.14), представляет собой дифрагированные объемные волны, распространяющиеся со скоростью ω/k . Для них получены асимптотические формулы, представляющие волновое поле в дальних зонах, которые здесь не приводятся.

Формулами (4.15) – (4.17) даются амплитудные выражения падающих и отраженных волн в Ω_1 , распространяющихся по направлению x_+ (положительное направление оси Ox) со скоростью ω/k .

Формулы (4.18) и (4.19) представляют дифрагированные поверхностные волны, с волновыми числами σ_{n1} и σ_{n2} , распространяющиеся в направлении x_+ и x_- и затухающее при $y \rightarrow +\infty$ по закону $\exp\left(-\sqrt{\sigma_{n1}^2 - k_1^2} y\right)$ и $\exp\left(-\sqrt{\sigma_{n2}^2 - k_2^2} y\right)$.

Для потенциала электрического поля $\phi_1(x, y)$ в области Ω_1 , из (3.7) и (3.9) получим следующее представление:

$$\phi_1(x, y) = \frac{e_1}{\varepsilon_1} w_1(x, y) + \frac{1}{2\pi\varepsilon_1(e_1 + e_2)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e_1}{|\sigma|} \bar{G}_+(\sigma) - (e_1\varepsilon_2 - e_2\varepsilon_1) \bar{F}_-(\sigma) \right] e^{-|\sigma|y} e^{-i\sigma x} d\sigma \quad (4.20)$$

Потенциал электрического поля, само собой не обладает волновыми свойствами. Однако, как следует из (4.20), $\phi_1(x, y)$ - сопутствующее упругим перемещениям, имеет аналогичные волновые характеристики, как $w_1(x, y)$. Это связано с применением в задачах определения электроупругого волнового поля в пьезоэлектрической среде уравнений динамической теории упругости и уравнений электродинамики в квазистатическом приближении.

Теперь, если электрическому потенциалу $\phi_1(x, y)$ присвоить волновые свойства, то мы придем к более полному и наглядному представлению электроупругого волнового поля.

При этом, из идентичности интегрального составляющего (4.20) и $w_1(x, y)$ из (4.13) можем утверждать, что интегральное составляющее из (4.20) возбуждает в Ω_1 еще и волновые компоненты следующих типов:

$$\left. \begin{aligned} \phi_{11}^{(+)}(x, y) &= Q_4(-p) e^{-|p|y} e^{\pm ipx} - \text{однородные волны} \\ \phi_{12}^{(+)}(x, y) &= Q_5(-p) e^{-|\sigma_{n1}|y} e^{+i\sigma_{n1}x} \\ \phi_{13}^{(+)}(x, y) &= Q_6(-p) e^{-|\sigma_{n2}|y} e^{-i\sigma_{n2}x} \end{aligned} \right\} - \text{поверхностные волны} \quad (4.21)$$

где Q_4, Q_5, Q_6 - постоянные, зависящие от параметров задачи.

Скорость и направление распространения волновых компонентов из (4.21) очевидны и на них не будем останавливаться.

Обращаясь к упругим перемещениям $w_2(x, y)$ в области Ω_2 , заметим следующее. Выражение $w_2(x, y)$ совпадает с (4.14) для $w_1(x, y)$, если заменить в нем y

на $-y$, k_1 на k_2 и не учитывать слагаемые с множителем A_0 . Так что, для $w_2(x, y)$ в Ω_2 получим выражения, подобные (4.16) – (4.19).

При этом, под $w_{lotr}^{(\pm)}$ следует понимать как приходящая волна.

Аналогичным образом, как в случае $\phi_1(x, y)$, получим выражения для $w_2(x, y)$.

5. Рассмотрим чисто однородный случай задачи, предполагая, что $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$; $\rho_1 = \rho_2 = \rho_0$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0$; $e_1 = e_2 = e_0$ и, следовательно, $k_1 = k_2 = k_0$. Т.е. рассмотрим задачу дифрагирования падающей упругой волны $w_\infty^{(0)}(x, y)$ из (2.1) в пьезоэлектрическом однородном пространстве $\Omega_1 \cup \Omega_2$, когда на полуплоскости $\omega_0(x > 0, y = 0, |z| < \infty)$ приклеен электрод с нулевым значением электрического потенциала.

Здесь остановимся только на распределении упругих перемещений $w_{01}(x, y)$ и потенциала электрического поля $\phi_{01}(x, y)$ в области $\Omega_1^{(+)}(x > 0, y > 0, |z| < \infty)$.

Для $w_{01}(x, y)$ получим

$$w_{01}(x, y) = \frac{P_0}{4\pi e_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\sigma + k_0} \bar{K}_{01}^+(\sigma) \bar{K}_0^+(\sigma) (\sigma + i0)^{1/2}}{|\sigma|(\sigma + p + i0)} e^{-\gamma_0 y} e^{-i\sigma x} d\sigma + \frac{P_0(1 - \bar{\chi}_0)}{4\pi \varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sigma - i0)^{1/2} (\sigma + p - i0)^{-1}}{\sqrt{\sigma - k_0} \bar{K}_{01}^-(\sigma) \bar{K}_0^-(\sigma)} e^{-\gamma_0 y} e^{-i\sigma x} d\sigma + w_\infty^{(0)}(x, y) \quad (5.1)$$

$$\bar{K}_{01}^\pm(\sigma) = \frac{\sqrt{\sigma \pm k_0}}{\sigma \pm \sigma_{n1}}; \quad \bar{K}_0^\pm(\sigma) = \frac{\sqrt{\sigma \pm k_0} \pm i\sqrt{\bar{\chi}_0}(\sigma \pm i0)^{1/2}}{(1 \pm i\sqrt{\bar{\chi}_0})\sqrt{\sigma \pm k_0}} \quad (5.2)$$

$$\gamma_0 = \sqrt{\sigma^2 - k_0^2}; \quad P_0 = \frac{2A_0 q e_0 \sqrt{p} (p\sqrt{\bar{\chi}_0} + iq)}{(1 - \bar{\chi}_0^2)(1 + i\sqrt{\bar{\chi}_0})\sqrt{k_0 - p}(\sigma_{n1} + p)}$$

$$\sigma_{n1} = k_0 / \sqrt{1 - \bar{\chi}_0^2}; \quad \bar{\chi}_0 = \chi_0 / (1 + \chi_0); \quad \chi_0 = e_0^2 / \mu_0 \varepsilon_0$$

Из (5.1) для упругих перемещений в области $\Omega_1^{(+)}$ получим:

$$\begin{aligned}
w_{01}(x, y) = & \frac{P_0}{2\pi e_0} \frac{q\sqrt{k_0+p}(\sqrt{\bar{\chi}_0 p} - i\sqrt{k_0-p})}{p(1+i\sqrt{\bar{\chi}_0})\sqrt{k_0+p}(\sigma_{n1}+p)} e^{iqy+ipx} + \\
& + \frac{P_0}{4\pi e_0} \frac{\sqrt{k_0+p}(\sqrt{\bar{\chi}_0 p} + i\sqrt{k_0-p})}{\sqrt{1+\bar{\chi}_0}p(\sigma_{n1}+p)} e^{-\sqrt{\sigma_{n1}^2-k_0^2}y+i\sigma_{n1}x} + w_\infty^{(0)}(x, y) + W_{01}^{(+)}(x, y)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Таким образом, упругое волновое поле, как следует из (5.3), в $\Omega_1^{(+)}$ состоит из следующих волновых компонентов:

- отраженной волны – первое слагаемое в (5.3),
- поверхностной волны Гуляева – Блюстейна – второе слагаемое в (5.3),
- падающей волны $w_\infty^{(0)}(x, y)$, а также затухающей объемной волны $W_{01}^{(+)}(x, y)$.

Для потенциала электрического поля, в этом случае, из (4.21) имеем:

$$\Phi_{01}(x, y) = \frac{e_0}{\varepsilon_0} w_{01}(x, y) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\sigma|} \bar{G}_+^{(0)}(\sigma) e^{-|\sigma|y-i\sigma x} d\sigma \tag{5.4}$$

Из (5.4) следует, что потенциал $\Phi_{01}^{(+)}(x, y)$ в области $\Omega_1^{(+)}$ имеет, сопутствующие к выше указанным компонентам, отраженную и поверхностную компоненты. Кроме этого, обусловленные вторым слагаемым в (5.4) волновые компоненты, аналогичные (4.22), в виде:

$$\begin{aligned}
\Phi_{01}^{(1)}(x, y) &= P_1 e^{-|p|y} e^{ipx} - \text{однородная волна,} \\
\Phi_{01}^{(2)}(x, y) &= P_2 e^{-|\sigma_{n1}|y} e^{i\sigma_{n1}x} - \text{поверхностная волна}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

где P_1, P_2 - постоянные, зависящие от параметров задачи.

В конце пункта коротко остановимся на распределении скачка электрической индукции $g_+^{(0)}(x)$, для которого, из (3.10) и (4.10) имеем:

$$\begin{aligned}
g_+^{(0)}(x) &= P_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_0^+(\sigma) (\sigma - i0)^{-1/2} e^{-i\sigma x} d\sigma \\
R_0^+(\sigma) &= \frac{(\sqrt{\sigma+k_0} + i\sqrt{\bar{\chi}_0}) (\sigma + i0)^{1/2}}{\sqrt{\sigma+k_0}} \frac{\sigma+k_0}{\sigma+\sigma_{n1}} \frac{|\sigma|}{\sigma+p+i0} \\
P_0 &= \frac{2q\sqrt{p}(q+i\bar{\chi}_0 p)}{(1-\bar{\chi}_0^2)(\sigma_{n1}+p)\sqrt{k_0-p}}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Из (5.6), для $g_+^{(0)}(x)$ получим следующее асимптотическое представление [19,20] при $x \rightarrow +0$

$$g_+^{(0)}(x) = P_0 \left(1 + i\sqrt{\chi}\right) e^{i\pi/4} X_+^{-1/2} + O(1) \quad (5.7)$$

где $X_+^{-1/2} = X^{1/2}$ при $x > 0$ и равняется нулю, при $x < 0$.

Из (5.5) следует, что скачок электрической индукции имеет корневую особенность при $x = +0$.

Для коэффициента интенсивности $g_+^{(0)}(x)$ при $x \rightarrow +0$ из (5.7) получим

$$G = P_0 \left(1 + i\sqrt{\chi_0}\right) e^{i\pi/4} \quad (5.8)$$

Заключение. В рамках антиплоской деформации исследуются вопросы, связанные с определением электроупругого волнового поля в пьезоэлектрическом пространстве, состоящем из двух разных полупространств Ω_1 и Ω_2 . На граничной поверхности, отделяющей Ω_1 от Ω_2 приклеен заземленный, полубесконечный электрод.

На плоскости контакта $y = 0$ имеется полный электро – механический контакт, а на полубесконечном электроде электрическая индукция имеет скачок.

Методом факторизации построено решение задачи в квадратурах. Получены аналитические представления для амплитуд электроупругого поля.

Для отраженных, проходящих, поверхностных и однородных волн вычислены и приведены окончательные выражения амплитудных формул упругих перемещений и электрических потенциалов в некоторых, важных для исследования, областях (4.15) – (4.20), (4.22), (5.3) – (5.4).

Эти выражения, в явном виде, содержат основные волновые характеристики возбужденных, вследствие дифрагирования, поверхностных, отраженных и однородных волн. Из этих формул следует, что наличие полубесконечного электрода существенно влияет на распределение электроупругого волнового поля. В этом отношении следует отметить появление новых волновых компонентов (4.18) – (4.20), которые не возбуждаются в случаях, когда – электрод бесконечен [1,2]; электрод отсутствует [12]. Особенно следует отметить появление $\varphi_{12}^{(+)}(x, y)$, $\varphi_{13}^{(-)}(x, y)$, а также $\varphi_{01}^{(1)}(x, y)$, $\varphi_{01}^{(2)}(x, y)$ при однородном случае, которые, в свою очередь, обеспечивают выполнение граничных условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Balakirev M. K. and Gilinski I. A. Waves in Piezocrystals (Novosibirsk: Nauka 1982) p. 239.
2. Parton V.Z., Kudravcev B.A. Electromagnetoelasticity of piezoelectric and electrically conductive bodies. – M. Nauka, 1988, p. 472.
3. Mitra R., Li S. Analytical methods of waveguide theory. M: Mir., 1974. p. 327.
4. Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shulcha N.A. Electroelasticity. / Mechanics of related fields in structural elements. V.5/ - Kiev., Nauka. Dumka., 1989., p. 230.
5. Avetisyan A.S., Margaryan J.M. Electroelastic surface shear waves on a division surface of two piezoelectric half-spaces. //Proc. of NAS Armenia. Mechanics, 1994. T.47. №3-4. p.31-36.
6. Jin F., Wang Z., Wang Tiejun The Bluestein-Gulyaev (B-G) wave in a piezoelectric layered half-space. Int. J. Eng. Sci. 39, 1271-1285 (2001).
7. Li P., Jin. F., Qian Z. Propagation of the Bluestein-Gulyaev waves in a functionally graded transversely isotropic electro-magneto-elastic half-space. //European Journal of Mechanics A/Solids. 37, 2013, pp. 17-23.
8. Grigoryan E. Kh., Melkumyan A.S. Diffraction of a shear plane wave in piezoelectric space at the edge of a semi-infinite metal layer. //Proc. of NAS Armenia. Mechanics, 2004. T.57. №4. p. 43-52.
9. Grigoryan E.Kh., Jilavyan S.H. Diffraction of a plane shear wave in a piezoelectric space with two parallel semi-infinite cracks. Proc. of V Int. Conf. "Topical problems of continuum mechanics ", Goris 2005, pp. 163-168.
10. Aghayan K.L., Grigoryan E.Kh. Diffraction of a plane electro elastic wave on a semi-infinite electrode in a piezoelectric space with a slit. //Proc. of NAS Armenia. Mechanics, 2010. T.63. №1. p. 50-69.
11. Aghayan K.L. Diffraction of electroelastic shear plane waves at the edges of semi-infinite electrodes in piezoelectric space with a slit. / Environmental herald of the scientific centers of the Black Sea economic cooperation. / 2011. №1. p.3-18.
12. Jilavyan S.H., Ghazaryan H.A. Diffraction of Plane Shear Wave in Piezoelectric Semi-Space at a Semi-Infinite Metallic Layer in the Dielectric Medium. //Proc. of NAS Armenia. Mechanics, 2015. T.68. №1. P.45-56.
13. Aghayan K.L., Zakaryan V.G. Surface Electro-Elastic Shear Waves in Piezo-Electrical Half-Space with Semi-Infinite Electrode. Springer Nature Switzerland AG 2025 H. Altenbach. Current Developments in Solid Mechanics and Their Applications. Advanced Structured Materials. 2025. V.223, pp.1-16. https://doi.org/10.1007/978-3-031-90022-8_1.
14. Агаян К.Л., Закарян В.Г. Сдвиговые волны в составном пьезоэлектрическом пространстве со смешанными электромеханическими контактными условиями. Труды IX межд. конф. “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, 22-

26 сентября 2025, Цахкадзор, Армения, Ереван, Изд. Гитутюн, НАН РА 2025, с. 14-18.

15. Aghayan K.L. Plane shear wave in a piezoelectric layer with mixed boundary conditions. Reports of NAS of Armenia, 2023. V.123, №3-4. p.61-73.
16. Nobl B. The Wiener-Hopf method. M. Mir. 1962. p. 297.
17. Grigoryan E.Kh., Aghayan K.L. On a new method for determining asymptotic formulas in wave diffraction problems. Reports of NAS of Armenia, 2010. V.110, №3. p.261-271.
18. Sumbatyan M.A., Skalia A. Fundamentals of diffraction theory with applications in mechanics and acoustics. M.: Fizmatlit. 2013. p. 328.
19. Brichkov Yu.A., Prudnikov A.P. Integral transformations of generalized functions. M-Nauka., 1977., p. 287.
20. Reference mathematical library. /Functional analysis./ M. 1972., p. 544.

Сведения об авторах:

Агаян Каро Леренцович—д.ф.м.н., проф., ведущий научный сотрудник,
Институт Механики НАН Армении
Тел.: (37491) 485566, E-mail: karo.aghayan@gmail.com

Закарян Ваге Гришаевич—к.ф.м.н., ученый секретарь Института Механики НАН
Армении. Тел.: (37477) 789264, E-mail: vahe-zaqaryan@mail.ru

Поступила в редакцию 11 марта 2026г.

**ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО СЛОЯ С
МЕЖФАЗНЫМИ ДЕФЕКТАМИ**

В.Н. Акопян, А.А. Амирджанян, С.К.Саакян

Ключевые слова: динамическая смешанная задача, штамп, межфазные дефекты, стационарные колебания

**Накobyan V.N., Amirjanyan A.A., Sahakyan S.K.
Forced Oscillations of a Piecewise-Homogeneous Layer with Interphase Defects**

Keywords: dynamic mixed boundary value problem, stamp, interphase defects, vibrations

The article discusses forced shear vibrations of a piecewise homogeneous layer obtained by joining two heterogenous layers with interphase defects such as tunnel cracks, completely or partially bonded strip thin absolutely rigid inclusions. The layer is deformed by an absolutely rigid stamp with a flat base, acting on the boundary plane of one of the layers under the influence of a concentrated load periodically changing over time. In the general case, discontinuous solutions of the equations of motion of elasticity theory under antiplane deformation are constructed for a composite two-component layer with interphase defects. These solutions are used to write a governing system of singular integral equations for the problem. As an example, a case with only one inclusion and one inclusion partially detached from the matrix is considered.

Հակոբյան Վ.Ն., Ամիրջանյան Հ.Ա., Սահակյան Ս.Կ.

Միջֆազային դեֆեկտներով կտոր առ կտոր համասեռ շերտի ստիպողական տատանումները

Հիմնաբառեր: դինամիկ խառը խնդիր, միջֆազային դեֆեկտներ, ներդրակ, ստացիոնար տատանումներ

Դիտարկված է երկու տարբեր շերտերի միացումից ստացված կտոր առ կտոր համասեռ շերտի հակահարթ ստիպողական տատանումները, երբ այն պարունակում է թունելային ճաքերի, լրիվ կամ մասնակի ամրակցված բարակ բացարձակ կոշտ ներդրակների տիպի դեֆեկտներ և դեֆորմացվում է շերտերից մեկի մակերևույթին տեղաբաշխված և ժամանակի ընթացքում պարբերաբար փոփոխվող կենտրոնացված բեռների ազդեցության տակ գտնվող հարթ հիմքով բացարձակ կոշտ դրոշմի օգնությամբ: Ընդհանուր դեպքում կառուցված է միջֆազային դեֆեկտներ պարունակող և հակահարթ դեֆորմացիայի պայմաններում գտնվող երկկոմպոնենտ շերտի համար առաձգականության տեսության շարժման հավասարումների խզվող լուծումները, որոնց հիման վրա ստացված է խնդրի դրոշմի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգը: Որպես օրինակ դիտարկված է այն դեպքը, երբ բաղադրյալ շերտը պարունակում է մեկական լրիվ և մասնակի ամրակցված ներդրակ:

Рассмотрены сдвиговые вынужденные колебания кусочно-однородного слоя, полученного при помощи соединения двух разнородных слоев, с межфазными дефектами типа тоннельных трещин, полностью или частично сцепленных полосовых тонких абсолютно жёстких включений и деформируемого абсолютно жёстким штампом с плоским основанием, действующим на граничной плоскости одного из слоев под воздействием периодически изменяющейся во времени сосредоточенной нагрузки. В общем случае построены разрывные решения уравнений движения теории упругости при антиплоской деформации для составного двухкомпонентного слоя с межфазными дефектами, на основе которых написана определяющая система сингулярных интегральных уравнений поставленной задачи. В качестве примера рассмотрен случай, когда имеется только два включения, одно из которых полностью сцеплено с матрицей, а второе сцеплено с ней лишь по одной грани.

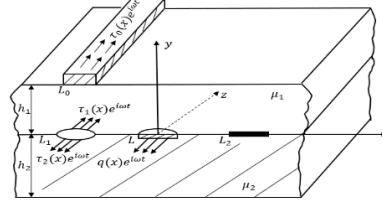
Введение

Изучение взаимовлияния концентраторов напряжений различных типов, одновременно находящихся в однородных и составных упругих телах, как в статической, так и в динамической постановках, всегда были и остаются одной из весьма актуальных проблем контактных и смешанных задач механики деформируемого твёрдого тела.

Изучению задач о вынужденных стационарных колебаниях многослойных систем с межфазными дефектами типа трещин и абсолютно жёстких включений посвящено достаточно много работ. Разработаны и предложены эффективные методы решения динамических задач для слоистых сред с межфазными дефектами [1-4], поставлен и решен ряд актуальных и интересных задач в этом направлении. С другой стороны, мало работ, изучающих закономерности взаимовлияния обычных или межфазных концентраторов напряжений различных типов, одновременно находящихся в слоистых структурах, которые весьма актуальны с точки зрения сейсмологии, сейсмостойчивого строительства, сейсморазведки и дефектоскопии. В этом направлении отметим работы [5-9], где приведены решения задач о вынужденных сдвиговых колебаниях штампа на границе кусочно-однородного полупространства с межфазными дефектами типа трещин, абсолютно жёстких, полностью или частично сцеплённых, включений и изучены вопросы их взаимовлияния.

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Пусть кусочно-однородный упругий слой из двух разнородных слоев с модулями сдвига μ_1, μ_2 и толщиной h_1, h_2 соответственно, отнесённый к декартовой системе координат $Oxyz$, на плоскости стыка слоёв, совпадающей с плоскостью $y=0$, содержит магистральную межфазную трещину, занимающую область $\{y=0; x \in L_1; -\infty < z < \infty\}$, абсолютно жёсткое включение, занимающее область $\{y=0; x \in L_2; -\infty < z < \infty\}$ и магистральную межфазную трещину, занимающую область $\{y=0; x \in L; -\infty < z < \infty\}$, к одному из берегов которой припаяно абсолютно жёсткое тонкое остроугольное полосовое включение. Будем полагать, что свободная поверхность второго слоя жёстко закреплена, а двухкомпонентный слой деформируется под воздействием периодически изменяющихся во времени касательных напряжений интенсивности $\tau_0(x)e^{i\omega t}$ и $q(x)e^{i\omega t}$, приложенных к абсолютно жёсткому полосовому штампу с плоским основанием, прикрепленному к свободной поверхности первого слоя по области $\{y=h_1; x \in L_0; -\infty < z < \infty\}$, и к частично оторванному от матрицы полосовому включению соответственно. Будем считать также, что к берегам межфазной трещины также приложены равные, противоположно направленные касательные напряжения интенсивности $\tau_1(x)e^{i\omega t}$ ($j=1,2$) (Фиг. 1).



Фиг. 1

Как обычно, нужно определить закономерности взаимовлияния межфазных дефектов и штампа, т.е. изменения контактных напряжений, действующих под штампом и включениями, и раскрытия трещины, а также коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в конечных точках трещины в зависимости от физико-механических и геометрических характеристик задачи, а также частоты вынужденных колебаний.

Снабдив характерные величины слоев соответственно индексами 1 и 2, поставленную задачу в базовой плоскости Oxy можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{aligned}
 \tau_{yz}^{(1)}(x, h_1, t) &= 0 & (x \notin L_0) \\
 W_1(x, 0, t) &= W_2(x, 0, t) & (x \notin L_1 \cap L_2 \cap L) \\
 \tau_{yz}^{(1)}(x, 0, t) &= \tau_{yz}^{(2)}(x, 0, t) & (x \notin L_1 \cap L_2 \cap L) \\
 W_2(x, -h_2, t) &= 0 & (-\infty < x < \infty) \\
 W_1(x, h_1, t) &= \text{const} e^{i\omega t} & (x \in L_0) \\
 \tau_{yz}^{(j)}(x, 0, t) &= \tau_1(x) e^{i\omega t} & (x \in L_1; j=1,2) \\
 \tau_{yz}^{(1)}(x, 0, t) &= 0 & (x \in L) \\
 W_1(x, 0, t) &= W_2(x, 0, t) = \text{const} e^{i\omega t} & (x \in L_2) \\
 W_2(x, 0, t) &= \text{const} e^{i\omega t} & (x \in L)
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $W_j(x, y, t)$ ($j=1,2$) – соответственно смещения точек первого и второго слоев по направлению оси Oz , удовлетворяющие, каждое в области своего определения, уравнению

$$\frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_j}{\partial y^2} = \frac{1}{(c_2^{(j)})^2} \frac{\partial^2 W_j}{\partial t^2} \tag{1.2}$$

где $c_2^{(j)}$ ($j=1,2$) – скорости распространения сдвиговых волн в слоях, а $\tau_{yz}^{(j)}(x, y, t)$ ($j=1,2$) – касательные напряжения, действующие в слоях и связанные со смещениями известными формулами:

$$\tau_{yz}^{(j)}(x, y, t) = \mu_j \frac{\partial W_j(x, y)}{\partial y} \quad (j=1,2) \quad (1.3)$$

Как и в работе [1], по формуле $f(x, y, t) = f(x, y)e^{i\omega t}$ перейдём к амплитудам искомым величин. Тогда амплитуды функций смещений будут удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_j}{\partial y^2} = -\left(\frac{\omega}{c_2^{(j)}}\right)^2 W_j(x, y) \quad (j=1,2). \quad (1.4)$$

Решения уравнений (1.4) представим в виде интегралов Фурье

$$W_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A_1(\lambda) \operatorname{sh}(\chi_1(\lambda)y) + B_1(\lambda) \operatorname{ch}(\chi_1(\lambda)y)] e^{-i\lambda x} d\lambda; \quad (1.5)$$

$$W_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A_2(\lambda) \operatorname{sh}(\chi_2(\lambda)y) + B_2(\lambda) \operatorname{ch}(\chi_2(\lambda)y)] e^{-i\lambda x} d\lambda,$$

где $\chi_j(s) = \sqrt{s^2 - k_j^2}$ ($k_j = \omega / c_2^j$, $j=1,2$), а $A_j(s)$ и $B_j(s)$ ($j=1,2$) — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. При этом выбраны те ветви функций $\chi_j(s)$ ($j=1,2$) [2], которые обеспечивают затухание колебаний на бесконечности, т.е. на бесконечности ведут себя как $|s|$ [10]. Амплитуды напряжений выражены формулами:

$$\tau_{yz}^{(j)}(x, y) = \frac{\mu_j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A_j(\lambda) \operatorname{ch}(\chi_j(\lambda)y) + B_j(\lambda) \operatorname{sh}(\chi_j(\lambda)y)] \chi_j(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda \quad (1.6)$$

$$(j=1,2)$$

Прежде чем перейти к решению граничной задачи (1.1), построим разрывные решения уравнений теории упругости для двухкомпонентного слоя с межфазными дефектами. С этой целью введём в рассмотрение функции амплитуд скачков напряжений $T(x)$, разности смещений на дефектах $W(x)$ и контактных напряжений под штампом $\tau(x)$:

$$\begin{aligned}
\tau_{yz}^{(1)}(x, h_1) &= \tau(x) & (x \in L_0); \\
W_1(x, 0) - W_2(x, 0) = W(x) &= \begin{cases} W_*(x) & (x \in L) \\ W_{**}(x) & (x \in L_1) \end{cases}; \\
\tau_{yz}^{(1)}(x, 0) - \tau_{yz}^{(2)}(x, 0) = T(x) &= \begin{cases} T_*(x) & (x \in L) \\ T_{**}(x) & (x \in L_2) \end{cases},
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Решим вспомогательную граничную задачу, состоящую из первых четырех условий задачи (1.1), записанных в амплитудах, и условий (1.7). Используя соотношения (1.5) - (1.6), удовлетворим условиям вспомогательной граничной задачи и выразим коэффициенты $A_j(s)$ и $B_j(s)$ ($j=1,2$) через трансформанты Фурье $\bar{W}(s)$, $\bar{\tau}(s)$ и $\bar{T}(s)$ функций $W(x)$, $\tau(x)$ и $T(x)$. Получим:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\mu\chi_2}{\mu_1\chi_1} \frac{\bar{\tau}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} + \frac{\text{sh}(\chi_1 h_1) \text{th}(\chi_2 h_2) \bar{T}(\lambda)}{\mu_1 \Delta(\lambda)} - \frac{\mu\chi_2 \bar{W}(\lambda) \text{sh}(\chi_1 h_1)}{\Delta(\lambda)}; \\
A_2 &= \frac{\bar{\tau}(\lambda)}{\mu_1 \Delta(\lambda)} - \frac{\bar{T}(\lambda) \text{ch}(\chi_1 h_1)}{\mu_1 \Delta(\lambda)} - \frac{\chi_1 \bar{W}(\lambda) \text{sh}(\chi_1 h_1)}{\Delta(\lambda)}; \\
B_1 &= \frac{\bar{\tau}(\lambda) \text{th}(\chi_2 h_2)}{\mu_1 \Delta(\lambda)} - \frac{\bar{T}(\lambda) \text{ch}(\chi_1 h_1) \text{th}(\chi_2 h_2)}{\mu_1 \Delta(\lambda)} + \frac{\mu\chi_2 \text{ch}(\chi_1 h_1) \bar{W}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}; \\
B_2 &= \frac{\bar{\tau}(\lambda) \text{th}(\chi_2 h_2)}{\mu_1 \Delta(\lambda)} - \frac{\bar{T}(\lambda) \text{ch}(\chi_1 h_1) \text{th}(\chi_2 h_2)}{\mu_1 \Delta(\lambda)} - \frac{\chi_1 \text{sh}(\chi_1 h_1) \text{th}(\chi_2 h_2) \bar{W}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \\
\Delta(\lambda) &= [\mu\chi_2 \text{ch}(\chi_1 h_1) + \chi_1 \text{th}(\chi_2 h_2) \text{sh}(\chi_1 h_1)] \quad (\mu = \mu_2 / \mu_1)
\end{aligned} \tag{1.8}$$

При помощи полученных значений коэффициентов $A_j(s), B_j(s)$ ($j=1,2$) вычислим значения функций $W_1'(x, h_1)$, $W_j'(x, 0)$ и $\tau_{yz}^{(j)}(x, 0)$ ($j=1,2$). Подставляя полученные значения в (1.5), (1.6) и, учитывая, что [11]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sign } \lambda e^{i\lambda x} dx = \frac{2i}{x}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} dx = \delta(x),$$

где $\delta(x)$ – известная функция Дирака, найдем:

$$\begin{aligned}
W_1'(x, h_1) &= \frac{1}{\pi\mu_1} \int_{L_0} \frac{\tau(s) ds}{s-x} + \int_{L_0} K_{11}(s-x) \tau(s) ds + \int_{L \cap L_1} K_{12}(s-x) W'(s) ds + \\
&+ \int_{L \cap L_2} K_{13}(s-x) T(s) ds;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{yz}^{(1)}(x,0) &= \int_{L_0} K_{21}(s-x)\tau(s)ds + \frac{\mu_2}{\pi(1+\mu)} \int_{L \cap L_1} \frac{W'(s)ds}{s-x} + \\
&+ \int_{L \cap L_1} K_{22}(s-x)W'(s)ds + \frac{T(x)}{1+\mu} + \int_{L \cap L_2} K_{23}(s-x)T(s)ds; \\
W_2'(x,0) &= \int_{L_0} K_{3,1}(s-x)\tau(s)ds - \frac{1}{1+\mu}W'(x) + \int_{L \cap L_1} K_{3,2}(s-x)W'(s)ds - \\
&- \frac{1}{\pi\mu_1(1+\mu)} \int_{L \cap L_2} \frac{T(s)ds}{s-x} + \int_{L \cap L_2} K_{3,3}(s-x)T(s)ds; \\
W_1'(x,0) &= W'(x) + W_2'(x,0); \tau_{yz}^{(2)}(x,0) = T(x) + \tau_{yz}^{(1)}(x,0)
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Здесь

$$K_{11}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\lambda \operatorname{ch}(\chi_1(\lambda)h_1) [\mu\chi_2 \operatorname{th}(\chi_1(\lambda)h_1) + \chi_1 \operatorname{th}(\chi_2h_2)]}{\mu_1\chi_1\Delta(\lambda)} - 1 \right\} \sin(\lambda x) d\lambda;$$

$$K_{12}(x) = K_{21}(x) = \frac{\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_2 \cos(\lambda x)}{\Delta(\lambda)} d\lambda;$$

$$K_{13}(x) = -K_{31}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda \frac{\operatorname{th}(\chi_2h_2) \sin(\lambda x)}{\mu_1\Delta(\lambda)} d\lambda;$$

$$K_{22}(x) = \frac{\mu_2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\chi_1\chi_2 \operatorname{sh}(\chi_1h_1)}{\lambda\Delta(\lambda)} - \frac{1}{(1+\mu)} \right\} \sin(\lambda x) d\lambda;$$

$$K_{2,3}(x) = -K_{3,2}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\chi_1(\lambda) \operatorname{sh}(\chi_1h_1) \operatorname{th}(\chi_2h_2)}{\Delta(\lambda)} - \frac{1}{1+\mu} \right] \cos(\lambda x) d\lambda;$$

$$K_{3,3}(x) = -\frac{1}{\pi\mu_1} \int_0^{\infty} \left[\frac{\lambda \operatorname{ch}(\chi_1h_1)}{\Delta(\lambda) \operatorname{cth}(\chi_2h_2)} - \frac{1}{(1+\mu)} \right] \sin(\lambda x) d\lambda.$$

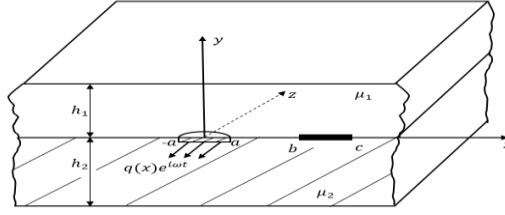
Далее, используя полученные формулы и удовлетворяя последним пяти условиям (1.1), предварительно перейдя в них к амплитудам и дифференцируя первое и последние два из них по x , придём к системе определяющих сингулярных интегральных уравнений для определения неизвестных скачков напряжений на полностью сцеплённых включениях, дислокации смещений на частично сцеплённых включениях и трещине, а также контактных напряжений под штампом:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi\mu_1} \int_{L_0} \frac{\tau(s)ds}{s-x} + \int_{L_0} K_{11}(s-x)\tau(s)ds + \int_{L \cap L_1} K_{12}(s-x)W'(s)ds + \\
& + \int_{L \cap L_2} K_{13}(s-x)T(s)ds = 0 \quad (x \in L_0); \\
& \frac{\mu_2}{\pi(1+\mu)} \int_{L \cap L_1} \frac{W'(s)ds}{s-x} + \int_{L_0} K_{21}(s-x)\tau(s)ds + \int_{L \cap L_1} K_{22}(s-x)W'(s)ds + \\
& + \int_{L \cap L_2} K_{23}(s-x)T(s)ds = \tau_1(x) \quad (x \in L_1); \\
& \frac{T_*(x)}{1+\mu} + \int_{L_0} K_{21}(s-x)\tau(s)ds + \frac{\mu_2}{\pi(1+\mu)} \int_{L \cap L_1} \frac{W'(s)ds}{s-x} + \\
& + \int_{L \cap L_1} K_{22}(s-x)W'(s)ds + \int_{L \cap L_2} K_{23}(s-x)T(s)ds = 0; \quad (x \in L) \\
& - \frac{1}{1+\mu} W'_*(x) - \frac{1}{\pi\mu_1(1+\mu)} \int_{L \cap L_2} \frac{T(s)ds}{s-x} + \int_{L_0} K_{3,1}(s-x)\tau(s)ds + \\
& + \int_{L \cap L_1} K_{3,2}(s-x)W'(s)ds + \int_{L \cap L_2} K_{3,3}(s-x)T(s)ds = 0 \quad (x \in L); \\
& - \frac{1}{\pi\mu_1(1+\mu)} \int_{L \cap L_2} \frac{T(s)ds}{s-x} + \int_{L_0} K_{3,1}(s-x)\tau(s)ds + \\
& + \int_{L \cap L_1} K_{3,2}(s-x)W'(s)ds + \int_{L \cap L_2} K_{3,3}(s-x)T(s)ds = 0; \quad (x \in L_2)
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Полученную систему мы должны рассматривать при условиях равновесия штампа и включений, а также при условии непрерывности смещений в концевых точках трещины:

$$\begin{aligned}
& \int_L T_*(x)dx = -\int_L q(x)dx = -T_0; \quad \int_{L_2} T_{**}(x)dx = 0; \quad \int_L W'(x)dx = 0; \\
& \int_{L_1} W'(x)dx = 0; \quad \int_{L_0} \tau(x)dx = \int_{L_0} \tau_0(x)dx = Q_0.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

В качестве примера рассмотрим частный случай поставленной задачи, когда отсутствуют межфазная трещина и штамп на поверхности кусочно-однородного слоя (Фиг. 2).



Фиг. 2

Считаем, что на плоскости слоев имеется одно частично сцеплённое межфазное включение, занимающее область $L = (-a, a)$, и одно полностью сцеплённое межфазное включение, занимающее область $L_2 = (b, c)$. В указанном случае система (1.10) принимает вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{T_*(x)}{1+\mu} + \frac{\mu_2}{\pi(1+\mu)} \int_{-a}^a \frac{W'_*(s) ds}{s-x} + \int_{-a}^a K_{22}(s-x) W'_*(s) ds + \\
& + \int_{-a}^a K_{23}(s-x) T_*(s) ds + \int_b^c K_{23}(s-x) T_{**}(s) ds = \tau_1(x); \quad (-a < x < a) \\
& - \frac{1}{1+\mu} W'_*(x) - \frac{1}{\pi\mu_1(1+\mu)} \int_{-a}^a \frac{T_*(s) ds}{s-x} - \frac{1}{\pi\mu_1(1+\mu)} \int_b^c \frac{T_{**}(s) ds}{s-x} + \\
& + \int_{-a}^a K_{3,2}(s-x) W'_*(s) ds + \int_{-a}^a K_{3,3}(s-x) T_*(s) ds + \int_b^c K_{3,3}(s-x) T_{**}(s) ds = 0 \\
& - \frac{1}{\pi\mu_1(1+\mu)} \int_{-a}^a \frac{T_*(s) ds}{s-x} - \frac{1}{\pi\mu_1(1+\mu)} \int_b^c \frac{T_{**}(s) ds}{s-x} + \int_{-a}^a K_{3,2}(s-x) W'_*(s) ds + \\
& + \int_{-a}^a K_{3,3}(s-x) T_*(s) ds + \int_b^c K_{3,3}(s-x) T_{**}(s) ds = 0; \quad (b < x < c)
\end{aligned} \tag{1.12}$$

а условия (1.11) - вид:

$$\int_{-a}^a T_*(x) dx = -T_0; \quad \int_b^c T_{**}(x) dx = 0; \quad \int_{-a}^a W'(x) dx = 0; \tag{1.13}$$

Чтобы решить полученную систему определяющих уравнений (1.12) приведём её к каноническому виду. Для этого умножим первое уравнение (1.12) на $\pm\sqrt{\mu}/\mu_2$ и суммируем со вторым уравнением. В итоге, введя новые безразмерные искомые функции по формулам

$$\Phi_1(x) = T_{**}(x)/\mu_2; \quad \Phi_j(x) = W'(x) + (-1)^j \sqrt{\mu} T_*(x)/\mu_2 \quad (j = 2, 3) \tag{1.14}$$

придём к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\int_{-1}^1 \psi_1(x) dx = 0; \quad \int_{-1}^1 \psi_j(x) dx = T_j^* \quad (j = 2, 3) \quad (1.18)$$

где

$$\psi_1(x) = \varphi_1(px + q); \quad \psi_j(x) = \varphi_j(ax);$$

$$T_j^* = (-1)^{j+1} \sqrt{\mu} T_0 / (a\mu_2); \quad (j = 2, 3)$$

$$Q_{11}(\tau, t) = pR_{11}(p(\tau - t)); \quad Q_{1i}(\tau, t) = aR_{1i}(a\tau - pt - q); \quad (i = 2, 3)$$

$$Q_{j1}(s, x) = pR_{j1}(p\tau + q - at); \quad Q_{ji}(s, x) = aR_{ji}(a(\tau - t)) \quad (i, j = 2, 3)$$

Нетрудно установить, что в точках ± 1 функция $\psi_1(t)$ имеет корневую особенность, а функции $\psi_j(t)$ ($j = 2, 3$) – иные степенные особенности и их можно представить в следующих видах:

$$\psi_1(t) = \frac{\Psi_1^*(t)}{\sqrt{1-t^2}}; \quad \psi_2(t) = \frac{\Psi_2^*(t)}{(1+t)^\gamma(1-t)^{1-\gamma}}; \quad \psi_3(t) = \frac{\Psi_3^*(t)}{(1+t)^{1-\gamma}(1-t)^\gamma}. \quad (1.19)$$

При этом

$$\gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{\mu}}{1-\mu} \quad \text{при } (\mu < 1), \quad \gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{\mu}}{\mu-1} \quad \text{при } (\mu > 1), \quad \text{а}$$

$\Psi_j^*(x)$ – непрерывные функции, ограниченные в замкнутом интервале $[-1, 1]$.

Подставляя выражения функций $\psi_j(x)$ ($j = 1-3$) из (1.19) в систему (1.17) и условия (1.18), используя квадратурные формулы, приведённые в [12], по стандартной процедуре, придём к системе из $3n$ алгебраических уравнений относительно значений $\Psi_j^*(t)$ ($j = 1-3$) в точках коллокации ξ_i ($i = \overline{1, n}$). После чего при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа нетрудно восстановить функции $\psi_j(t)$ ($j = 1-3$) и определить все необходимые величины, характеризующие напряжённо-деформированное состояние в слоях. Таковыми являются раскрытие трещины, контактные напряжения под включениями и коэффициенты разрушающих напряжений в концевых точках трещины.

Приведём формулы для определения коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины. Для этого используем второе из соотношений (1.9) при ($|x| > a$). Далее, учитывая, что вне трещины и включений $W(x) = T(x) \equiv 0$, сформулируем это соотношение на интервале $(-1, 1)$ при помощи функций $\psi_j(t)$. Тогда, для определения безразмерных разрушающих напряжений вне дефектов получим формулу:

$$\tau_*(t) = \frac{\tau_{yz}^{(1)}(at, 0)}{\mu_2} = \frac{\tau_{yz}^{(2)}(at, 0)}{\mu_2} = \frac{1}{2\pi(1+\mu)} \int_{-1}^1 \frac{[\psi_2(\tau) + \psi_3(\tau)] d\tau}{\tau - t} + F(t) \quad (1.20)$$

где ограниченная в конечных точках интервала $(-1, 1)$ функция $F(t)$ определяется следующей формулой:

$$F(t) = \frac{1}{\mu_2} \int_{-1}^1 K_{2,3}(p\tau + q - at) \psi_1(\tau) d\tau + \frac{1}{2\mu_2} \int_{-1}^1 K_{22}(a(\tau - t)) [\psi_2(\tau) + \psi_3(\tau)] ds + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \int_{-1}^1 K_{23}(a(\tau - t)) [\psi_2(\tau) - \psi_3(\tau)] d\tau.$$

Подставляя выражения функций $\psi_2(t)$ и $\psi_3(t)$ из (1.9) в (1.20) и учитывая соотношение [13]

$$\int_a^b \frac{(x-a)^{\alpha-1} (b-x)^{-\alpha}}{x-y} dx = \frac{\pi}{(b-y) \sin \pi\alpha} \left| \frac{a-y}{b-y} \right|^{\alpha-1};$$

$$(0 < \text{Re} \alpha < 1; y < a < b; a < b < y)$$

безразмерные напряжения $\tau_*(x)$ представим в виде:

$$\tau_*(t) = \frac{\text{sgn}(t)}{2(1+\mu) \sin \pi\gamma} \left\{ \frac{\psi_2^*(\pm 1)}{|1+t|^\gamma |1-t|^{1-\gamma}} + \frac{\psi_3^*(\pm 1)}{|1+t|^{1-\gamma} |1-t|^\gamma} \right\} + F_*(t),$$

где $F_*(t)$ — ограниченная функция на обоих концах трещины.

С другой стороны, в случае $\mu < 1$, так как $\gamma < 1/2$, то особенность функции $\tau_*(\eta)$ в точке $x=a(t=1)$ определяется первым слагаемым, а в точке $x=-a(t=-1)$ вторым слагаемым. И наоборот, в случае $\mu > 1$. Следовательно, амплитуды комплексных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в конечных точках трещины в случае $\mu < 1$ будут даваться формулами:

$$K_{III}^*(a) = \frac{K_{III}^{(1)}(a) + iK_{III}^{(2)}(a)}{\mu_2} = \sqrt{2\pi} \lim_{t \rightarrow 1+0} |t-1|^{1-\gamma} \tau_*(t) = \frac{2^{-\gamma-1} \sqrt{\pi} \psi_2^*(1)}{(1+\mu) \sin \pi\gamma};$$

$$K_{III}^*(-a) = \frac{K_{III}^{(1)}(-a) + iK_{III}^{(2)}(-a)}{\mu_2} = \sqrt{2\pi} \lim_{t \rightarrow -1-0} |t+1|^{1-\gamma} \tau_*(t) = -\frac{2^{-\gamma-1} \sqrt{\pi} \psi_3^*(-1)}{(1+\mu) \sin \pi\gamma}.$$

Тогда для комплексных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений имеем:

$$K_{III}(c, t) = K_{III}^*(c) e^{i\omega t} = |K_{III}^*(c)| e^{i(\omega t - \delta)} \left(\delta = -\text{arctg} \left(K_{III}^{(2)} / K_{III}^{(1)}; c = \mp a \right) \right).$$

Аналогичным образом можно определить коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений и в случае $\mu > 1$.

Амплитуды безразмерного раскрытия трещины определим по формуле:

$$W_*(t) = W(at) / a = \frac{1}{2} \int_{-1}^t [\psi_2(\xi) + \psi_3(\xi)] d\xi.$$

Приведем также формулу для определения безразмерных контактных напряжений, действующих под включением, припаянным к одному из берегов трещины, $T_*(x)$. Учитывая, что $\tau_{yz}^{(1)}(x, 0) = 0$, когда $(-a < x < a)$, в указанном интервале будем иметь $T_*(x) = -\tau_{yz}^{(2)}(x, 0)$, записав которое на интервале $(-1, 1)$ при помощи функций $\psi_j(t)$ ($j = 2, 3$), для определения безразмерных контактных напряжений получим формулу:

$$\tau(t) = \frac{\tau_{yz}^{(2)}(at, 0)}{\mu_2} = -\frac{T_*(at, 0)}{\mu_2} = -\frac{\psi_2(t) - \psi_3(t)}{2\sqrt{\mu}} \quad (-1 < t < 1)$$

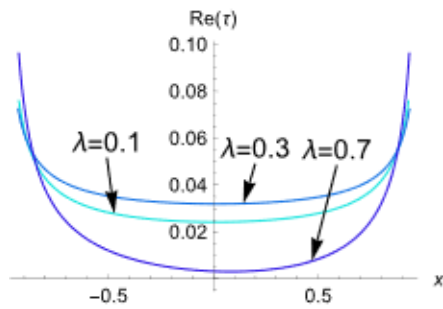
Отметим также, что безразмерные контактные напряжения, действующие на длинных сторонах полностью сцепленного с матрицей включения можно определить при помощи второй формулы (1.9), записав её на интервале $(-1, 1)$ при помощи функций $\psi_j(t)$ ($j = 1-3$).

Численные расчёты

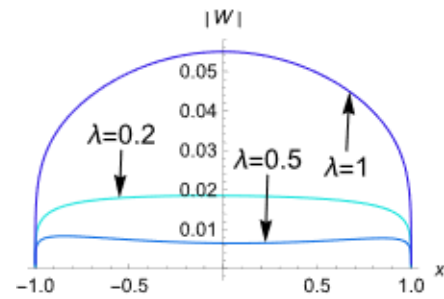
Проведён численный расчёт и изучены закономерности изменения действительных частей амплитуд раскрытия трещины, контактных напряжений под частично оторванным от матрицы включением и коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в зависимости от частоты вынужденных колебаний, от соотношения модулей сдвига слоев и от места расположения полностью сцепленного включения.

Расчёты проводились в случае, когда ширина частично оторванной от матрицы включения равна ширине включения и высоте первого слоя, а высота второго слоя в два раза больше высоты первого слоя, т.е. когда $a/h_1 = p/h_1 = 1$; $h_2/h_1 = 2$, $q/h_1 = 3$; $c_2^{(1)}/c_2^{(2)} = 2$. При этом принято $T_j^* = (-1)^{j+1} 0.1$, $\mu = 2/3$ и изучены закономерности изменения абсолютных величин модулей безразмерных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины, а также раскрытия трещины, действительных частей контактных напряжений под частично оторванным от матрицы включением и скачка напряжений на длинных сторонах полностью сцепленного включения в зависимости от приведённой частоты вынужденных колебаний $\lambda = h_1\omega/c_2^{(1)}$.

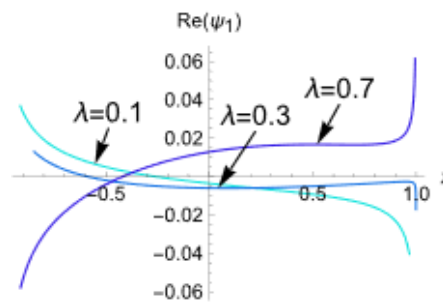
Результаты численных расчётов приведены в виде графиков Фиг.3-5 и таблицы 1



Фиг. 3



Фиг.4



Фиг.5

Таблица 1

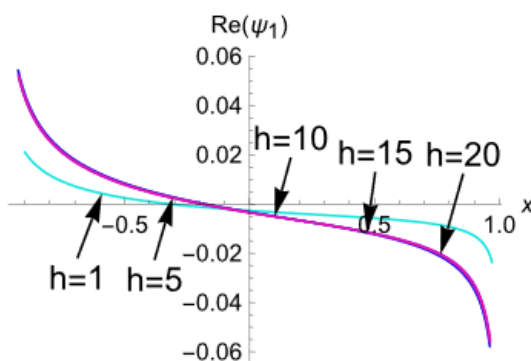
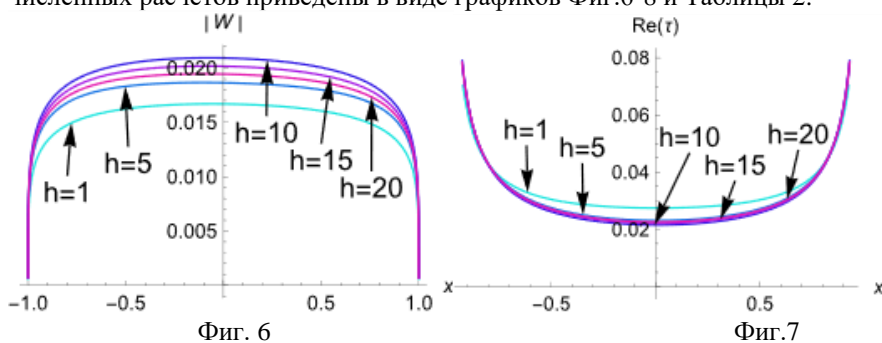
λ	0.2	0.3	0.5	0.7	1
$ K_{III}(1) $	0.01373	0.01527	0.02356	0.00391	0.01412
$ K_{III}(-1) $	0.01426	0.01447	0.02422	0.00533	0.00969

Из них явствует, что при увеличении частоты вынужденных колебаний абсолютная величина амплитуды раскрытия трещины сначала уменьшается, а затем возрастает (Фиг.3). При этом происходит перераспределение действительных частей амплитуд контактных напряжений под частично оторванным включением и скачка контактных напряжений, действующих на длинных сторонах полностью сцеплённого включения. Контактные напряжения под частично оторванным включением в средней части контактной зоны сначала увеличиваются, а затем уменьшаются (Фиг.4). Что же касается действительной части скачка контактных напряжений, действующих под включением, то они при увеличении параметра λ меняют знак (Фиг.5).

В таблице 1 приведены значения модулей амплитуд безразмерных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках частично оторванного включения. Они показывают, что при увеличении частоты вынужден-

ных колебаний коэффициенты интенсивности напряжений на обоих концах трещины сначала увеличиваются, а затем, колеблясь, уменьшаются.

Изучены также изменения указанных выше величин, в зависимости от соотношения $h = h_2 / h_1$ при тех же значениях характеристик, когда $\lambda = 0.2$. Результаты численных расчётов приведены в виде графиков Фиг.6-8 и Таблицы 2.



Фиг.8

Таблица 2

h	1	3	5	10	15
$ K_{III}(1) $	0.01377	0.01380	0.01427	0.01256	0.01306
$ K_{III}(-1) $	0.01408	0.01435	0.01481	0.01313	0.01306

Они показывают, что при увеличении параметра h , что можно трактовать как увеличение высоты второго слоя h_2 , абсолютная величина амплитуды раскрытия трещины возрастает и, колеблясь, стремится к определённому пределу (Фиг.6). Действительные части контактных напряжений под частично оторванным включением до значения $h = 5$ в средней части контактной зоны уменьшаются, а по краям возрастают (Фиг.7). Действительные же части скачка контактных напряжений,

действующих под включением, по абсолютной величине возрастают (Фиг.8). Дальнейшее возрастание h почти не влияет на распределение контактных напряжений и скачка контактных напряжений.

В таблице 2 приведены значения модулей амплитуд безразмерных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках частично оторванного от матрицы включения. Из них явствует, что при возрастании параметра h модули амплитуд безразмерных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений сначала возрастают, а затем, колеблясь, стремятся к определённому пределу.

Заключение

Исследованы закономерности взаимовлияния различных типов межфазных дефектов, находящихся в кусочно-однородном двухкомпонентном слое с заземлённым одним основанием, находящемся под воздействием периодически изменяющихся во времени нагрузок. Выведена определяющая система сингулярных интегральных уравнений задачи и, в частном случае, когда составной слой содержит одно полностью сцеплённое включение и одно включение, одна из длинных сторон которого оторвана от матрицы, построено решение задачи методом механических квадратур. Приведены простые формулы для определения коэффициентов интенсивности в концевых точках трещины, контактных напряжений и раскрытия трещины. Проведён численный расчёт и изучены закономерности изменения важных механических характеристик задачи в зависимости от физико-механических и геометрических характеристик задачи. Показано, что, когда высота слоя, одно основание которого заземлено, увеличивается, возрастают действительные части контактных напряжений под частично оторванным включением, скачки контактных напряжений, действующих под включением, и абсолютная величина амплитуды раскрытия трещины, стремясь к определённым пределам, соответствующим случаю кусочно-однородного полупространства.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОНКС РА в рамках научного проекта 25RG-2C221.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабешко В.А. К проблеме динамического разрушения трещиноватых слоистых тел // ДАН СССР. 1989. Т. 207. № 2. С. 324–327.
2. Бабешко В.А. Среды с неоднородностями (случай совокупности включений и неоднородностей) // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 5–9.
3. Бабешко В.А., Павлова А.В., Ратнер С.В., Вильямс Р.Т. К решению задачи о вибрации упругого тела, содержащего систему внутренних полостей // ДАН. 2002. Т. 382. № 5. С. 625–628.
4. Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 500–507.

5. Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Акопян Л.В. Вынужденные сдвиговые колебания штампа на границе составного полупространства с межфазными дефектами // Известия НАН РА, Механика, т.72, № 2, 2019г, с. 6-23.
6. Hakobyan V.N., Sahakyan A.V., Sargsyan A.H. The plane deformation state of elastic plane with finite rigid inclusion under harmonic loading. // Proceedings of the Twelfth International Conference on Composites or Nano Engineering, ICCE-12 August 1-6, 2005, Spain.
7. Акопян В. Н., Саргсян А.О. Об одной динамической смешанной задаче для составного пространства с трещиной при антиплоской деформации. //В сб статей «Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести», посв. 75 летию академика М. А. Задосяна, Ереван, «Гитутюн» 2006, с. 50-56.
8. Амирджанян А.А., Акопян Л.В. Антиплоская динамическая контактная задача для составного полупространства с межфазной трещиной. // Сб. трудов 9-ой между. конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», октябрь 1-6, 2018, Горис, с 44-48.
9. Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A. and Dashtoyan L.L. Forced shift vibrations of stamp on the border of composite half-space with interfacial partially detached thin inclusions from the matrix //Journal of Physics: Conference Series, 2020, volume 1474 <https://iopscience.iop.org/issue/1742-6596/1474/1>
10. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа.-Н: Мир, 1962г., 279ст.
11. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. //изд-во Наука, Москва 1977г., 288ст.
12. A.V.Sahakyan and H.A.Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012070 doi :10.1088/1742-6596/991/1/012070
13. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integrals and series. Moscow. Nauka. 1981. 738p. (In Russian).

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович -доктор физ.-мат. наук., проф., главный научный сотрудник Института механики НАН РА, тел.: (37410) 52-48-90, e-mail: vhakobyan@sci.am

Амирджанян Арутюн Арменович – кандидат физ.-мат. наук., ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА, тел.: (37410) 52-48-90, e-mail: amirjanyan@gmail.com

Саакян Сона Коляевна – аспирант Института механики НАН РА, (37410) 52-48-90, e-mail: sonasahakyan1999@gmail.com

Поступила в редакцию 3 марта 2026 г.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ПОПЕРЕЧНЫХ
КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ
ШАРНИРНОМ ОПИРАНИИ**

Арабян М. О., Оганисян З. Б.

Ключевые слова: поперечные колебания, балка переменного сечения, собственные частоты, шарнирное опирание, метод Фурье, бесконечная система уравнений.

Arabyan M. H., Oganisyan Z. B.

Determination of the Natural Frequencies of Transverse Vibrations of a Beam with Variable Cross-Section under Pinned Support

Keywords: transverse vibrations, variable cross-section beam, natural frequencies, pinned supports, Fourier method, infinite system of equations.

This paper addresses the problem of determining the natural frequencies of transverse vibrations of a beam with a variable cross-section and pinned support at its ends. The problem is reduced to a boundary value problem for a fourth-order ordinary differential equation with variable coefficients. To solve it, a method is proposed based on expanding the vibration mode into a Fourier sine series and the functions describing the geometric characteristics of the cross-section into cosine series. An infinite system of linear homogeneous algebraic equations was obtained relative to the expansion coefficients of the vibration mode. The condition for the existence of a non-trivial solution to this system allows for the determination of the natural frequencies. As an example, a beam with piecewise constant cross-section functions is considered. A numerical determination of the first four natural frequencies was performed by truncating the system to the fourth order. A comparison of the results with a solution found by the segment matching method confirmed the sufficient accuracy of the proposed technique.

Արաբյան Մ. Հ. Հովհաննիսյան Ջ. Բ.

Փոփոխական լայնական կտրվածք ունեցող հողակապորեն ամրացված եզրերով հեծանի սեփական լայնական տատանումների հաճախականությունների որոշումը

Հիմնաբաներ՝ լայնական տատանումներ, փոփոխական հատույթի հեծան, սեփական հաճախականություններ, հողակապ ամրացում, Ֆուրյեի մեթոդ, հավասարումների անվերջ համակարգ:

Դիտարկվում է հողակապորեն ամրացված եզրերով, փոփոխական լայնական կտրվածք ունեցող հեծանի լայնական տատանումների սեփական հաճախականությունների որոշման խնդիրը: Այն հանգեցվում է փոփոխական գործակիցներով չորրորդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարման համար եզրային խնդրի: Դրա լուծման համար առաջարկվում է մեթոդ, որը հիմնված է ամպլիտուդի՝ ըստ սինուսների Ֆուրյեի շարքի, իսկ հատույթի երկրաչափական բնութագրերը նկարագրող ֆունկցիաների՝ ըստ կոսինուսների շարքի վերլուծության վրա: Ստացվել է գծային համասեռ հանրահաշվական հավասարումների անվերջ համակարգ՝ ամպլիտուդի վերլուծության գործակիցների նկատմամբ: Համակարգի ոչ տրիվիալ լուծման գոյության պայմանը թույլ է տալիս որոշել սեփական հաճախականությունները: Որպես օրինակ դիտարկվել է կտոր առ կտոր հաստատուն լայնական կտրվածք ունեցող հեծան: Իրականացվել է առաջին չորս սեփական հաճախականությունների թվային որոշում՝ համակարգը մինչև չորրորդ կարգի կրճատելու միջոցով:

Ստացված արդյունքների համեմատությունը հայտնի մեթոդով ստացված լուծման հետ հաստատել է արաջարկված մեթոդի բավարար ճշտությունը:

Рассматривается задача определения собственных частот поперечных колебаний балки переменного сечения с шарнирным опиранием на концах. Задача сводится к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения четвёртого порядка с переменными коэффициентами. Для её решения предложен метод, основанный на разложении амплитуды колебаний в ряд Фурье по синусам, а функций, описывающих геометрические характеристики сечения, - в ряды по косинусам. Получена бесконечная система линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения амплитуды колебаний. Условие существования нетривиального решения системы позволяет определить собственные частоты. В качестве примера рассмотрена балка с кусочно-постоянными функциями изменения сечения. Выполнено численное определение первых четырёх собственных частот при усечении системы до четвёртого порядка. Проведено сравнение полученных результатов с решением, найденным методом стыковки участков, которое подтвердило достаточную точность предложенной методики.

Введение. В современном строительстве и машиностроении балки широко применяются в качестве несущих конструкций мостов, эстакад, покрытий, перекрытий, лестниц, площадок под оборудование и других инженерных сооружений. Одним из эффективных способов повышения несущей способности и снижения материалоемкости конструкций является использование балок переменного сечения по длине. Такое конструктивное решение позволяет более рационально распределить материал в соответствии с эпюрой внутренних усилий, что особенно актуально для большепролетных и динамически нагруженных элементов. В процессе эксплуатации элементы конструкций подвергаются различным видам динамических воздействий, включая вибрационные нагрузки, что обуславливает необходимость детального исследования их колебательного поведения. Особое значение при этом имеет определение собственных частот, поскольку совпадение частот вынужденных колебаний с собственными частотами конструкции может привести к явлению резонанса и, как следствие, к ее преждевременному разрушению.

Для балок постоянного сечения задача определения собственных частот поперечных колебаний имеет аналитическое решение, хорошо изучена и представлена в классической литературе [5]. Однако для балок переменного сечения, у которых площадь поперечного сечения и момент инерции изменяются по длине, решение значительно усложняется. Уравнение поперечных колебаний в этом случае представляет собой дифференциальное уравнение четвертого порядка с переменными коэффициентами, общее решение которого в элементарных функциях, как правило, отсутствует.

Существующие подходы к решению таких задач включают численные методы (например, метод конечных элементов), приближенные аналитические методы (метод Бубнова–Галеркина, метод Рэлея–Ритца), а также методы, основанные на разложении в ряды. В последние годы активно развиваются новые аналитические и вычислительные подходы. В работе [1] предложен метод пространства состояний для систем с переменным сечением, позволяющий свести задачу к матрице с

постоянными коэффициентами и упростить вычисление частот. В исследовании [2] используется Fourier-р-элемент (комбинация полиномов и тригонометрических функций), что позволяет избежать проблемы плохой обусловленности, характерной для методов высокого порядка. Кроме того, актуальными являются задачи оптимизации стержней с кусочно-постоянным сечением при ограничениях на собственные частоты [3, 4]. Каждый из перечисленных подходов имеет свои преимущества и ограничения, связанные с точностью, вычислительной сложностью и областью применимости.

В настоящей работе предлагается аналитический метод определения собственных частот поперечных колебаний балки переменного сечения при шарнирном опирании, основанный на разложении амплитуды колебаний в ряд Фурье по синусам, а функций изменения геометрических характеристик – в ряды по косинусам. Предлагаемый подход позволяет свести исходную краевую задачу к бесконечной системе линейных однородных алгебраических уравнений, из условия существования нетривиального решения которой определяются собственные частоты. Эффективность метода демонстрируется на примере ступенчатой балки с кусочно-постоянными функциями сечения – типичного объекта для современных оптимизационных задач [3, 4], а полученные результаты сопоставляются с решением, найденным методом стыковки участков. Достоверность результатов подтверждается сравнением с классическими подходами [5, 6], а также соответствием современным тенденциям развития аналитических методов [1, 2].

1. Постановка задачи. Рассмотрим балку длиной ℓ с шарнирным опиранием на концах, имеющую переменное поперечное сечение, постоянный модуль упругости E и плотность ρ . Предположим, что балка расположена в плоскости Oxy так, что ось Ox совпадает с продольной осью симметрии балки в её равновесном состоянии. Поперечные колебания балки задаются функцией $u(x, t)$, определяющей поперечное смещение точки балки с координатой x вдоль оси Oy в момент времени t относительно положения равновесия. Если для поперечного сечения с абсциссой x площадь и момент инерции равны соответственно $S(x)$ и $J(x)$, то уравнение поперечных колебаний балки имеет вид [5]

$$S(x)\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (1)$$

Площадь поперечного сечения $S(x)$ и момент инерции $J(x)$ можно представить в виде

$$S(x) = S_0 g(x), \quad 0 < g(x) \leq 1,$$

$$J(x) = J_0 f(x), \quad 0 < f(x) \leq 1.$$

В этом случае уравнение (1) примет вид

$$g(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(f(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (2)$$

где $a^2 = \frac{EJ_0}{S_0 \rho \ell^4}$, $x \in (0, 1)$ — безразмерная, деленная на ℓ координата.

Граничные условия в случае шарнирного закрепления на концах принимают следующий вид:

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, & \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0, \\ u(1, t) = 0, & \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=1} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Решение уравнения (2) будем искать в виде

$$u(x, t) = w(x) \cos \omega t. \quad (4)$$

Здесь $w(x)$ - амплитуда, ω - частота собственных поперечных колебаний.

Подстановка (4) в уравнение (2) для нахождения $w(x)$ приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(f(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \lambda^2 g(x) w = 0,$$

или

$$f(x) w^{IV} + 2f'(x) w''' + f''(x) w'' + \lambda^2 g(x) w = 0, \quad (5)$$

где $\lambda = \frac{\omega}{a}$ - безразмерная частота собственных колебаний.

Граничные условия для $w(x)$ из (3) и (4) записываются в виде

$$w(0) = 0, \quad w''(0) = 0, \quad w(1) = 0, \quad w''(1) = 0. \quad (6)$$

Требуется определить собственные частоты поперечных колебаний балки.

2. Вывод характеристического уравнения для определения собственных частот.

Для решения задачи (5)-(6) представим функции в виде рядов

$$w(x) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin m\pi x, \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos k\pi x, \quad (8)$$

$$g(x) = \frac{1}{2} g_0 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos k\pi x, \quad (9)$$

при этом условия (6) удовлетворяются тождественно. Здесь w_m - искомые коэффициенты разложения,

$$f_k = 2 \int_0^1 f(x) \cos k\pi x dx, \quad g_k = 2 \int_0^1 g(x) \cos k\pi x dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Подставив (7), (8) и (9) в уравнение (5), получим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos k\pi x \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} m^4 \pi^4 w_m \sin m\pi x \right) + \\ & + 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-k\pi f_k \sin k\pi x) \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} (-m^3 \pi^3 w_m \cos m\pi x) \right) + \\ & + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-k^2 \pi^2 f_k \cos k\pi x) \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} (-m^2 \pi^2 w_m \sin m\pi x) \right) + \\ & + \lambda^2 \left(\frac{1}{2} g_0 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos k\pi x \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin m\pi x \right) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Используя формулу произведения тригонометрических рядов

$$\left(\frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos k\pi x \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \sin m\pi x \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \sin k\pi x \right),$$

где

$$\gamma_m = (\alpha_0 - \alpha_{2m}) \beta_m + \sum_{k=1}^{m-1} (\alpha_{m-k} - \alpha_{m+k}) \beta_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} (\alpha_{k-m} - \alpha_{k+m}) \beta_k,$$

члены левой части уравнения (10) преобразуются следующим образом.

Первое слагаемое:

$$\left(\frac{1}{2} f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos k\pi x \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} m^4 \pi^4 w_m \sin m\pi x \right) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin m\pi x, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} A_m = & m^4 \pi^4 (f_0 - f_{2m}) w_m + \pi^4 \sum_{k=1}^{m-1} k^4 (f_{m-k} - f_{m+k}) w_k + \\ & + \pi^4 \sum_{k=m+1}^{\infty} k^4 (f_{k-m} - f_{k+m}) w_k. \end{aligned} \quad (12)$$

Второе слагаемое преобразуется следующим образом:

$$2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-k\pi f_k \sin k\pi x) \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} (-m^3 \pi^3 w_m \cos m\pi x) \right) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin m\pi x, \quad (13)$$

где

$$B_m = -16m^3\pi^4 f_m w_{2m} + 2\pi^4 \sum_{k=1}^{m-1} k \left((m-k)^3 w_{m-k} - (m+k)^3 w_{m+k} \right) f_k +$$

$$+ 2\pi^4 \sum_{k=m+1}^{\infty} k \left((k-m)^3 w_{k-m} - (k+m)^3 w_{k+m} \right) f_k. \quad (14)$$

Третье слагаемое преобразуется аналогично:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (-k^2 \pi^2 f_k \cos k\pi x) \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} (-m^2 \pi^2 w_m \sin m\pi x) \right) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin m\pi x, \quad (15)$$

где

$$C_m = -4m^4 \pi^4 f_{2m} w_m + \pi^4 \sum_{k=1}^{m-1} k^2 \left((m-k)^2 f_{m-k} - (m+k)^2 f_{m+k} \right) w_k +$$

$$+ \pi^4 \sum_{k=m+1}^{\infty} k^2 \left((k-m)^2 f_{k-m} - (k+m)^2 f_{k+m} \right) w_k. \quad (16)$$

Четвертое слагаемое:

$$\left(\frac{1}{2} g_0 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos k\pi x \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin m\pi x \right) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} D_m \sin m\pi x, \quad (17)$$

где

$$D_m = (g_0 - g_{2m}) w_m + \sum_{k=1}^{m-1} (g_{m-k} - g_{m+k}) w_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} (g_{k-m} - g_{k+m}) w_k. \quad (18)$$

Суммируя все слагаемые, уравнение (10) принимает вид:

$$\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (A_m + B_m + C_m + \lambda^2 D_m) \sin m\pi x = 0.$$

В силу линейной независимости функций $\sin m\pi x$ на $(0, 1)$, получаем бесконечную систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно w_m :

$$A_m + B_m + C_m + \lambda^2 D_m = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (19)$$

Условием существования нетривиального решения полученной бесконечной системы является равенство нулю её бесконечного определителя [6]. Из этого условия определяются значения приведённой частоты собственных поперечных колебаний.

Подставляя в уравнение (10) выражения для A_m, B_m, C_m, D_m , запишем систему в развернутом виде:

$$\begin{aligned}
& m^4 \pi^4 (f_0 - f_{2m}) w_m + \pi^4 \sum_{k=1}^{m-1} k^4 (f_{m-k} - f_{m+k}) w_k + \pi^4 \sum_{k=m+1}^{\infty} k^4 (f_{k-m} - f_{k+m}) w_k - \\
& - 16m^3 \pi^4 f_m w_{2m} + 2\pi^4 \sum_{k=1}^{m-1} k \left((m-k)^3 w_{m-k} - (m+k)^3 w_{m+k} \right) f_k + \\
& + 2\pi^4 \sum_{k=m+1}^{\infty} k \left((k-m)^3 w_{k-m} - (k+m)^3 w_{k+m} \right) f_k - \\
& - 4m^4 \pi^4 f_{2m} w_m + \pi^4 \sum_{k=1}^{m-1} k^2 \left((m-k)^2 f_{m-k} - (m+k)^2 f_{m+k} \right) w_k + \\
& + \pi^4 \sum_{k=m+1}^{\infty} k^2 \left((k-m)^2 f_{k-m} - (k+m)^2 f_{k+m} \right) w_k + \\
& + \lambda^2 \left((g_0 - g_{2m}) w_m + \sum_{k=1}^{m-1} (g_{m-k} - g_{m+k}) w_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} (g_{k-m} - g_{k+m}) w_k \right) = 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

Для практического решения задачи производится усечение системы до некоторого конечного порядка N , что приводит к обобщенной проблеме собственных значений:

$$\mathbf{K} \mathbf{w} = \lambda^2 \mathbf{M} \mathbf{w}, \tag{21}$$

где \mathbf{K} и \mathbf{M} - матрицы, элементы которых выражаются через коэффициенты Фурье f_k, g_k , и номера n, k . Приравняв нулю определитель матрицы $A(\lambda) = \mathbf{K} - \lambda^2 \mathbf{M}$, находят приближенные значения собственных частот λ , а затем искомые частоты $\omega = \lambda a$.

3. Применение метода к ступенчатой балке.

Рассмотрим балку, состоящую из трёх частей, жёстко соединённых друг с другом. Поперечные сечения первой и третьей частей представляют собой квадраты со стороной a . Они занимают отрезки $[0, 1/4]$ и $[3/4, 1]$ на оси Ox . Поперечное сечение второй части представляет собой прямоугольник со сторонами a, h и занимает отрезок $[1/4, 3/4]$. Пусть, например, $a = 6 \text{ см}$, $h = 8 \text{ см}$. Тогда

$$S(x) = \begin{cases} a^2 = 36 \text{ см}^2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ ah = 48 \text{ см}^2, & \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}, \\ a^2 = 36 \text{ см}^2, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad J(x) = \begin{cases} a^4 / 12 = 108 \text{ см}^4, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ ah^3 / 12 = 256 \text{ см}^4, & \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}, \\ a^4 / 12 = 108 \text{ см}^4, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(22)

В таком случае $S_0 = 48 \text{ см}^2$, $J_0 = 256 \text{ см}^4$, и функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют вид

$$g(x) = \begin{cases} \bar{g}_1 = \frac{3}{4}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ \bar{g}_2 = 1, & \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}, \\ \bar{g}_1 = \frac{3}{4}, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \bar{f}_1 = \frac{27}{64}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ \bar{f}_2 = 1, & \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}, \\ \bar{f}_1 = \frac{27}{64}, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Соответствующие коэффициенты Фурье равны

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{7}{4}, & g_k &= -\frac{1}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{4} \cos \frac{k\pi}{2}, \\ f_0 &= 1 \frac{27}{64}, & f_k &= \frac{37}{16k\pi} \sin \frac{k\pi}{4} \cos \frac{k\pi}{2}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

Для численного определения собственных частот воспользуемся усечением системы (20) при $N = 4$. В результате вычислений получены следующие приближённые значения первых четырёх собственных частот:

$$\lambda_1 = 9,78, \quad \lambda_2 = 38,01, \quad \lambda_3 = 85,74, \quad \lambda_4 = 152,44. \quad (24)$$

Следует отметить, что увеличение числа членов N повышает точность получаемых результатов.

Для данного примера возможно также решение прямым методом. Пусть $V(x, t)$ смещение точки балки при $x \in [0, 1/4]$ или $x \in [3/4, 1]$, а $W(x, t)$ - при $x \in [1/4, 3/4]$. Будем искать эти функции в виде

$$V(x, t) = v(x) \cos \omega t, \quad W(x, t) = w(x) \cos \omega t,$$

для определения $v(x)$ и $w(x)$ получаются уравнения

$$\bar{f}_1 v^{IV} + \lambda^2 \bar{g}_1 v = 0, \quad \bar{f}_2 w^{IV} + \lambda^2 \bar{g}_2 w = 0, \quad (25)$$

при следующих условиях:

- граничные условия:

$$v(0) = 0, \quad v''(0) = 0, \quad (26)$$

- контактные условия:

$$v(1/4) = w(1/4), \quad v'(1/4) = w'(1/4), \quad (27)$$

$$\bar{g}_1 v''(1/4) = \bar{g}_2 w''(1/4), \quad \bar{g}_1 v'''(1/4) = \bar{g}_2 w'''(1/4), \quad (28)$$

- условия симметрии (для нахождения нечётных по номеру частот):

$$w'(1/2) = 0, \quad w'''(1/2) = 0, \quad (29)$$

- условия антисимметрии (для нахождения чётных по номеру частот):

$$w(1/2) = 0, \quad w''(1/2) = 0. \quad (30)$$

Общие решения уравнений (25) представляются в виде

$$v(x) = c_1 \operatorname{ch} \mu x + c_2 \operatorname{sh} \mu x + c_3 \cos \mu x + c_4 \sin \mu x,$$

$$w(x) = c_5 \operatorname{ch} \nu x + c_6 \operatorname{sh} \nu x + c_7 \cos \nu x + c_8 \sin \nu x,$$

где $c_i, i = 1, 2, \dots, 8$ - произвольные постоянные,

$$\mu = \sqrt[4]{\frac{\bar{g}_1 \lambda^2}{f_1}} = \sqrt{\frac{4\lambda}{3}}, \quad \nu = \sqrt[4]{\frac{\bar{g}_2 \lambda^2}{f_2}} = \sqrt{\lambda}.$$

Из условий (26), (27), (28), (29) или (26), (27), (28), (30) получается однородная система алгебраических уравнений относительно неизвестных $c_i, i = 1, 2, \dots, 8$.

Приравнивая нулю определитель этой системы, находим частоты собственных колебаний.

Здесь для первых четырех значений λ получаем

$$\lambda_1 = 9,87, \quad \lambda_2 = 39,55, \quad \lambda_3 = 88,86, \quad \lambda_4 = 158,04. \quad (31)$$

Сравнение результатов двух методов, т.е. сравнение (24) и (31) показывает достаточную точность применяемой в работе методики определения частот собственных колебаний балки с переменным сечением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Li Y., Guo H., Xiong F., et al. A State-Space Method for Vibration of Double-Beam Systems with Variable Cross Sections // Journal of Engineering Mechanics. – 2024. – Vol. 150, No. 11. – P. 04024083.
2. Khan M. T., Singh A. P. Free Vibration Frequencies of a Variable Cross-Section Timoshenko-Ehrenfest Beam using Fourier-p Element // Arabian Journal for Science and Engineering. – 2024. – Vol. 49. – P. 2831–2851.
3. Lyakhovich L., Akimov P., Tukhfatullin B. Assessment Criteria of Optimal Solutions for Creation of Rods with Piecewise Constant Cross-Sections with Stability Constraints or Constraints for Value of the First Natural Frequency. Part 1: Theoretical Foundations // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2019. – Vol. 15, No. 4. – P. 88-100.
4. Ляхович Л. С., Акимов П. А., Тухфатуллин Б. А. Об одной задаче оптимизации конструкций с учетом требований устойчивости, прочности, при ограничениях первой частоты собственных колебаний // Вестник Российской академии архитектуры и строительных наук. – 2020. – № 4. – С. 76-82.
5. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
6. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. – М.–Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.

Сведения об авторах.

Арабян Мариам Овсеповна - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры численного анализа и моделирования ЕГУ, тел.: +374 93898324, e-mail: arabyan.mariam@ysu.am

Оганесян Зограб Багратович - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры численного анализа и моделирования ЕГУ, тел.: +374 91324408, e-mail: zorhh@ysu.am

Поступила в редакцию 12 апреля 2026г.

**ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ РЕБРИСТОЙ
КОМПОЗИТНОЙ ПЛАСТИНЫ**

Белубекян Э.В., Геворкян Г.З., Дарбинян А.З., Амирджанян А.А.

Ключевые слова: поперечный изгиб, температура, композиционный материал, упругое ребро, полубесконечная пластина-полоса.

Belubekyan E.V., Gevorgyan G.Z., Darbinyan A.Z., Amirjanyan H.A.
Thermoelasticity Problem for a Semi-Infinite Ribbed Composite Plate

Keywords: transverse bending, temperature, composite material, elastic rib, semi-infinite plate-strip.

A study was conducted on the bending of a semi-infinite orthotropic composite plate, hinged along its long sides and reinforced along its free side with an elastic rib, under the action of a uniformly distributed in the longitudinal direction normal load in the presence of a stationary temperature field of a given type. Assuming that the bending caused by the temperature field is opposite to the bending caused by a uniformly distributed normal load, it was found that uniform load can, with a certain degree of accuracy, compensated the temperature-induced bending only on part of the plate. It was shown that to completely neutralize the influence of temperature on plate bending, it is necessary to apply bending moments of appropriate magnitudes to the hinged sides and to the rib.

Բեռնակրկայան Է.Վ., Գևորգյան Գ.Զ., Դարբինյան Ա.Զ., Ամիրջանյան Ա. Ա.
Չերմաստաճակայան խնդիր կողով ուժեղացված կիսասանվերջ կոմպոզիտ սալի համար

Հիմնաբաներ՝ ընդլայնական ծռում, ջերմաստիճան, կոմպոզիտային նյութ, առաձգական կող, կիսասանվերջ սալ-շերտ:

Ուսումնասիրվել է կիսասանվերջ օրթոտրոպ կոմպոզիտային սալի ծռումը, որը ազատ հենված է իր երկար կողմերի երկայնքով և ազատ կողմի երկայնքով ուժեղացված է առաձգական կողով, երկայնական ուղղությամբ հավասարաչափ բաշխված նորմալ բեռի ազդեցության տակ տրված տիպի ստացիոնար ջերմաստիճանային դաշտի առկայության դեպքում: Ենթադրելով, որ ջերմաստիճանային դաշտի առաջացրած ծռումը հակառակ է հավասարաչափ բաշխված նորմալ բեռի առաջացրած ծռմանը, պարզվել է, որ հավասարաչափ բեռի կիրառմամբ ջերմաստիճանից առաջացած ծռումը կարող է որոշակի ճշգրտությամբ չեղարկվել միայն սալի մի մասի համար: Ցույց է տրվել, որ ջերմաստիճանի ազդեցությունը սալի ծռման վրա լիովին չեզոքացնելու համար անհրաժեշտ է համապատասխան մեծությունների ծող մոմենտներ կիրառել ազատ հենված կողմերին և կողին:

Проведено исследование изгиба шарнирно опертой по длинным сторонам полубесконечной ортотропной пластины из композиционного материала, усиленной по свободной стороне упругим ребром, под действием равномерной распределенной в продольном направлении нормальной нагрузки при наличии стационарного температурного поля заданного типа. Предполагая, что изгиб, обусловленный температурным полем, происходит противоположно изгибу от действия нормальной равномерно распределенной нормальной нагрузки, выяснено, что температурный изгиб, с определенной степенью точности, можно компенсировать равномерной нагрузкой лишь на части пластины. Показано, что для полной нейтрализации влияния температуры на изгиб пластины необходимо на шарнирно-опертых сторонах и к ребру приложить изгибающие моменты соответствующих величин.

Введение. Композитные пластины, усиленные ребрами жесткости, отличающиеся небольшим весом при высокой прочности, являются широко распространенными конструкционными элементами в промышленности, особенно в авиастроении и судостроении. В связи с этим совершенно не удивительно, что исследованию прочностных и деформативных свойств таких пластин при изгибе, при наличии температурного или электромагнитного поля, их несущей способности и устойчивости при обтекании газом или жидкостью посвящено очень большое число работ. Отметим лишь некоторые из последних работ [1-11].

В настоящей работе определяется напряженно-деформированное состояние полубесконечной прямоугольной композитной пластинки, усиленной на краю ребром жесткости, при одновременном действии поперечной нагрузки и температурного поля. Произведен численный анализ полученных результатов. Проведено исследование возможности компенсации прогиба, вызванного температурным полем, равномерно распределенной нагрузкой.

Постановка задачи. Рассматривается полубесконечная прямоугольная пластинка в прямоугольной системе координат $Oxyz$, занимающая область $\{0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq b, -h/2 \leq z \leq h/2\}$. Пластина шарнирно оперта по продольным, полубесконечным, кромкам $y=0, b$, а на кромке $x=0$ подкреплена ребром жесткости. Ребро имеет прямоугольное сечение размерами $\kappa h_1 \times h_1$ ($\kappa \leq 1, h < h_1$) и упругие модули E_r, G_r (фиг.1).

Пластина изготовлена из монослоев ортотропного композиционного материала, поочередно уложенных под углами $\pm\varphi$ к оси абсцисс, и имеет толщину h . Монослой имеет модули упругости E_1, E_2 , коэффициенты Пуассона ν_1, ν_2 , коэффициенты линейного расширения $\alpha_{1t}^0, \alpha_{2t}^0$ и модуль сдвига G , при этом, как известно [12-14], для ортотропного материала имеет место условие симметрии упругих постоянных $E_1\nu_2 = E_2\nu_1$.

Упругие характеристики пластинки B_{ik} ($i, k = 1, 2, 6$) и коэффициенты температурного расширения α_{1t}, α_{2t} в направлениях Ox, Oy определяются через соответствующие упругие характеристики монослоя по формулам [12-14]:

$$B_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2} \left[\cos^4 \varphi + 2(\nu_2 + 2(1 - \nu_1\nu_2)G_*) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + E_{2*} \sin^4 \varphi \right]$$

$$B_{22} = \frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2} \left[\sin^4 \varphi + 2(\nu_2 + 2(1 - \nu_1\nu_2)G_*) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + E_{2*} \cos^4 \varphi \right]$$

$$B_{12} = \frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2} \left\{ \nu_2 + \left[1 + E_{2*} - 2\nu_2 - 4(1 - \nu_1\nu_2)G_* \right] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \right\}$$

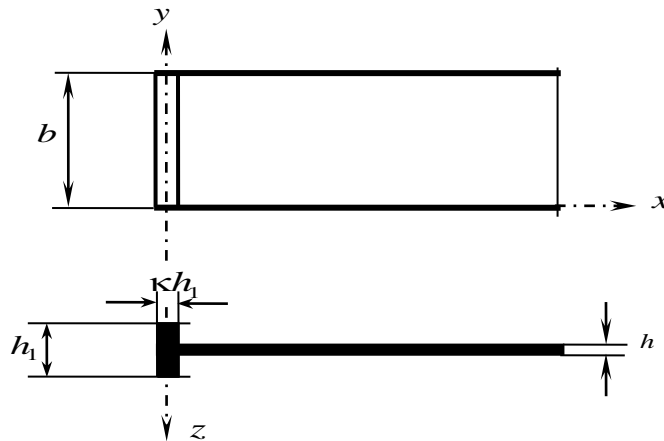
$$\begin{aligned}
B_{66} &= \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2} \left[G_* (1-\nu_1\nu_2) + [1 + E_{2*} - 2\nu_2 - 4(1-\nu_1\nu_2)G_*] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \right] \\
\alpha_{1t} &= \alpha_{1t}^0 \cos^2 \varphi + \alpha_{2t}^0 \sin^2 \varphi, \\
\alpha_{2t} &= \alpha_{1t}^0 \sin^2 \varphi + \alpha_{2t}^0 \cos^2 \varphi
\end{aligned} \tag{1}$$

где

$$E_{2*} = \frac{E_2}{E_1}; \quad G_* = \frac{G}{E_1}.$$

Предполагается, что пластинка находится под действием поперечной нагрузки $q(y)$ в направлении оси Oz , при наличии стационарного температурного поля $T^*(x, y, z) = T_{cp} + T(x, y, z)$, где T_{cp} температура окружающей среды.

Ставится задача определения напряженно-деформированного состояния пластинки под воздействием двух разнородных внешних факторов: силового и теплового. Выяснить, возможно ли действие одного фактора компенсировать действием второго фактора.



Фиг.1 Схематическая иллюстрация пластинки

Основные уравнения и решение задачи. Скомпонованную из ортотропных монослоев пластинку также можно считать ортотропной, для которой уравнение изгиба пластинки при наличии температурного поля имеет вид [12,13]

$$\begin{aligned}
D_{11} \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} + \\
+ \frac{\partial^2 R_e^{(1)}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R_e^{(2)}(x, y)}{\partial y^2} = q(y)
\end{aligned} \tag{2}$$

где: $w = w(x, y)$ - прогиб пластинки, $D_{ik} = \frac{B_{ik} h^3}{12}$, $(i, k = 1, 2, 6)$ - цилиндрические жесткости пластинки, $R_e^{(i)}(x, y)$ ($i = 1, 2$), представляющие собой моменты, обусловленные температурным полем, определяются по формулам:

$$\begin{aligned} R_e^{(1)}(x, y) &= (B_{11}\alpha_{1t} + B_{12}\alpha_{2t}) \int_{-h/2}^{h/2} zT(x, y, z) dz \\ R_e^{(2)}(x, y) &= (B_{22}\alpha_{2t} + B_{12}\alpha_{1t}) \int_{-h/2}^{h/2} zT(x, y, z) dz \end{aligned} \quad (3)$$

Изгибающие и крутящий моменты, а также поперечные силы внутри пластинки определяются по формулам:

$$\begin{aligned} M_x &= -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - R_e^{(1)}(x, y) \\ M_y &= -D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - R_e^{(2)}(x, y) \\ M_{xy} &= -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ Q_x &= -D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial R_e^{(1)}(x, y)}{\partial y} \\ Q_y &= -D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial R_e^{(2)}(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь принимается, что изменение температуры $T(x, y, z)$ по толщине пластины следует линейному закону и сохраняет постоянное значение на плоскостях, параллельных поверхностям пластинки. Предполагается, что верхняя поверхность прямоугольной пластины имеет температуру выше T_{cp} на величину T_0 , нижняя – ниже на ту же величину, т.е., с учетом направления оси Oz вниз, будем иметь $T(x, y, z) = -2zT_0/h$. Выбор такого температурного поля обусловлен тем, что изгиб пластины от температурных напряжений будет происходить вверх и, тем самым, противодействовать действию поперечной нагрузки $q(y)$. Для температурных моментов $R_e^{(i)}(x, y)$ ($i = 1, 2$) будем иметь:

$$R_e^{(1)}(x, y) = -(B_{11}\alpha_{1t} + B_{12}\alpha_{2t})T_0 \frac{h^2}{6},$$

$$R_e^{(2)}(x, y) = -(B_{22}\alpha_{2t} + B_{12}\alpha_{1t})T_0 \frac{h^2}{6}$$
(5)

Граничные условия на краях пластинки:

- шарнирного опирания на кромках $y = 0, y = b$

$$w = 0, \quad M_y = 0$$

- упругого сопряжения на кромке $x = 0$ [7]

$$C \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -M_x \quad E_r J_r \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \kappa h_1 q = -Q_x$$

запишутся в виде

$$w = 0, \quad D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + R_e^{(2)} = 0 \quad \text{при } y = 0, y = b$$
(6)

$$C \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + R_e^{(1)}$$
(7)

$$E_r J_r \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \kappa h_1 q = D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$$
(8)

Здесь: $C = G_r \kappa h_1^4 \gamma$ – жесткость ребра при кручении, $J_r = \kappa h_1^4 / 12$ – момент

$$\text{инерции ребра, } \gamma = \kappa^2 \left[\frac{1}{3} - \frac{64\kappa}{\pi^5} \sum_{n=1,3,5} \frac{1}{n^5} \text{th} \frac{\pi n}{2\kappa} \right].$$

Перейдем к безразмерным величинам. Все линейные величины, т.е. имеющие размерность длины, будем считать разделенными на ширину полубесконечной пластины b , а величины, имеющие размерность напряжения, разделенными на один из модулей упругости монослоя E_1 . Далее, всем безразмерным величинам в нижнем индексе будет добавлена звездочка.

Уравнение (2) примет вид:

$$\frac{\partial^4 w_*(x_*, y_*)}{\partial x_*^4} + 2(a_2 + 2a_3) \frac{\partial^4 w_*(x_*, y_*)}{\partial x_*^2 \partial y_*^2} + a_1 \frac{\partial^4 w_*(x_*, y_*)}{\partial y_*^4} = a_4 q_*(y_*)$$
(9)

а граничные условия (6)-(8) – вид:

$$w_* = 0; \quad a_1 \frac{\partial^2 w_*}{\partial y_*^2} + a_2 \frac{\partial^2 w_*}{\partial x_*^2} - \frac{2}{h_*} \left(a_1 \frac{\alpha_{2t}}{\alpha_{1t}} + a_2 \right) \alpha_{1t} T_0 = 0$$
(10)

$$\kappa \gamma \frac{G_r h_{1*}^2}{E_1} a_4 \frac{\partial^3 w_*}{\partial x_* \partial y_*^2} - \frac{\partial^2 w_*}{\partial x_*^2} - a_2 \frac{\partial^2 w_*}{\partial y_*^2} = -\frac{2}{h_*} \left(1 + a_2 \frac{\alpha_{2t}}{\alpha_{1t}} \right) \alpha_{1t} T_0$$
(11)

$$\frac{\kappa}{12} \frac{E_r h_1^4}{E_1} a_4 \frac{\partial^4 w_*}{\partial y_*^4} - \frac{\partial^3 w_*}{\partial x_*^3} - (a_2 + 4a_3) \frac{\partial^3 w_*}{\partial x_* \partial y_*^2} = \kappa h_1^* a_4 q_* \quad (12)$$

Здесь:

$$\delta = \nu_2 + 2(1 - \nu_1 \nu_2) G_*;$$

$$a_1 = \frac{\operatorname{tg}^4 \varphi + 2\delta \operatorname{tg}^2 \varphi + E_{2*}}{1 + 2\delta \operatorname{tg}^2 \varphi + E_{2*} \operatorname{tg}^4 \varphi}; \quad a_2 = \frac{\nu_2 \sec^4 \varphi + [1 + E_{2*} - 2\delta] \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + 2\delta \operatorname{tg}^2 \varphi + E_{2*} \operatorname{tg}^4 \varphi}; \quad (13)$$

$$a_3 = \frac{G_* (1 - \nu_1 \nu_2) \sec^4 \varphi + [1 + E_* - 2\delta] \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + 2\delta \operatorname{tg}^2 \varphi + E_{2*} \operatorname{tg}^4 \varphi}; \quad a_4 = \frac{12(1 - \nu_1 \nu_2)}{h_*^3 \cos^4 \varphi [1 + 2\delta \operatorname{tg}^2 \varphi + E_{2*} \operatorname{tg}^4 \varphi]}$$

Предположим, что безразмерная функция нагрузки q_* зависит только от y_* , и разложим ее в ряд Фурье:

$$q_* = \sum_1^{\infty} q_k \sin \lambda_k y_*, \quad q_k = 2 \int_0^1 q_* \sin \lambda_k y dy, \quad \lambda_k = \pi k \quad (14)$$

Решение уравнения (9), удовлетворяющее условиям (10), представляется в виде

$$w_*(x_*, y_*) = -\frac{\alpha_{1r} T_0}{2h_*} \left(\frac{\alpha_{2t}}{\alpha_{1t}} + \frac{a_2}{a_1} \right) y_* (1 - y_*) + \frac{a_4}{a_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{\lambda_k^4} \sin \lambda_k y_* + w_{1*}(x_*, y_*), \quad (15)$$

где

$$w_{1*}(x_*, y_*) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_*) \sin \lambda_k y_*; \quad \lambda_k = \pi k \quad (16)$$

является общим решением однородного уравнения, соответствующего (9).

Подстановка (15) в уравнение (9) приводит к следующим отдельным обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно каждой из искомым функций

$$f_k^{IV} - 2(a_2 + 2a_3) \lambda_k^2 f_k'' + a_1 \lambda_k^4 f_k = 0 \quad k = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Общее решение дифференциальных уравнений (17) представляется в виде:

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^4 c_{ik} e^{r_i \lambda_k x}. \quad (18)$$

где c_{ik} - постоянные интегрирования, подлежащие определению из граничных условий, а r_i - корни соответствующего характеристического уравнения:

$$r^4 - 2(a_2 + 2a_3)r^2 + a_1 = 0 \quad (19)$$

В зависимости от значений параметров a_i ($i = 1, 2, 3$), представляющих собой комбинации упругих характеристик пластинки (13), корни r_i могут принимать как вещественные, так и комплексные значения, и, соответственно этому, выражение (18) будет иметь различные представления.

1). При $(a_2 + 2a_3)^2 - a_1 < 0$, будем иметь пару комплексно-сопряженных корней:

$r = \pm(\alpha \pm i\beta)$, где

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{a_1} + (a_2 + 2a_3)}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{a_1} - (a_2 + 2a_3)}{2}},$$

Выражение (18), с учетом произвольности постоянных интегрирования c_{ik} , можно представить в виде вещественной функции:

$$f_k(x_*) = c_{1k} e^{-\alpha\lambda_k x_*} \sin \beta\lambda_k x_* + c_{2k} e^{-\alpha\lambda_k x_*} \cos \beta\lambda_k x_* \quad (20)$$

2). При $(a_2 + 2a_3)^2 - a_1 > 0$, будем иметь 4 действительных корня, попарно отличающихся знаком: $r_{1,2} = \pm m_1$, $r_{3,4} = \pm m_2$, где

$$m_1 = \sqrt{(a_2 + 2a_3) + \sqrt{(a_2 + 2a_3)^2 - a_1}},$$

$$m_2 = \sqrt{(a_2 + 2a_3) - \sqrt{(a_2 + 2a_3)^2 - a_1}}$$

Для функций $f_k(x)$ будем иметь:

$$f_k(x_*) = c_{1k} e^{-m_1\lambda_k x_*} + c_{2k} e^{-m_2\lambda_k x_*} \quad (21)$$

3). При $(a_2 + 2a_3)^2 - a_1 = 0$, будем иметь два, отличающихся знаком, двойных корня: $r_i = \pm m_0$ ($i=1,2,3,4$), где $m_0 = \sqrt{a_2 + 2a_3}$, а функции $f_k(x)$ примут вид:

$$f_k(x_*) = c_{1k} e^{-m_0\lambda_k x_*} + c_{2k} x_* e^{-m_0\lambda_k x_*} \quad (22)$$

Следует отметить, что для обеспечения ограниченности решений при $x_* \rightarrow \infty$ в формулах (20)-(22) оставлены только слагаемые с отрицательным показателем степени.

Постоянные интегрирования c_{1k} и c_{2k} определяются из граничных условий (11) и (12). Подставляя (15) в условия (11) и (12) и используя разложение единицы в ряд Фурье

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \sin \lambda_k y, \quad \eta_k = \frac{2}{\pi k} [1 - (-1)^k],$$

придем к системе уравнений

$$f_k'' + \kappa \gamma \frac{G_r h_{1*}^2}{E_1} a_4 \lambda_k^2 f_k' - a_2 \lambda_k^2 f_k = -\frac{a_2 a_4}{a_1} \frac{q_k}{\lambda_k^2} - \frac{\alpha_{1r} T_0}{h_*} \left(2 + \frac{a_2}{a_1} + (2a_2 + 1) \frac{\alpha_{2r}}{\alpha_{1r}} \right) \eta_k \quad (23)$$

$$f_k''' - (a_2 + 4a_3) \lambda_k^2 f_k' - \frac{\kappa E_r h_{1*}^4}{12 E_1} a_4 \lambda_k^4 f_k = -\kappa h_{1*} a_4 \left(\frac{h_{1*}^3 E_r a_4}{12 E_1 a_1} + 1 \right) q_k$$

При наличии конкретных значений для упругих характеристик материала пластины, для функции $f_k(x)$ выбирается соответствующее представление из (20)-(22), подставляется в систему (23) и принимается $x_* = 0$. Из полученной системы находятся постоянные C_{1k} и C_{2k} .

Следует отметить, что в случае изотропной пластинки для обозначений (13) будем иметь:

$$\delta = 1; \quad a_1 = 1; \quad a_2 = \nu; \quad a_3 = \frac{1-\nu}{2}; \quad a_4 = \frac{12(1-\nu^2)}{h_*^3}, \quad (24)$$

а для дискриминанта биквадратного уравнения (19) получим

$$(a_2 + 2a_3)^2 - a_1 = 0. \quad (25)$$

Следовательно, для изотропной пластины решение уравнения (17) дается формулой (22).

Численный анализ полученных результатов. Численные расчеты проведены для полубесконечной пластины, изготовленной из монослоев композиционного материала на основе волокон Kevlar49, который имеет следующие характеристики [14]:

$$E_1 = 69 \text{ ГПа}, \quad E_2 = 4.52 \text{ ГПа}, \quad G = 2.48 \text{ ГПа}, \quad \nu_2 = 0.41,$$

$$\alpha_{1r}^0 = -5.17 \times 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad \alpha_{2r}^0 = 68.7 \times 10^{-6} \text{ К}^{-1}.$$

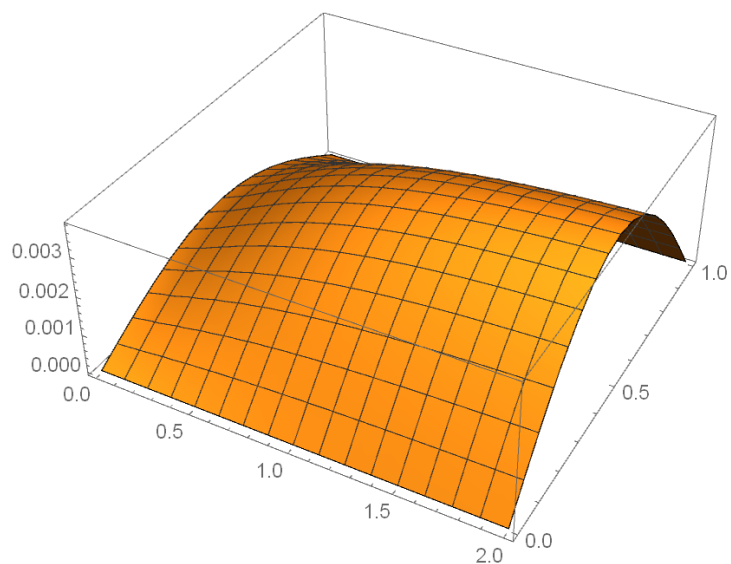
Внешняя нагрузка, которая равномерно распределена по полуоси Ox , по y также принимается распределенной равномерно и равной $q(y) = q_0$.

Для геометрических параметров задачи приняты следующие значения:

$$h_* = \frac{h}{b} = 0.05; \quad h_{1*} = \frac{h_1}{b} = 0.1; \quad \kappa = 0.5.$$

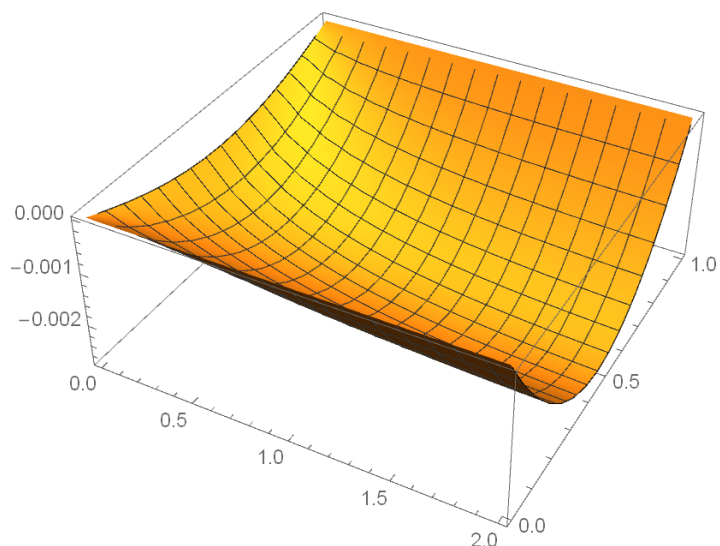
Все иллюстрации относятся к пограничной части полубесконечной пластины, именно к участку $\{0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$, который далее, для простоты, будем называть пластинкой.

На Фиг.2 представлена форма изгиба пластины, составленной намоткой монослоев под углом $\varphi = 0.25\pi$, под действием равномерной нагрузки $q_{0*} = q(y)/E_1 = 10^{-6}$ при отсутствии температурного поля $T_0 = 0^\circ$.



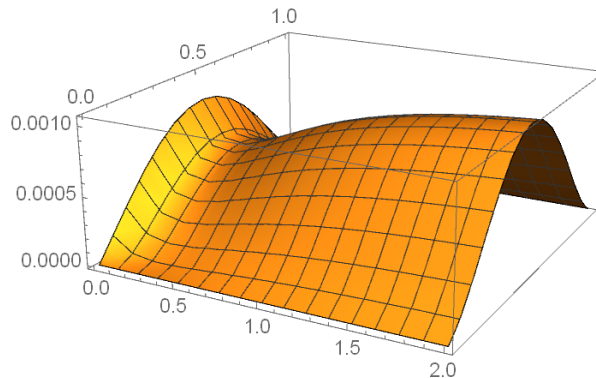
Фиг.2 Прогиб пластинки при $q_{0*} = 10^{-6}$ и $T_0 = 0^\circ$.

На Фиг.3 представлена форма прогиба пластинки под действием только температурного поля $T_0 = 1^\circ$.



Фиг.3 Прогиб пластинки при $q_{0*} = 0$ и $T_0 = 10^\circ$.

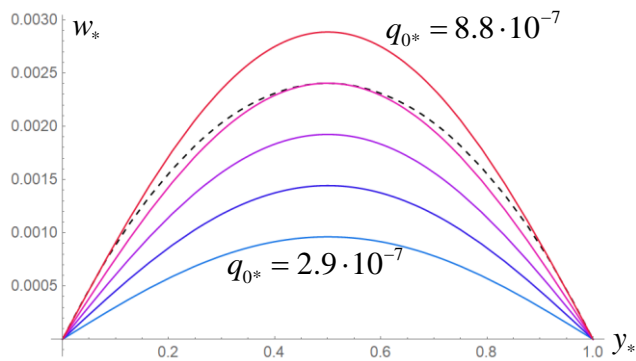
На Фиг.4 представлена форма прогиба пластинки при совместном действии нормальной нагрузки $q_{0*} = 10^{-6}$ и температурного поля $T_0 = 10^\circ$.



Фиг.4 Прогиб пластинки при $q_{0*} = 10^{-6}$ и $T_0 = 10^\circ$.

Существенно малые прогибы на Фиг.4 поднимают вопрос, а можно ли подбором величины равномерного давления q_{0*} обратить в ноль или свести к минимуму прогиб всей пластинки при определенном температурном поле?

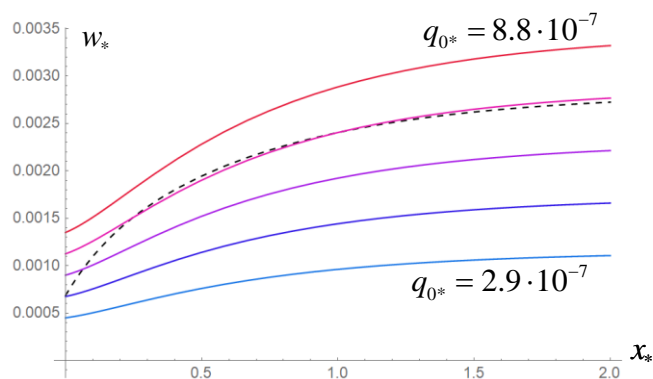
На фиг.5 показаны кривые прогиба пластинки в сечении ($x=1$) при разных значениях нормального давления $q_{0*} = \{2.9, 4.4, 5.9, 7.3, 8.8\} \cdot 10^{-7}$ и $T_0 = 0^\circ$. Пунктирной линией показано зеркальное отражение прогиба при заданном температурном поле, $T_0 = 10^\circ$, $q_{0*} = 0$



Фиг.5. Прогиб пластины в $x = 1$ при разном давлении и $T_0 = 0^\circ$, пунктирной линией показано зеркальное отражение прогиба при $T_0 = 10^\circ$, $q_{0*} = 0$.

Из фиг. 5 замечаем, что к кривой прогиба, обусловленного температурным полем, наиболее близка кривая прогиба при $q_{0*} = 7.3 \cdot 10^{-7}$. Для того, чтобы выяснить

насколько эта близость кривых сохраняется в других поперечных сечениях, были построены кривые прогиба срединной линии пластины по оси Ox при тех же величинах давления и температуры (Фиг. 6).



Фиг.6 Прогиб срединной линии пластины при разной нагрузке q_{0*} и $T_0 = 0^\circ$, пунктирной линией показано зеркальное отражение прогиба при $q_{0*} = 0, T_0 = 10^\circ$.

Из фиг.6 наблюдаем интересную картину. Если для компенсации температурного прогиба на ребре ($x = 0$) необходимо равномерное давление $q_{0*} = 4.4 \cdot 10^{-7}$, то для большей части пластины ($x > 0.3$) необходимо давление $q_{0*} = 7.3 \cdot 10^{-7}$.

Исходя из последних кривых, можно однозначно утверждать, что влияние температурного поля по всей пластинке невозможно компенсировать равномерно распределенной нагрузкой.

Были проведены численные эксперименты по подбору вида распределения нормального давления $q_*(y)$ по поперечному сечению, которое наиболее близко подходит к решению задачи компенсации влияния температурного поля. В результате получено, что распределение $q_*(y)$ стремится к двум парам противоположно направленных сосредоточенных сил у концов $y_* = 0$ и $y_* = 1$, что, в свою очередь, означает, приложение к сторонам пластины $y_* = 0$ и $y_* = 1$ равномерно распределенных по оси Ox изгибающих моментов. Этот факт подтверждается и аналитическим анализом граничных условий (10)-(12), поскольку выбранное постановкой задачи температурное поле оставляет свое влияние только посредством граничных условий.

Действительно, если предположить, что по полубесконечным сторонам пластины приложены моменты M_T , изгибающие пластину вниз, и взять их равными по величине:

$$M_T = \frac{2}{h_*} \left(a_1 \frac{\alpha_{2t}}{\alpha_{1t}} + a_2 \right) \alpha_{1t} T_0, \quad (26)$$

то условие (10) будет выполнено. Далее, выразив $\alpha_{1r}T_0$ через M_T и подставив в (11), получим, что к ребру также надо приложить момент, но уже равный:

$$M_{T^*} = \frac{\alpha_{1r} + a_2\alpha_{2r}}{a_2\alpha_{1r} + a_1\alpha_{2r}} M_T \quad (27)$$

Таким образом, температура будет исключена, уступив свое влияние моментам (26) и (27), и все граничные условия будут удовлетворены.

Следовательно, влияние температурного поля можно компенсировать только приложением изгибающего момента M_T по полубесконечным сторонам пластины и момента M_{T^*} к ребру.

Заключение. Проведено исследование изгиба шарнирно опертой по длинным сторонам полубесконечной ортотропной пластины из композиционного материала, усиленной по свободной стороне упругим ребром, под действием распределенной в поперечном направлении и равномерной в продольном направлении при наличии стационарного температурного поля заданного типа. Предполагая, что изгиб, обусловленный температурным полем, происходит противоположно изгибу от действия нормальной равномерно распределенной нормальной нагрузки, выяснено, что температурный изгиб, с определенной степенью точности, можно компенсировать равномерной нагрузкой лишь на части пластины. Показано, что для полной нейтрализации влияния температуры на изгиб пластины необходимо на шарнирно-опертых сторонах и к ребру приложить изгибающие моменты соответствующих величин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малинин Г.В. Методики расчета ребристых пластин на прочность и устойчивость. Труды МАИ, 2021, №121, DOI: 10.34759/trd-2021-121-08
2. Jože Petrišič, Franc Kosel, Boštjan Bremec, Buckling of plates with strengthenings. Thin-Walled Structures 44 (2006) 334–343. DOI: 10.1016/j.tws.2006.03.002
3. Ahmad Rahbar-Ranji, Elastic buckling analysis of longitudinally stiffened plates with flat-bar stiffeners. Ocean Engineering Volume 58, 15 January 2013, Pages 48-59 DOI: 10.1016/j.oceaneng.2012.09.018.
4. Jeom Kee Paik, Anil Kumar Thayamballi, Buckling strength of steel plating with elastically restrained edges, Thin-Walled Structures, Volume 37, Issue 1, 2000, Pages 27-55, DOI: 10.1016/S0263-8231(00)00009-4.
5. Zou, G., Wang, Y., Xue, Q., & Zhang, C. (2019). Buckling Analysis of Sandwich Plate Systems with Stiffening Ribs: Theoretical, Numerical, and Experimental Approaches. Advances in Civil Engineering, 2019(1). DOI: 10.1155/2019/8737561
6. Guangping Zou, Yuyang Wang, Qichao Xue, Chunwei Zhang Buckling Analysis of Sandwich Plate Systems with Stiffening Ribs: Theoretical, Numerical, and Experimental Approaches. Advances in Civil Engineering Volume 2019, Article ID 8737561, 14 pages, DOI: 10.1155/2019/8737561
7. Белубекян Э.В., Погосян А.Г. Оптимальное проектирование прямоугольной ребристой пластинки из композиционного материала по критерию устойчивости. Изв. НАН РА, Механика, 2007, т. 60, № 1, сс. 38-43.

8. Дарбинян А.З. Задача термоупругости прямоугольной ребристой пластинки при изгибе. Труды II международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Дилижан, Армения, 4-8 октября 2010, сс. 229-231.
9. Дарбинян А.З. Задача термоупругости для бесконечной пластинки-полосы, усиленной периодической системой ребер. Труды междунар. конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посвящённой 100-летию академика НАН Армении Н.Х.Арутюняна, Ереван, 2012, сс. 220-221
10. Дарбинян А. З., Аракелян Л. П., Вычисление упругих характеристик ребристых пластинок, из композиционных материалов, применяемых при большом перепаде температуры. Наука и образование в Арктическом регионе: мат. междунар. науч.-практ. конф., Мурманск, 4–8 апреля 2016г.: в 2 ч., Ч. 2 / Федер. гос. бюджетное образоват. учреждение высш. проф. образования "Мурм. гос. техн. ун-т". – Мурманск : Изд-во МГТУ, сс. 17-23.
11. Белубекян Э.В., Дарбинян А.З., Саакян А.А. Термоупругая задача изгиба слоистой композитной ребристой пластинки. Доклады НАН РА, 2017, т.117, №1, сс. 44-51.
12. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М., Наука, 1987.
13. В.В.Васильев. Механика из композиционных материалов. М. Машиностроение. 1985. 271 с.
14. Композиционные материалы. Справочник. Под общей редакцией чл.-корр. АН СССР В.В. Васильева. чл.- корр Латв. ССР Ю.М. Тарнопольского. М. Машиностроение. 1990. 510с.

Сведения об авторах:

Белубекян Эрнест Вагаршакович - доктор технических наук, профессор, Тел.: (374 91)431 194, E-mail: ebelubekyan@yahoo.com

Геворгян Гнун Завенович - к.ф.м.н., старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, Тел.: (374 91)807 989, E-mail: gnungev@gmail.com

Дарбинян Артавазд Завенович - к.ф.м.н., старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, Тел.: (374 94)109 694, E-mail: darbinyan_1954@mail.ru

Амирджанян Арутюн Арменович - к.ф.м.н., ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, Тел.: (374 44)920639, E-mail: amirjanyan@gmail.com

Поступила в редакцию 19 марта 2026г.

**ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕМАТИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ
УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ АСИМПТОТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ**

Гукасян А.А.

Ключевые слова: упругая пластинка, асимптотический метод, обобщенные координаты, колебательное движение, кинематические величины.

Ghukasyan A.A.

Investigation of the Kinematics of Rotational Motion of an Elastic Plate by the Asymptotic Method

Keywords: elastic plate, asymptotic method, generalized coordinates, oscillatory motion, kinematic quantities.

Abstract: The kinematics of rotational motion of an elastic plate, one side of which is rigidly fixed to the axis of rotation, and the others are free, is investigated. Within the framework of the main hypotheses on which the mathematical models and theory of thin plates are based, the kinematics of rotational motion of an elastic plate depending on the deflection of the median plane are determined by the asymptotic method of separation of motions. An estimate is given for additional quantities due to the elastic compliance of the plate. The results of the study can be applied in problems of dynamics and control of oscillatory motion of mechanical systems, the designs of which contain elastic plates of high rigidity.

Դուկասյան Ա.Ա.

**Առաձգական սալի պտտական շարժման կինեմատիկայի
ուսումնասիրումը ասիմպտոտիկ մեթոդով**

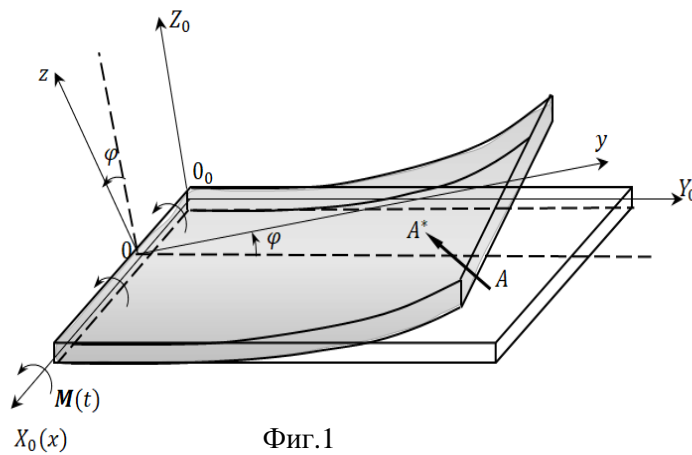
Հիմնաբառեր՝ առաձգական սալ, ասիմպտոտիկ մեթոդ, ընդհանրացված կոորդինատներ, տատանողական շարժում, կինեմատիկական մեծություններ:

Ուսումնասիրվում է առաձգական սալի պտտական շարժման կինեմատիկան, որի մեկ կողմը կոշտ ամրացված է պտտման առանցքին, իսկ մյուսները ազատ են: Բարակ սալերի մաթեմատիկական մոդելների և տեսության հիմքում ընկած հիմնարար վարկածների շրջանակներում, ասիմպտոտիկ մեթոդով որոշվում է առաձգական սալի պտտական շարժման կինեմատիկական մեծությունները կախված սալի միջին հարթության կետերի առաձգական շեղումից: Ներկայացվում է սալի առաձգականությամբ պայմանավորված լրացուցիչ կինեմատիկական մեծությունների գնահատականները: Ուսումնասիրության արդյունքները կարող են կիրառվել մեխանիկական համակարգերի տատանողական շարժման դինամիկայի և դեկավարման խնդիրներում, որոնց կառուցվածքները պարունակում են բարձր կոշտության առաձգական սալեր:

Исследуется кинематика вращательного движения упругой пластинки, одна сторона которой жестко закреплена к оси вращения, а другие свободны. В рамках основных гипотез, на которых основаны математические модели и теория тонких пластин, кинематика вращательного движения упругой пластинки в зависимости от прогиба срединной плоскости, определены асимптотическим методом разделения движений. Дана оценка дополнительных величин обусловленных упругой податливостью пластинки. Результаты исследования могут быть применены в задачах динамики и управления колебательным движением механических систем, конструкции которых содержат упругие пластинки большой жесткости.

Введение. Исследования кинематики движения упругой пластинки являются актуальными, поскольку они находят широкие применения во многих отраслях современной техники [1-3]. Колебательные процессы пластинки во время движения

механических систем существенно влияют на качество выполняемых работ. Результаты исследования колебательного движения дадут возможность, при проектировании систем управления, учитывать те дополнительные воздействия, которые обусловлены упругостью. Ниже рассматривается изотропная прямоугольная пластинка $(a \times b)$, одна сторона которой жестко закреплена, а другие свободны. Пластинка, постоянной толщины h , характеризуется цилиндрической жесткостью на изгиб D и плотностью ρ . Колебательное движение происходит в вертикальной плоскости $Y_0O_0Z_0$ (Фиг.1) и



Фиг.1

оно осуществляется вращательным моментом сил $\mathbf{M}(t)$, приложенным к оси вращения O_0X_0 . Координатная плоскость $X_0O_0Y_0$ совпадает со срединной плоскостью пластинки.

Обобщенную координату движения пластинки обозначим через $\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – угол между плоскостью $X_0O_0Y_0$ и плоскостью, проходящей через неподвижную прямую O_0X_0 и являющейся касательной к срединной поверхности деформируемой пластинки в любой точке оси O_0X_0 . Исследование проводится на основе гипотез, предложенных Кирхгофом [4,5]. В [6] приведено подробное описание упругой модели пластинки и результаты исследования кинематики вращательного движения прямоугольной пластинки методом классической механики [7,8].

1.Обобщенные координаты, определяющие положение точек упругой пластинки. Следуя работам [9,10], приведем общие формулы, определяющие положение точек пространственного упругого тела

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}), \mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)^T, \quad (1.1)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T, \mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$$

где компонентами вектора $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ являются все параметры, определяющие положение абсолютно твердого тела в пространстве, а компонентами вектора $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ - все параметры, которые обусловлены упругостью тела. В частности $\alpha_j (j = 1, 2, \dots, n)$ могут быть координатами точки (полюса) в пространстве, углы Эйлера, определяющие положение тела относительно подвижной системы координат, или другими параметрами, зависящими от указанных величин. В качестве параметра $u_k(x, y, z, t) (k = 1, 2, \dots, m)$ - могут быть компоненты вектора упругих смещений точек тела.

Кинематика движений упругих тел исследуется на основе соотношения (1.1), где $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{u})$ - заданная вектор-функция от вектора аргументов. Параметры $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, u_1, u_2, \dots, u_m)$ в количестве $(n + m)$ назовем обобщенными координатами точек упругого тела (число точек упругого тела стремится к бесконечности).

Предполагается, что координаты $u_k(x, y, z, t) (k = 1, 2, \dots, m)$ малы, а характерная величина жесткости тела велика, то есть

$$u_k(x, y, z, t) \sim \varepsilon, C \sim \varepsilon^{-1} (k = 1, 2, \dots, m), \quad (1.2)$$

$$\dot{u}_k(x, y, z, t) \sim \varepsilon, u'_k(x, y, z, t) \sim \varepsilon, t \sim 1 (k = 1, 2, \dots, m) \quad (1.3)$$

где $\varepsilon \ll 1$ - малый параметр (частные производные по x, y, z обозначены штрихом, а по t - точкой).

Заметим, что движение упругого тела происходит на конечном интервале времени, а в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ упругое тело становится абсолютно твердым. Предположение (1.2), (1.3) позволяют исследовать кинематику движений упругих тел асимптотическим методом малого параметра [11, 12].

Формула Тейлора для (1.1) относительно $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ с точностью до ε^2 является

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{a}, 0) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{a}, 0)}{\partial u_k} u_k(x, y, z) + o(\varepsilon^2) \quad (1.4)$$

Представим (1.4) в виде

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{f}^*(\mathbf{a}, \mathbf{u}), \quad (1.5)$$

$$\text{где } \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}, 0), \mathbf{f}^*(\mathbf{a}, \mathbf{u}) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{a}, 0)}{\partial u_k} u_k(x, y, z), \mathbf{f}^*(\mathbf{a}, 0) \equiv 0$$

Из (1.4) и (1.5) следует, что в рамках линейной модели, поведение упругого тела можно описать в пределах абсолютно жесткой модели, путем введения дополнительных величин $\mathbf{f}^*(\mathbf{a}, \mathbf{u})$, обусловленных упругостью тела.

Отметим, что компоненты вектора перемещений точек прямоугольной пластинки, на основе гипотез, предложенных Кирхгофом [4,5], являются функциями прогиба ($u_3(x, y, t)$) срединной плоскости пластинки, то есть

$$u_1 = -z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial x}, \quad u_2 = -z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y}, \quad u_3 = u_3(x, y, t) \quad (1.6)$$

Формулы (1.1), (1.4) и (1.5), определяющие положение точек упругой пластинки (Фиг.1), являются [6]

$$f_1(\varphi, \mathbf{u}) = x - z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial x},$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\varphi, \mathbf{u}) \quad f_2(\varphi, \mathbf{u}) = \left(y - z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \right) \cos \varphi - (z + u_3(x, y, t)) \sin \varphi \quad (1.7)$$

$$f_3(\varphi, \mathbf{u}) = \left(y - z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \right) \sin \varphi + (z + u_3(x, y, t)) \cos \varphi$$

Здесь

$$f_1(\varphi, 0) = x, \quad f_2(\varphi, 0) = y \cos \varphi - z \sin \varphi, \quad f_3(\varphi, 0) = y \sin \varphi + z \cos \varphi$$

$$f_1^*(\varphi, \mathbf{u}) = -z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial x}$$

$$f_2^*(\varphi, \mathbf{u}) = -z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \cos \varphi - u_3(x, y, t) \sin \varphi \quad (1.8)$$

$$f_3^*(\varphi, \mathbf{u}) = -z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \sin \varphi + u_3(x, y, t) \cos \varphi$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\varphi) + \mathbf{f}^*(\varphi, \mathbf{u}) \quad (1.9)$$

Для точек срединной плоскости ($z = 0$), имеем

$$f_1(\varphi, \mathbf{u}) = x \quad f_1(\varphi, 0) = x$$

$$f_2(\varphi, \mathbf{u}) = y \cos \varphi - u_3(x, y, t) \sin \varphi, \quad f_2(\varphi, 0) = y \cos \varphi - z \sin \varphi,$$

$$f_3(\varphi, \mathbf{u}) = y \sin \varphi + u_3(x, y, t) \cos \varphi \quad f_3(\varphi, 0) = y \sin \varphi + z \cos \varphi$$

$$f_1^*(\varphi, \mathbf{u}) = 0, \quad f_2^*(\varphi, \mathbf{u}) = -u_3(x, y, t) \sin \varphi, \quad f_3^*(\varphi, \mathbf{u}) = u_3(x, y, t) \cos \varphi$$

Обобщенные координаты, определяющие положение точек упругой пластинки в каждый момент времени, являются:

$$\left(\varphi, u_1(x, y, z, t), u_2(x, y, z, t), u_3(x, y, t) \right).$$

2. Скорость движения упругой пластинки. Определим скорость движения точек упругой пластинки асимптотическим методом разделения движений. Общие

асимптотические формулы [9], определяющие скорость движения точек упругого тела, для рассматриваемой модели пластинки имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\varphi})\dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})\dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})\dot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_1(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}) + \mathbf{v}_2(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})\end{aligned}\quad (2.1)$$

где $\mathbf{v}_1(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}) = \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\varphi})\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ определяет скорость движения абсолютно твердой пластинки, $\mathbf{v}_2(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})\dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})\dot{\mathbf{u}}$ - дополнительный вектор скорости, обусловленный упругостью пластинки, а $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi, 0, 0)^T$. Заметим, что $\mathbf{v}_2(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}, 0, 0) \equiv 0$.

Матрица $\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha})$ (2.1), согласно (1.9), имеет вид

$$\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\varphi}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -y \sin \varphi - z \cos \varphi & 0 & 0 \\ y \cos \varphi - z \sin \varphi & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad (2.2)$$

Компонентами вектора скорости (2.1) движения абсолютно твердой пластинки являются

$$\mathbf{v}_1(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}) = \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\varphi})\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -y \sin \varphi - z \cos \varphi & 0 & 0 \\ y \cos \varphi - z \sin \varphi & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\quad (2.3)$$

$$v_{1,1} = 0, v_{1,2} = -y\dot{\varphi} \sin \varphi - z\dot{\varphi} \cos \varphi, v_{1,3} = y\dot{\varphi} \cos \varphi - z\dot{\varphi} \sin \varphi\quad (2.4)$$

Определим элементы матрицы $\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})$ (2.1) согласно (1.9)

$$\frac{\partial f_1^*(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})}{\partial \varphi} = 0, \frac{\partial f_2^*(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})}{\partial \varphi} = z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \sin \varphi - u_3(x, y, t) \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial f_3^*(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})}{\partial \varphi} = -z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \cos \varphi - u_3(x, y, t) \sin \varphi$$

$$\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \sin \varphi - u_3(x, y, t) \cos \varphi & 0 & 0 \\ -z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \cos \varphi - u_3(x, y, t) \sin \varphi & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad (2.5)$$

Первое слагаемое вектора скорости $\mathbf{v}_2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$ определяется следующим образом

$$\mathbf{v}_2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})\dot{\boldsymbol{\varphi}} \quad (2.6)$$

Компонентами первого слагаемого вектора скорости $\mathbf{v}_2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$ являются

$$(\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})\dot{\boldsymbol{\varphi}})_1 = 0, (\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})\dot{\boldsymbol{\varphi}})_2 = z\dot{\boldsymbol{\varphi}} \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \sin \varphi - \dot{\boldsymbol{\varphi}} u_3(x, y, t) \cos \varphi \quad (2.7)$$

$$(\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})\dot{\boldsymbol{\varphi}})_3 = -z\dot{\boldsymbol{\varphi}} \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \cos \varphi - \dot{\boldsymbol{\varphi}} u_3(x, y, t) \sin \varphi$$

Для определения второго слагаемого вектора скорости определим элементы матрицы $\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})$ (2.1) согласно (1.8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1^*(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})}{\partial u_1} &= -1, \quad \frac{\partial f_1^*(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})}{\partial u_2} = \frac{\partial f_1^*(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})}{\partial u_3} = 0, \\ \frac{\partial f_2^*(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})}{\partial u_1} &= 0, \quad \frac{\partial f_2^*(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})}{\partial u_2} = -\cos \varphi, \quad \frac{\partial f_2^*(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})}{\partial u_3} = -\sin \varphi, \\ \frac{\partial f_3^*(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})}{\partial u_1} &= 0, \quad \frac{\partial f_3^*(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})}{\partial u_2} = -\sin \varphi, \quad \frac{\partial f_3^*(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})}{\partial u_3} = \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Второе слагаемое вектора скорости $\mathbf{v}_2(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$ движения упругой пластинки определим из выражения

$$\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})\dot{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial t} \\ -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \\ \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

$$(\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})\dot{\mathbf{u}})_2 = -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \cos \varphi - \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi$$

$$(\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})\dot{\mathbf{u}})_3 = -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \sin \varphi + \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi$$

Итак, компонентами вектора скорости $\mathbf{v}_2(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$, обусловленными упругостью пластинки, являются суммы соответствующих компонентов (2.7) и (2.10)

$$\begin{aligned}
 v_{2,1} &= -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial t} \\
 v_{2,2} &= z \dot{\varphi} \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \sin \varphi - \dot{\varphi} u_3(x, y, t) \cos \varphi - z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \cos \varphi - \\
 &\quad - \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi \\
 v_{2,3} &= -z \dot{\varphi} \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \cos \varphi - \dot{\varphi} u_3(x, y, t) \sin \varphi - z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \sin \varphi + \\
 &\quad + \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Выражения (2.11) совпадают с аналогичными выражениями, которые были получены согласно формуле $\boldsymbol{\Gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(x, y, z, t) + \boldsymbol{\Gamma} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}(x, y, z, t))$ [6,9].

Окончательное выражение компонентов скорости движения упругой пластинки в вертикальной плоскости (Фиг.1), определяется объединением соответствующих компонентов выражений (2.4) и (2.11).

$$\begin{aligned}
 v_1 &= -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial t} \\
 v_2 &= -y \dot{\varphi} \sin \varphi - z \dot{\varphi} \cos \varphi + z \dot{\varphi} \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \sin \varphi - \dot{\varphi} u_3(x, y, t) \cos \varphi - \\
 &\quad - z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \cos \varphi - \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi \\
 v_3 &= y \dot{\varphi} \cos \varphi - z \dot{\varphi} \sin \varphi - z \dot{\varphi} \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \cos \varphi - \dot{\varphi} u_3(x, y, t) \sin \varphi - \\
 &\quad - z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \sin \varphi + \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Компоненты скорости движения точек срединной плоскости пластинки определяются согласно (2.12) при $z = 0$.

3. Ускорение движения упругой пластинки асимптотическим методом. В качестве приложения полученных общих выражений для ускорения движений

упругого тела [9], определим ускорение движений упругой пластинки в вертикальной плоскости $Y_0O_0Z_0$ (Фиг.1).

Приведем обобщенные формулы, определяющие ускорение движений произвольного упругого тела в пространстве [9]

$$\ddot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}) \ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{d}{dt} \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}) \ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{d}{dt} \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}) \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}) \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.1)$$

или

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{w}_2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}) \quad (3.2)$$

$$\mathbf{w}_1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}) = \frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}) \ddot{\boldsymbol{\alpha}} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{w}_2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}) = \frac{d}{dt} \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}) \ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{d}{dt} \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}) \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}) \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.4)$$

Для определения ускорения движений $\mathbf{w}_1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}})$ пластинки с абсолютно твердой модели по формуле (3.3) определим элементы матрицы $\frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha})$.

Для рассматриваемого случая, согласно (1.9), имеем

$$\frac{\partial^2 f_1(\varphi, 0)}{\partial \varphi^2} \dot{\varphi} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_2(\varphi, 0)}{\partial \varphi^2} \dot{\varphi} = (-y \cos \varphi + z \sin \varphi) \dot{\varphi}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial^2 f_3(\varphi, 0)}{\partial \varphi^2} \dot{\varphi} = (-y \sin \varphi - z \cos \varphi) \dot{\varphi}$$

то есть первое слагаемое в (3.3), является

$$\frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\varphi) \dot{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (-y \cos \varphi + z \sin \varphi) \dot{\varphi} & 0 & 0 \\ (-y \sin \varphi - z \cos \varphi) \dot{\varphi} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

со следующими компонентами

$$\left(\frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\varphi) \dot{\varphi} \right)_1 = 0, \quad \left(\frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\varphi) \dot{\varphi} \right)_2 = (-y \cos \varphi + z \sin \varphi) \dot{\varphi}^2, \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\varphi) \dot{\varphi} \right)_3 = (-y \sin \varphi - z \cos \varphi) \dot{\varphi}^2$$

Второе слагаемое выражения (3.3) для рассматриваемого случая имеет вид

$$\mathbf{F}_1(\varphi)\ddot{\boldsymbol{\phi}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -y \sin \varphi - z \cos \varphi & 0 & 0 \\ y \cos \varphi - z \sin \varphi & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_1(\varphi)\ddot{\boldsymbol{\phi}})_1 &= 0, (\mathbf{F}_1(\varphi)\ddot{\boldsymbol{\phi}})_2 = (-y \sin \varphi - z \cos \varphi)\ddot{\phi}, \\ (\mathbf{F}_1(\varphi)\ddot{\boldsymbol{\phi}})_3 &= (y \cos \varphi - z \sin \varphi)\ddot{\phi} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Из (3.3), (3.7) и (3.8), имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}_1(\varphi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}))_1 &= 0 \\ (\mathbf{w}_1(\varphi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}))_2 &= (-y \sin \varphi - z \cos \varphi)\ddot{\phi} + (-y \cos \varphi + z \sin \varphi)\dot{\phi}^2 \\ (\mathbf{w}_1(\varphi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}))_3 &= (y \cos \varphi - z \sin \varphi)\ddot{\phi} + (-y \sin \varphi - z \cos \varphi)\dot{\phi}^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Соотношения (3.9), определяющие компоненты вектора ускорения $\mathbf{w}_1(\varphi, \dot{\phi}, \ddot{\phi})$ вращательного движения абсолютно твердой пластинки, совпадают с выражениями, которые были определены методами классической механики по формуле [6,9]

$$\mathbf{w}_1 = \boldsymbol{\Gamma} \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}\omega^2) + \boldsymbol{\Gamma} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}),$$

По формулам (3.1), (3.4) определим ускорение $\mathbf{w}_2(\varphi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}})$ движения пластинки, обусловленное упругостью.

Слагаемые $\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u})\ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \frac{d}{dt}\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u})\dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u})\ddot{\mathbf{u}}, \frac{d}{dt}\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u})\dot{\mathbf{u}}$, входящие в (3.1)

и (3.4), для рассматриваемой модели упругой пластинки будут

$$\mathbf{F}_2(\varphi, \mathbf{u})\ddot{\boldsymbol{\phi}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \sin \varphi - u_3(x, y, t) \cos \varphi & 0 & 0 \\ -z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \cos \varphi - u_3(x, y, t) \sin \varphi & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_2(\varphi, \mathbf{u})\ddot{\boldsymbol{\phi}})_1 &= 0 \\ (\mathbf{F}_2(\varphi, \mathbf{u})\ddot{\boldsymbol{\phi}})_2 &= \left(z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \sin \varphi - u_3(x, y, t) \cos \varphi \right) \ddot{\phi} \\ (\mathbf{F}_2(\varphi, \mathbf{u})\ddot{\boldsymbol{\phi}})_3 &= \left(-z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \cos \varphi - u_3(x, y, t) \sin \varphi \right) \ddot{\phi} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathbf{F}_2(\varphi, \mathbf{u}) \dot{\boldsymbol{\phi}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \sin \varphi + z \dot{\phi} \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \cos \varphi - & 0 & 0 \\ -\frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi + \dot{\phi} u_3(x, y, t) \sin \varphi & 0 & 0 \\ -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \cos \varphi + z \dot{\phi} \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \sin \varphi - & 0 & 0 \\ -\frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi - \dot{\phi} u_3(x, y, t) \cos \varphi & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\left(\frac{d}{dt} \mathbf{F}_2(\varphi, \mathbf{u}) \dot{\boldsymbol{\phi}} \right)_1 &= 0, \\
\left(\frac{d}{dt} \mathbf{F}_2(\varphi, \mathbf{u}) \dot{\boldsymbol{\phi}} \right)_2 &= \left(z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \sin \varphi - \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi \right) \dot{\phi} + \\
&\quad + \left(z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi + u_3(x, y, t) \sin \varphi \right) \dot{\phi}^2, \\
\left(\frac{d}{dt} \mathbf{F}_2(\varphi, \mathbf{u}) \dot{\boldsymbol{\phi}} \right)_3 &= \left(-z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \cos \varphi - \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin^{-1} \varphi \right) \dot{\phi} + \\
&\quad + \left(z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi - u_3(x, y, t) \cos \varphi \right) \dot{\phi}^2, \tag{3.11}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_3(\varphi, \mathbf{u}) \ddot{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial t^2} \\ -z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t^2} \\ \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial t^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{F}_3(\varphi, \mathbf{u})\ddot{\mathbf{u}})_1 &= -z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial t^2}, \\
(\mathbf{F}_3(\varphi, \mathbf{u})\ddot{\mathbf{u}})_2 &= -z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t^2} \cos \varphi - \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial t^2} \sin \varphi \\
(\mathbf{F}_3(\varphi, \mathbf{u})\ddot{\mathbf{u}})_3 &= -z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t^2} \sin \varphi + \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial t^2} \cos \varphi \\
\frac{d}{dt} \mathbf{F}_3(\varphi, \mathbf{u})\dot{\mathbf{u}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\varphi} \sin \varphi & -\dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 & \dot{\varphi} \cos \varphi & -\dot{\varphi} \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial t} \\ -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \\ \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt} \mathbf{F}_3(\varphi, \mathbf{u})\dot{\mathbf{u}} \right)_1 &= 0 \\
\left(\frac{d}{dt} \mathbf{F}_3(\varphi, \mathbf{u})\dot{\mathbf{u}} \right)_2 &= z \dot{\varphi} \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \sin \varphi - \dot{\varphi} \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi \\
\left(\frac{d}{dt} \mathbf{F}_3(\varphi, \mathbf{u})\dot{\mathbf{u}} \right)_3 &= -z \dot{\varphi} \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \cos \varphi - \dot{\varphi} \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Компоненты вектора ускорения движений пластинки, обусловленные упругостью, определяются согласно (3.10) – (3.13) и имеют вид

$$\begin{aligned}
(\mathbf{w}_2(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}))_1 &= -z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial t^2}, \\
(\mathbf{w}_2(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}))_2 &= \left(z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi - u_3(x, y, t) \cos \varphi \right) \ddot{\varphi} + \\
&+ 2 \left(z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \sin \varphi - \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi \right) \dot{\varphi} + \\
&+ \left(z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi + u_3(x, y, t) \sin \varphi \right) \dot{\varphi}^2 - \\
&- z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t^2} \cos \varphi - \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial t^2} \sin \varphi
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{w}_2(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}))_3 &= \left(-z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi - u_3(x, y, t) \sin \varphi \right) \ddot{\varphi} + \\
&+ 2 \left(-z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \cos \varphi - \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi \right) \dot{\varphi} + \\
&+ \left(z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi - u_3(x, y, t) \cos \varphi \right) \dot{\varphi}^2 - \\
&- z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t^2} \sin \varphi + \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial t^2} \cos \varphi
\end{aligned}$$

Все слагаемые, входящие в (3.14), имеют порядок ε ($\varepsilon \ll 1$).

Полный вектор ускорения (3.2) определяется суммой соответствующих компонентов векторов (3.9) и (3.14).

$$\begin{aligned}
(\mathbf{w})_1 &= -z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial t^2}, \\
(\mathbf{w})_2 &= (-y \sin \varphi - z \cos \varphi) \ddot{\varphi} + (-y \cos \varphi + z \sin \varphi) \dot{\varphi}^2 + \\
&+ \left(z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi - u_3(x, y, t) \cos \varphi \right) \ddot{\varphi} + \\
&+ 2 \left(z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \sin \varphi - \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi \right) \dot{\varphi} + \tag{3.15} \\
&+ \left(z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi + u_3(x, y, t) \sin \varphi \right) \dot{\varphi}^2 - \\
&- z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t^2} \cos \varphi - \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial t^2} \sin \varphi, \\
(\mathbf{w})_3 &= (y \cos \varphi - z \sin \varphi) \ddot{\varphi} + (-y \sin \varphi - z \cos \varphi) \dot{\varphi}^2 - \\
&- \left(z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi + u_3(x, y, t) \sin \varphi \right) \ddot{\varphi} + \\
&+ 2 \left(-z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \cos \varphi - \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi \right) \dot{\varphi} +
\end{aligned}$$

$$+ \left(z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi - u_3(x, y, t) \cos \varphi \right) \dot{\varphi}^2 -$$

$$- z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t^2} \sin \varphi + \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial t^2} \cos \varphi$$

Сравнение полученных результатов, как для скорости, так и для ускорения движений упругой пластинки показывают эффективность применения, как методов классической механики, так и асимптотических методов разделения движений [6,9].

Компоненты ускорения движения точек срединной плоскости пластинки, определяются согласно (3.15), при $z = 0$.

4. Напряженно - деформационное состояние упругой пластинки. Исследование напряженного состояния упругой пластинки основано на гипотезах [6,9], согласно которым компоненты деформации являются

$$\varepsilon_{zz} = 0, \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0; \varepsilon_{yz} = 0, \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} = 0; \varepsilon_{zx} = 0, \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial x^2}, \varepsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y^2}, \varepsilon_{xy} = -2z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial y}$$

Вычислим нормальные напряжения σ_{xx}, σ_{yy} для однородной и изотропной пластинки согласно закону Гука [4,5]

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})), \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{zz} + \sigma_{xx})), \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}))$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{2}{E} (1 + \nu) \sigma_{xy}, \varepsilon_{yz} = \frac{2}{E} (1 + \nu) \sigma_{yz}, \varepsilon_{zx} = \frac{2}{E} (1 + \nu) \sigma_{zx}$$

Из первых двух формул (4.2) и на основании третьей гипотезы (гипотеза об отсутствии давления между слоями пластинки), пренебрегая напряжением σ_{zz} по сравнению с напряжениями σ_{xx}, σ_{yy} , получим

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}), \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) \quad (4.3)$$

Учитывая соотношения (4.1), из (4.3) определим σ_{xx} и σ_{yy}

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_{yy} &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial x^2} \right)\end{aligned}\quad (4.4)$$

Из четвертой формулы (4.2) и (4.1), имеем

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{xy} = -\frac{Ez}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0 \quad (4.5)$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Все величины в выражениях (4.4) и (4.5) в каждый момент времени зависят от прогиба $u_3(x, y, t)$ срединной плоскости пластинки.

Заключение. Асимптотическим методом разделения движений исследована кинематика вращательного движения прямоугольной пластинки, одна сторона которой жестко закреплена к оси вращения, а другие свободны. Определены скорость и ускорения движения точек упругой пластинки относительно неподвижной системы координат по общей асимптотической формуле, определяющей кинематику движения трехмерного упругого тела. Дана оценка дополнительных величин, обусловленных упругостью пластинки. Кинематические величины определены в зависимости от прогиба срединной плоскости пластинки и могут быть применены в задачах динамики и управления движением механических систем содержащее упругие пластинки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гукасян А.А. Об управляемом движении упругого космического аппарата. Изв. НАН Армении, «Механика» - 1995, Т.48, № 1, с.55-63.
2. Гукасян А.А., Саркисян С.В. О колебательном движении прямоугольной пластинки. Изв. АН Арм. ССР, «Механика» - 1990, Т.43, № 4, с.13-23.
3. Айрапетян В.В., Гукасян А.А. Об управляемом движении одной модели летательного аппарата с упругими элементами. Изв. НАН Армении, «Механика» - 2000, Т.53, № 1, с.61-68.
4. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. Тех.-Теор. Лит., М.-Л., 1947, 465с.
5. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.; Наука, 1968. 592 с.

6. Гукасян А.А. Кинематический анализ движений упругой пластинки. Journal of Advanced Research in Natural Science 'JARiNS'. -Seattle, USA: Scientific Research Centre "MachineStructure", Amazon KDP, 2025. #22, p.4-14
7. Суслов Г.К. Теоретическая механика. ГОСТЕХИЗДАТ, М.-Л., 1946, 655с.
8. Лурье А.И. Аналитическая механика. Изд. Физ.-Мат. Лит., М. 1961, 824.
9. Гукасян А.А. Движение деформированного твердого тела. Ереван, Изд. НАН РА, Гитутюн, 2024, 190 с.
10. Гукасян А.А. Об одном приложении асимптотического метода. В журнале «Мехатроника, автоматика и робототехника». НИЦ МС, Санкт-Петербург, 2024, № 13, с. 23-27.
11. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. - М.: Наука, 1969.- 383с.
12. Черноусько Ф.Л. Динамика систем с упругими элементами большой жесткости. - Известия АН СССР, Механика твердого тела. - 1983,- № 4. - С. 101 - 113.

Сведения об авторе:

Гукасян Артуш Апресович – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, E-mail: ghukasyan10@yandex.com

Поступила в редакцию 9 февраля 2026г.

**ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА СВЕРХЗВУКОВЫЕ ФЛАТТЕРНЫЕ
КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ, ПОМЕЩЕННОЙ В
ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ**

Микилян М.А., Сагоян Р.О., Варданян И.А.

Ключевые слова: нелинейный флаттер, температурное поле, магнитное поле, сверхзвуковой поток газа, зависимость амплитуда-скорость

Mikilyan M.A., Sagoyan R.O., Vardanyan I.A.

Influence of Magnetic Field on Supersonic Flutter Oscillations of a Rectangular Plate Placed in a Temperature Field

KeyWords: nonlinear flutter, temperature field, magnetic field, supersonic gas flow, amplitude-velocity relationship

The nature of nonlinear oscillations of an isotropic rectangular plate in a supersonic gas flow in the presence of both thermal and magnetic fields is studied. The study was carried out taking into account two types of nonlinearity: aerodynamic (quadratic and cubic) and geometric (cubic). It was established that due to aerodynamic nonlinearity, the relation $A(v)$ (where A is the amplitude of nonlinear oscillations, v is the parameter characterizing the velocity of the flowing gas) is a multivalued function in certain ranges of velocity v . This fact is depicted in the graphs presented in the text in the form of different branches. In these figures, the lower branches are most likely unstable. The existence of such ranges of variation of v is shown, where flutter-type oscillations cannot be excited. The combined effect of thermal and magnetic fields on the behavior of nonlinear oscillations is studied.

Միկիլյան Մ.Ա., Սաղոյան Ռ.Օ., Վարդանյան Ի.Ա.

Մագնիսական դաշտի ազդեցությունը ջերմային դաշտում գտնվող ուղղանկյուն սալի գերձայնային տատանումների վրա

Հիմնաբառեր` ոչ գծային ֆլատեր, ջերմային դաշտ, մագնիսական դաշտ, գազի գերձայնային հոսանք, ամպլիտուդա-արագություն կապ

Ուսումնասիրվում է իզոտրոպ ուղղանկյուն սալի ոչ գծային տատանումների վարքը գազի գերձայնային հոսքում՝ ջերմային և մագնիսական դաշտերի առկայության դեպքում: Ուսումնասիրությունը կատարվել է՝ հաշվի առնելով ոչ գծայնության երկու տեսակները՝ աերոդինամիկական (քառակուսային և խորանարդային) և երկրաչափական (խորանարդային): Հաստատվել է, որ աերոդինամիկ ոչ գծայնության (հատկապես դրա քառակուսային մասի) պատճառով $A(v)$ կապը (որտեղ A -ն ոչ գծային տատանումների ամպլիտուդն է, v -ն՝ շրջհոսող գազի անչափ արագությունը բնութագրող պարամետրը) v արագության որոշակի միջակայքերում բազմաթեք ֆունկցիա է: Այս փաստը պատկերված է տեքստում ներկայացված գրաֆիկներում տարբեր ճյուղերի տեսքով: Այս նկարներում ստորին ճյուղերը, ամենայն հավանականությամբ, անկայուն են: Յուրեղ է տրվում v -ի փոփոխման այնպիսի միջակայքերի գոյությունը, որտեղ ֆլատերային չմարող տատանումներ չեն կարող գրգռվել: Ուսումնասիրվում է ջերմային և մագնիսական դաշտերի համատեղ ազդեցությունը ոչ գծային տատանումների վարքի վրա:

В статье исследуется характер нелинейных колебаний изотропной прямоугольной пластины в сверхзвуковом газовом потоке при наличии температурного и магнитного полей. Исследование проводилось с учетом двух типов нелинейности: аэродинамической (квадратичной и кубической) и геометрической (кубической). Установлено, что вследствие аэродинамической нелинейности соотношение $A(v)$ (где A - амплитуда нелинейных колебаний, v - параметр, характеризующий скорость потока газа) является многозначной функцией в определенных интервалах изменения скорости. Этот факт в виде различных ветвей изображен на графиках, приведенных в тексте. На этих рисунках нижние ветви, по всей вероятности, неустойчивы. Показано существование таких интервалов изменения скорости потока, где не могут быть возбуждены колебания флаттерного типа. Изучено комбинированное влияние температурного и магнитного полей на поведение нелинейных колебаний.

Введение. Представленная задача была поставлена академиком НАН РА, доктором физико-математических наук, профессором Г.Е.Багдасаряном. Статья является продолжением работ [25,26], поэтому здесь воспользуемся некоторыми их результатами.

Панельный флаттер - потеря устойчивости и интенсивные колебания панелей обшивок летательных аппаратов, возбуждающихся при взаимодействии с потоком воздуха при больших скоростях полета. Флаттер явился причиной многих авиакатастроф. Поэтому его изучение представляет собой одно из приоритетных направлений механики. При математическом моделировании обтекания твердого тела газовым потоком обычно предполагается, что обтекаемая поверхность не деформируется. Если изгибная жесткость обтекаемого тела невелика, от этого предположения необходимо отказаться и рассматривать совместные колебания тела и газового потока.

Среди задач математического моделирования флаттера выделяют широкий класс задач - задачи панельного флаттера, при формулировке которых обтекаемое тело можно рассматривать как пластинку или пологую оболочку [13,18,19].

Сверхзвуковой флаттер характерен для элементов обшивки и несущих поверхностей малого удлинения. Его возникновение - это переход от затухающих колебаний к колебаниям с возрастающей амплитудой, который естественно трактовать как потерю устойчивости [4,13,23]. При анализе устойчивости в линейной постановке удастся определить границу устойчивого режима обтекания, т.е. критическое значение скорости набегающего потока [2,3,24].

Следует отметить, что флаттер панели может возникать на плоских или изогнутых панелях. Разные факторы могут по-разному влиять на характер границы флаттера. Эти факторы могут быть структурными или геометрическими, термодинамическими, магнитными, аэродинамическими, возникающими из характеристик потока, появляющимися в уравнениях состояния [5,9,12].

Устойчивость изотропных пластин постоянной толщины в сверхзвуковом потоке газа широко изучена [2-4,8,9,27], в то же время, насколько известно авторам, задача аэротермоупругой устойчивости панелей в переменном по толщине температурном поле была рассмотрена лишь в незначительной степени [5-7,21]. Нужно отметить, что вопросам аэро-магнито-упругой устойчивости посвящено очень малое количество работ [14,15,17,28]. В частности, в настоящей работе исследуется характер нелинейных колебаний изотропной прямоугольной пластинки в сверхзвуковом газовом потоке при наличии температурного и магнитного полей. Используя основные принципы теорий аэро-термо-упругости и аэро-магнито-упругости изотропных тел [11,20,22], теории гибких пластин [30,31], теории магнитоупругости и линейного закона изменения по толщине пластины температурного поля [5,6], получены нелинейные уравнения колебаний и соответствующие граничные условия. Показано, что коэффициенты

этих аэро-термо-магнито-упругих определяющих уравнений зависят от температуры и параметра магнитного поля, и, следовательно, характер флаттерных колебаний пластинки зависит от совместного влияния этих явлений. Это явление обусловлено тем, что под воздействием температурного поля в невозмущенном состоянии пластинка выпучивается из-за неоднородности температурного поля по ее толщине. Показано также, что приложенное магнитное поле оказывает существенное влияние на характер флаттерных колебаний рассматриваемой системы.

Формулировка задачи. Рассмотрим тонкую изотропную прямоугольную пластинку постоянной толщины h , находящуюся в стационарном температурном поле T и в продольном магнитном поле с вектором напряженности $\vec{H}_0(H_{01}, 0, 0)$. Декартова система координат (x_1, x_2, x_3) выбрана так, чтобы срединная плоскость пластины совпадала с координатной плоскостью (x_1, x_2) . Сверхзвуковой поток газа с невозмущенной скоростью U направлен вдоль оси Ox_1 , с одной стороны панели, как показано на рис. 1.

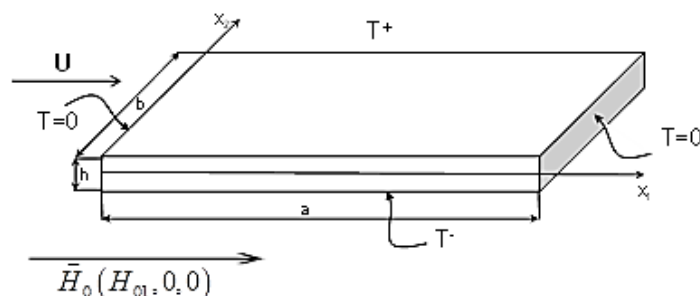


Рис.1. Геометрическая интерпретация задачи.

Принимается, что пластинка в направлении, перпендикулярном к скорости обтекающего потока, достаточно длинная и однородно закреплена по длинным сторонам. В этом случае срединная поверхность изогнутой пластинки будет близка к цилиндрической. Поэтому, направляя ось Ox_2 вдоль длинной стороны, считаем, что все величины (как возмущенного, так и невозмущенного состояний) не зависят от координаты x_2 .

Основные предположения. Для исследования аэро-термо-магнито-упругой устойчивости панели используются следующие предположения:

- гипотеза Кирхгофа о недеформируемой нормали [30,31];
- основные положения теории гибких пластин [30,31];
- при расчете аэродинамического давления используется модифицированная формула поршневой теории [1,2,12]:

$$p = -\alpha p_\infty \lambda^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \left(\frac{v_3}{a_\infty} \right) + \frac{5-\alpha+3\lambda^2}{4(1+\lambda^2)^2} \left(\frac{v_3}{a_\infty} \right)^2 + \frac{(2\alpha+3)\lambda^4 + (10-\alpha^2)\lambda^2 + \alpha^2 - 2\alpha + 9}{12(1+\lambda^2)^3 \sqrt{1+\lambda^2}} \left(\frac{v_3}{a_\infty} \right)^3 + \dots \right\}, \quad (1)$$

где p - давление газа на поверхность пластинки, $a_\infty^2 = \alpha p_\infty \rho_\infty^{-1}$ - скорость звука в невозмущенном газе, p_∞ и ρ_∞ - давление и плотность газа в невозмущенном состоянии, α - показатель политропы газа, V_3 - нормальная составляющая скорости точек поверхности пластинки,

$$\lambda^2 = \frac{V_A^2}{a_\infty^2}, \quad V_A^2 = \frac{B_{01}^2}{\rho_\infty \mu_0},$$

V_A - величина, численно равная скорости распространения альфвеновских электромагнитных волн, $B_{01} = \mu_0 \mu_r H_{01}$, μ_r - относительная магнитная проницаемость, μ_0 ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$) - магнитная постоянная;

г) линейный закон температурного поля по толщине пластины [6,13]:

$$T(x_1, x_2, x_3) = T_0(x_1, x_2) + x_3 \Theta(x_1, x_2); \quad (2)$$

д) гипотеза Неймана об отсутствии касательных напряжений [31].

Под действием неоднородного по толщине стационарного температурного поля ($\Theta \neq 0$) происходит выпучивание пластинки (с прогибом $w_T(x_1)$) и, вследствие этого, появляется аэроупругое давление, которое, согласно предположению (в), определяется формулой (1). В линейном приближении для указанного давления получается выражение $\alpha p_\infty \sqrt{1+\lambda^2} a_\infty^{-1} dw_T / dx_1$.

На основе приведенных уравнений и соответствующих условий на кромках $x_1 = 0$ и $x_1 = a$ пластинки (граничные условия приводятся в ходе изложения) исследуется устойчивость указанного выпученного (невозмущенного) состояния, под действием температурного поля и давления обтекающего сверхзвукового потока газа. Для определения характеристик невозмущенного состояния, кроме уже принятых предположений, принимаются также следующие:

а) деформации невозмущенного состояния настолько малы, что можно воспользоваться линейной теорией аэро-термо-магнито-упругости;

б) на лицевых поверхностях пластинки ($x_3 = \pm h/2$) происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона-Рихмана (на поверхностях сохраняется постоянная температура со значениями T^+ и T^- соответственно), а боковые поверхности ($x_1 = 0$ и $x_1 = a$) теплоизолированы.

На основе принятых предположений найдено следующее нелинейное дифференциальное уравнение аэро-термо-магнито-упругости:

$$\begin{aligned}
D \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} - N_1^T \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - N_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{d^2 w_T}{dx_1^2} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\rho h \varepsilon + \frac{\alpha p_\infty \sqrt{1+\lambda^2}}{a_\infty} \right) \frac{\partial w}{\partial t} + \\
+ \alpha p_\infty M \sqrt{1+\lambda^2} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \alpha p_\infty M^2 \frac{\alpha + 1 + (\alpha + 4)\lambda^2 + 3\lambda^4}{4(1+\lambda^2)^2} \left[2 \frac{dw_T}{dx_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] \frac{\partial w}{\partial x_1} + \\
+ \alpha p_\infty M^3 \sqrt{1+\lambda^2} \frac{\alpha + 1 + (\alpha + 1)(\alpha + 3)\lambda^2 + (\alpha^2 - 3\alpha + 11)\lambda^4 + (2\alpha + 3)\lambda^6}{12(1+\lambda^2)^4} \times \\
\times \left[3 \frac{dw_T}{dx_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 = 0
\end{aligned} \tag{3}$$

где $M = U a_\infty^{-1}$ - число Маха в невозмущенном потоке газа, $W(x_1, x_2, t)$ - прогиб пластинки, $D = Eh^3 / 12(1-\mu^2)$, E модуль упругости, ρ - плотность, μ - коэффициент Пуассона материала пластинки, ε - линейный коэффициент затухания. Нужно отметить, что уравнение (3) получено предполагая, что $\frac{v_3}{a_\infty} = \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) a_\infty^{-1}$.

Решения уравнения (3) должны удовлетворять условиям закрепления краев пластинки $x_1 = 0$ и $x_1 = a$. Будет рассмотрен случай, когда края пластинки шарнирно оперты и неподвижны вдоль оси Ox_1 .

В (3) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
N_1^T = - \frac{Eh}{1-\mu} \alpha T_0, \\
N_1 = \frac{Eh}{2a(1-\mu^2)} \int_0^a \left(2 \frac{dw_T}{dx_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 \right) dx_1
\end{aligned} \tag{4}$$

где α коэффициент температурного расширения.

Решения уравнения (3) должны удовлетворять следующим условиям:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \quad x_1 = a, \quad (5)$$

которые представляют собой условия шарнирного опирания краев пластинки.

В работе [25] определено температурное поле и выпучивание пластинки в следующем виде

$$T = T_0(x_1) + x_3 \Theta(x_1), \quad (6)$$

$$T_0 = \frac{T^+ + T^-}{2}, \quad \Theta = \frac{k(T^+ - T^-)}{kh - 2\eta}.$$

а прогиб w_T определен методом Бубнова-Галеркина и имеет следующее выражение:

$$w_T(x_1) = -R\Theta \left\{ \frac{1}{2} x_1(x_1 - a) + \frac{a^2 K \nu \sqrt{1 + \lambda^2}}{36 + (K \nu \sqrt{1 + \lambda^2})^2} \left[\frac{3\sqrt{1 + \lambda^2}}{8\pi} K \nu \sin \frac{\pi x_1}{a} + \frac{9}{16\pi} \sin \frac{2\pi x_1}{a} \right] \right\}. \quad (7)$$

В (6) и (7) η - коэффициент теплопроводности, k - коэффициент теплопередачи, а K , ν описаны ниже, формулой (10).

Метод решения. Полученную нелинейную задачу (3)–(5) решаем приближенно, представляя решение в виде [10]

$$w(x_1, t) = \sum_{i=1}^N f_i(t) \sin \lambda_i x_1, \quad \left(\lambda_i = \frac{i\pi}{a} \right), \quad (8)$$

где $f_i(t)$ являются функциями времени t , которые необходимо определить.

Представление (8) удовлетворяет граничным условиям, перечисленным в уравнении (5). Подставляя формулу (8) в уравнение (3) и используя метод Бубнова-Галеркина, получается нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $f_i(t)$.

В работе будем использовать биномиальное приближение [2,31]:

$$w = f_1(t) \sin \lambda_1 x + f_2(t) \sin \lambda_2 x.$$

Подставляя решение в указанном виде в уравнение (3) и применяя известный метод ортогонализации, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Затем с помощью безразмерных функций $x_i = f_i(t)/h$ выводится нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{d\tau^2} + \chi \frac{dy_1}{d\tau} + (1 - \bar{T}) y_1 - \frac{2}{3} K v y_2 + \alpha_{11}^\lambda y_1^2 + \alpha_{12}^\lambda y_2^2 + y_2 [\beta_{11}^\lambda y_1^2 + \beta_{12}^\lambda y_2^2] + \\ + 3 y_1 [y_1^2 + \gamma y_2^2] + \bar{\Theta} [\delta_{11}^{\lambda, \Theta} y_1 + \delta_{12}^{\lambda, \Theta} y_2 + (\alpha_{11}^{\lambda, \Theta} + \alpha_{11}^\Theta) y_1^2 + \\ + (\alpha_{12}^{\lambda, \Theta} + \alpha_{12}^\Theta) y_2^2 + (\alpha_{13}^{\lambda, \Theta} + \alpha_{13}^\Theta) y_1 y_2] = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_2}{d\tau^2} + \chi \frac{dy_2}{d\tau} + \frac{2}{3} K v y_1 + \gamma (\gamma - \bar{T}) y_2 + \alpha_{21}^\lambda y_1 y_2 + y_1 [\beta_{21}^\lambda y_1^2 + \beta_{22}^\lambda y_2^2] + \\ + 3 \gamma y_1 [y_1^2 + \gamma y_2^2] + \bar{\Theta} [\delta_{21}^{\lambda, \Theta} y_1 + \delta_{22}^{\lambda, \Theta} y_2 + (\alpha_{21}^{\lambda, \Theta} + \alpha_{21}^\Theta) y_1^2 + \\ + (\alpha_{22}^{\lambda, \Theta} + \alpha_{22}^\Theta) y_2^2 + (\alpha_{23}^{\lambda, \Theta} + \alpha_{23}^\Theta) y_1 y_2] = 0, \end{aligned}$$

где, вместе с безразмерным временем $\tau = \Omega_1 t$, введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{T} = R T_0 \left(\frac{a}{h} \right)^2 \left(\frac{12}{\pi^2} \right), \quad \bar{\Theta} = R \Theta h \left(\frac{a}{h} \right)^2 \frac{1}{36 + K^2 \bar{v}^2}, \\ R = \alpha (1 + \mu), \\ K = \frac{4 \mathfrak{a} p_\infty}{\rho \omega_1^2 h^2}, \quad \bar{v} = M \sqrt{1 + \lambda^2} \frac{h}{a}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\omega_i = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left(\frac{i\pi}{a} \right)^2 \quad (i = 1, 2), \quad \gamma = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \chi = \frac{1}{\omega_1} \left(\varepsilon + \frac{a_\infty \rho_\infty \sqrt{1 + \lambda^2}}{\rho h} \right).$$

коэффициенты, учитывающие только магнито-аэро-динамическое влияние:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^\lambda = \frac{A}{12}, \quad \alpha_{12}^\lambda = \frac{7A}{15}, \quad \alpha_{21}^\lambda = \frac{2A}{15}, \\ \beta_{11}^\lambda = \beta_{21}^\lambda = \frac{B}{30}, \quad \beta_{12}^\lambda = -\frac{6B}{35}, \quad \beta_{22}^\lambda = \frac{22B}{105}, \end{aligned} \quad (11)$$

коэффициенты, учитывающие только термо-аэро-динамическое влияние:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^\Theta = \frac{9C}{8}, \quad \alpha_{12}^\Theta = \frac{3C}{2}, \quad \alpha_{13}^\Theta = \alpha_{21}^\Theta = -\frac{27}{2\pi} K \bar{v}, \\ \alpha_{22}^\Theta = -\frac{81}{\pi} K \bar{v}, \quad \alpha_{23}^\Theta = 3C, \end{aligned} \quad (12)$$

коэффициенты, учитывающие совокупное магнито-термо-аэро-динамическое влияние:

$$\begin{aligned}
\delta_{11}^{\lambda, \Theta} &= \frac{9A}{4}, \quad \delta_{12}^{\lambda, \Theta} = -\frac{21A}{40}K\bar{v}, \quad \delta_{21}^{\lambda, \Theta} = -\frac{3A}{40}K\bar{v}, \quad \delta_{22}^{\lambda, \Theta} = \frac{(180 + K^2\bar{v}^2)A}{80}, \\
\alpha_{11}^{\lambda, \Theta} &= -\frac{3B}{160}K\bar{v}, \quad \alpha_{12}^{\lambda, \Theta} = \frac{81B}{280}K\bar{v}, \quad \alpha_{13}^{\lambda, \Theta} = \frac{(180 + K^2\bar{v}^2)B}{160}, \\
\alpha_{21}^{\lambda, \Theta} &= \frac{(900 + K^2\bar{v}^2)B}{640}K\bar{v}, \quad \alpha_{22}^{\lambda, \Theta} = \frac{(630 + K^2\bar{v}^2)B}{210}K\bar{v}, \quad \alpha_{23}^{\lambda, \Theta} = -\frac{33B}{140}K\bar{v}.
\end{aligned}
\tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1 + \varkappa + 3\lambda^2}{(1 + \lambda^2)^2} K\bar{v}^2, \quad C = \frac{1152 + (32 - 3\pi^2)K^2\bar{v}^2}{\pi^3}, \\
B &= \frac{\pi(\varkappa + 1 + (\varkappa + 1)(\varkappa + 3)\lambda^2 + (\varkappa^2 - 3\varkappa + 11)\lambda^4 + (2\varkappa + 3)\lambda^6)}{(1 + \lambda^2)^5} K\bar{v}^3.
\end{aligned}
\tag{14}$$

В приведенных выше уравнениях и обозначениях χ , v , λ , \bar{T} , $\bar{\Theta}$ - параметры, характеризующие процесс затухания, скорость потока, магнитное и температурное поле соответственно.

Соответствующая задача устойчивости рассматриваемой магнито-аэро-термоупругой системы в первом приближении получается из решений системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (9), зависящих от скорости потока v , температуры (\bar{T} , $\bar{\Theta}$) и магнитного поля (λ). В работе [25] детально рассмотрена эта линейная задача, построены области устойчивости и исследовано влияние магнитного поля на эти области.

Флаттерные нелинейные колебания. Зависимость амплитуда-скорость. Начнём изучение нелинейной системы (9), которая содержит члены с квадратичными нелинейностями, которые характеризуют асимметрию нелинейности, присущую проблемам устойчивости гибких оболочек. Будем искать приближенное периодическое решение уравнений (9) в следующей форме [15]

$$\begin{aligned}
z_1 &= C_1 + A_1 \cos \theta\tau + B_1 \sin \theta\tau + \dots \\
z_2 &= C_2 + A_2 \cos \theta\tau + B_2 \sin \theta\tau + \dots
\end{aligned}
\tag{15}$$

где A_i , B_i , C_i и θ ($i = 1, 2$) неизвестные постоянные. Точками обозначены члены с высшими гармониками.

Подставляя (15) в (9) и приравнивая к нулю коэффициенты при свободных членах, $\cos \theta\tau$ и $\sin \theta\tau$, и пренебрегая членами с высшими гармониками, аналогично [10], получим систему нелинейных алгебраических уравнений. Далее, выражая B_1, C_1 и

B_2, C_2 через A_1 и A_2 , получим следующую систему, определяющую характеристики амплитуд колебаний рассматриваемой магнито-аэроупругой системы A_1 и A_2 в зависимости от параметров θ, ν и λ :

$$\begin{aligned}
& A_1(1 - \bar{T} - \theta^2) - \frac{2}{3} K \bar{\nu} A_2 + \bar{\Theta}(\delta_{11}^{(\lambda, \theta)} A_1 + \delta_{12}^{(\lambda, \theta)} A_2) + \\
& + 2\alpha_{11}^\lambda A_1 C_1 + 2\bar{\Theta}(\alpha_{11}^\theta + \alpha_{11}^{(\lambda, \theta)}) A_1 C_1 + 2\alpha_{12}^\lambda A_2 C_2 + 2\bar{\Theta}(\alpha_{12}^\theta + \alpha_{12}^{(\lambda, \theta)}) A_2 C_2 + \\
& + \frac{3}{4} A_2 (\beta_{11}^\lambda A_1^2 + \beta_{12}^\lambda A_2^2) + \frac{9}{4} A_1 (A_1^2 + \gamma A_2^2) + \bar{\Theta}(\alpha_{13}^\theta + \alpha_{13}^{(\lambda, \theta)}) (A_1 C_2 + A_2 C_1) = 0, \\
& A_1(\gamma(\gamma - \bar{T}) - \theta^2) + \frac{2}{3} K \bar{\nu} A_2 + \bar{\Theta}(\delta_{21}^{(\lambda, \theta)} A_1 + \delta_{22}^{(\lambda, \theta)} A_2) + 2\alpha_{21}^\lambda (A_1 C_2 + A_2 C_1) + \\
& + 2\bar{\Theta}[(\alpha_{21}^\theta + \alpha_{21}^{(\lambda, \theta)}) A_1 C_1 + (\alpha_{22}^\theta + \alpha_{22}^{(\lambda, \theta)}) A_2 C_2] + \tag{16} \\
& + \frac{3}{4} A_1 (\beta_{21}^\lambda A_1^2 + \beta_{22}^\lambda A_2^2) + \frac{9}{4} \gamma A_2 (A_1^2 + \gamma A_2^2) + \bar{\Theta}(\alpha_{23}^\theta + \alpha_{23}^{(\lambda, \theta)}) (A_1 C_2 + A_2 C_1) = 0
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
C_1 &= -\frac{1}{2\Delta} [M_1 \Delta_2 - M_1 \Delta_4] \\
C_2 &= -\frac{1}{2\Delta} [M_2 \Delta_1 - M_1 \Delta_3] \tag{17}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
M_1 &= \alpha_{11}^\lambda A_1^2 + \alpha_{12}^\lambda A_2^2 + \bar{\Theta}[(\alpha_{11}^\theta + \alpha_{11}^{(\lambda, \theta)}) A_1^2 + (\alpha_{12}^\theta + \alpha_{12}^{(\lambda, \theta)}) A_2^2 + (\alpha_{13}^\theta + \alpha_{13}^{(\lambda, \theta)}) A_1 A_2] \\
M_2 &= \alpha_{21}^\lambda A_1 A_2 + \bar{\Theta}[(\alpha_{21}^\theta + \alpha_{21}^{(\lambda, \theta)}) A_1^2 + (\alpha_{22}^\theta + \alpha_{22}^{(\lambda, \theta)}) A_2^2 + (\alpha_{23}^\theta + \alpha_{23}^{(\lambda, \theta)}) A_1 A_2] \\
\Delta_1 &= 1 - \bar{T} + \frac{9}{2} A_1^2 + \frac{3}{2} \gamma A_2^2 + \beta_{11}^\lambda A_1 A_2 + \bar{\Theta} \delta_{11}^{(\lambda, \theta)} \\
\Delta_2 &= \gamma(\gamma - \bar{T}) + \frac{3}{2} \gamma A_1^2 + \frac{9}{2} \gamma^2 A_2^2 + \beta_{22}^\lambda A_1 A_2 + \bar{\Theta} \delta_{22}^{(\lambda, \theta)} \\
\Delta_3 &= \frac{2}{3} K \bar{\nu} + \frac{3}{2} \beta_{21}^\lambda A_1^2 + \frac{1}{2} \beta_{22}^\lambda A_2^2 + 3\gamma A_1 A_2 \\
\Delta_4 &= -\frac{2}{3} K \bar{\nu} + \frac{3}{2} \beta_{12}^\lambda A_2^2 + \frac{1}{2} K \nu^3 \beta_{11}^\lambda A_1^2 + 3\gamma A_1 A_2 \\
\Delta &= \Delta_1 \Delta_2 - \Delta_3 \Delta_4.
\end{aligned}$$

Таким образом, задача определения амплитуды колебаний флаттерных колебаний в зависимости от характеристик магнитного и температурного полей, скорости потока и частоты колебаний сводится к решению нелинейной системы (16).

Учитывая, что задача многопараметровая, как и в работе [10], исследование проводится при разных значениях частоты колебаний. В настоящей работе рассматривается только случай докритических частот $\theta < \theta_{cr}$ и численное исследование проведено для постоянных и переменных температур и исследовано влияние магнитного поля на рассматриваемую зависимость.

Численные расчеты произведены для пластин, построенных из Зеродура при $\alpha = 23.8 \cdot 10^{-6}$ град⁻¹; $k = 1200$ Вт/(м² град); $\lambda = 210$ Вт/(м град); $\mu = 0.34$; $a = 1$ м; $h/a = 1/100$ [29].

При постоянных отрицательных температурах и при отсутствии магнитного поля указанная зависимость исследована в работе [12]. Установлено, что функция $A(v)$ имеет точку минимума и определена при любом значении скорости набегающего потока. При этом показано, что функция $A(v)$ является однозначной в интервале $v \in [0, v_*]$, значение v_* мы назвали нижней критической скоростью и показано, что $v_* < v_{cr}$. Начиная с $v > v_*$ появляется вторая (возможно, неустойчивая) ветвь амплитуды, которая также имеет точку максимума. С увеличением скорости потока, появляется значение \bar{v} такое, что при $v \geq \bar{v}$ появляется возможность возбуждения монотонно убывающих установившихся колебаний. Таким образом, на всей области определения функция $A(v)$ может быть как однозначной, так и многозначной.

Произведенные многочисленные расчеты показывают, что учет магнитного поля качественно изменяет указанную картину и, следовательно, поведение зависимости $A(v)$. А именно, характер рассматриваемой функции принимает монотонный характер, принимает нулевое значение в точке v_* и при выбранных нами геометрических параметрах пластинки, магнитное поле приводит к появлению зон молчания. Зоной молчания назовем тот интервал изменения скорости, в котором не могут быть вызваны флаттерные колебания. На рис.2 показан случай $\lambda = 1$, из которого видно, что если $v \in [0, v_*]$, то функция $A(v)$ монотонно убывает, достигая нулевого значения $A(v_*) = 0$, при этом магнитное поле не оказывает существенного влияния на значения амплитуды и нижней критической скорости. С увеличением скорости набегающего потока появляется конечный интервал изменения скорости $[v_1, v_2]$, где возможно возбудить установившиеся флаттерные колебания. При выбранных геометрических параметрах и параметра магнитного поля зонами молчания являются $[v_*, v_1]$ и $[v_2, \bar{v}]$.

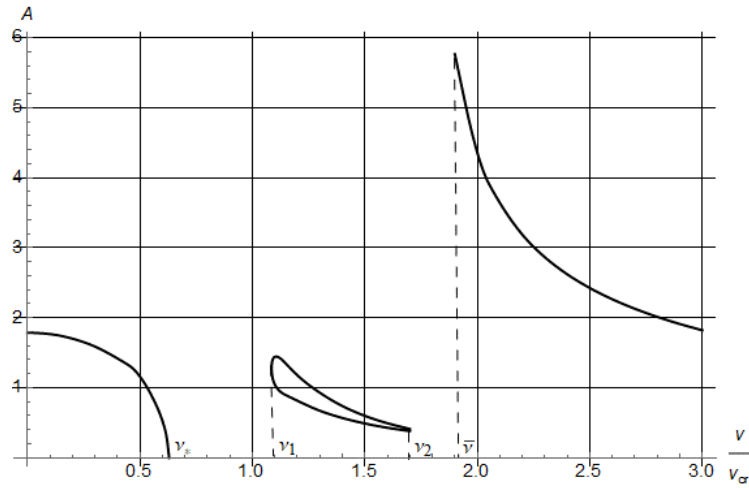


Рис.2. Зависимость амплитуда-скорость в присутствии магнитного поля ($\lambda = 1$) и $T_0 = -50, \bar{\Theta} = 0$

Дальнейшее увеличение значения параметра магнитного поля приводит к следующей картине: $V_2 \rightarrow V_1$, значение \bar{v} увеличивается, и следовательно, увеличивается длина интервала зоны молчания (Рис.3).

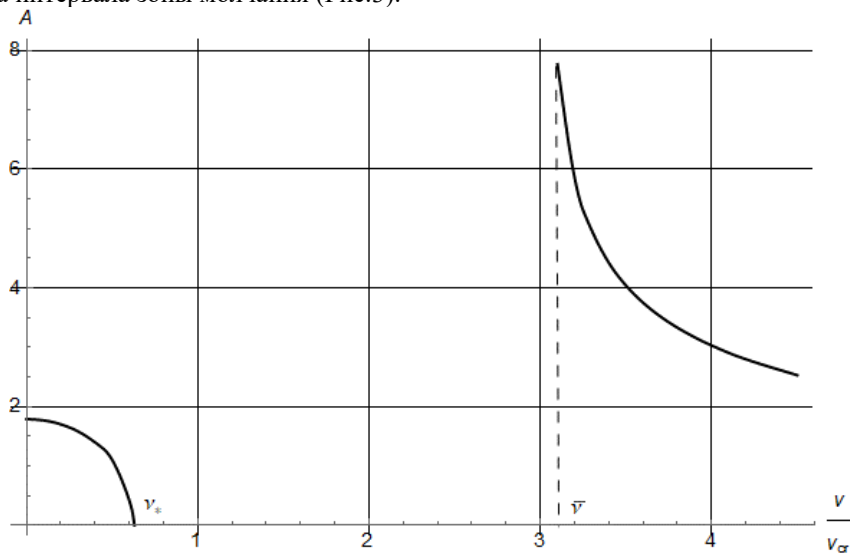


Рис.3. Зависимость амплитуда-скорость в присутствии сравнительно сильного магнитного поля ($\lambda = 2$) и $T_0 = -50, \bar{\Theta} = 0$

Сравнивая опять с результатами работы [12], установлено, что при положительных постоянных температурах ($T_0 > 0, \bar{\Theta} = 0$) магнитное поле оказывает только количественное влияние на зависимость амплитуда-скорость.

При $T_0 = 0, \bar{\Theta} \neq 0$ и отсутствии магнитного поля ($\lambda = 0$), градиент температурного поля не оказывает существенного влияния на характер функции $A(v)$ и она аналогична предыдущему случаю. Учет и дальнейшее увеличение параметра магнитного поля приводит к расширению зоны молчания и, следовательно, начиная с определенного значения магнитного поля, можно возбуждать флаттерные колебания только в определенном конечном интервале изменения параметра скорости $v \in [0, v_*]$.

При докритических частотах, близких к критической, исследование приводит к картине, приведенной на рис.4.

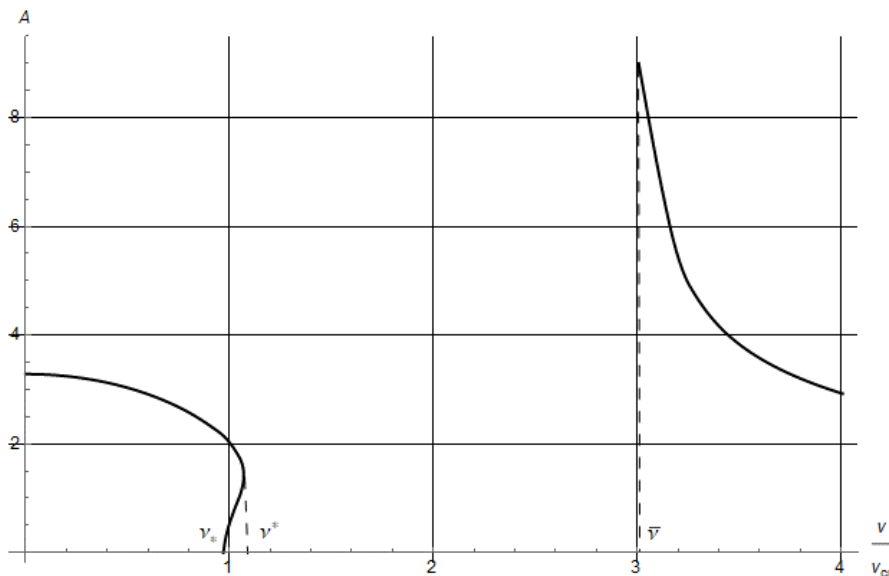


Рис.4. Зависимость амплитуда-скорость в присутствии сравнительно сильного магнитного поля ($\lambda = 2$) и $T_0 = -50, \bar{\Theta} = 0$

Когда $T_0 \neq 0, \bar{\Theta} \neq 0$, то совокупное влияние температурных составляющих приводит к соотношениям, которые уже были описаны.

Выводы. В данной работе показано, что учет магнитного поля приводит как к качественным, так и к количественным изменениям зависимости амплитуда-скорость рассматриваемой аэро-термо-магнито-упругой системы по сравнению с чисто аэроупругой или аэро-термо-упругой задачами.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 25RG-2C167.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ashley H. and Zartarian C. Piston Theory—A New Aerodynamic Tool for the Aeroelastician, *J. Aeronaut. Sci.*, 1956, vol. 23, no. 6, pp. 1109–1118.
2. Bagdasaryan G.Y. An asymptotic method to study magnetoelastic oscillations of rectangular plates. *Mat. methods and phys.-mech. fields*, 1986, N24, p.72-75.
3. Bagdasaryan G.Y. Nonlinear flutter equations for thin plates in a magnetic field. *Interuniversity collection of scientific papers, Mechanics*, Yerevan: YSU Publishing House, 1982, issue 2, p.22-30.
4. Baghdasaryan G., Mikilyan M., Saghoyan R., Cestino E. Frulla G., Marzocca P. Nonlinear LCO “amplitude–frequency” characteristics for plates fluttering at supersonic speeds. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Volume 77, December 2015, Pages 51–60.
5. Baghdasaryan G., Mikilyan M., Vardanyan I., Danoyan E.H., Melikyan K. Influence of boundary conditions on the aero-thermo-elastic stability of a closed cylindrical shell. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1474 (2020) 012008*; doi:10.1088/1742-6596/1474/1/012008
6. Baghdasaryan G., Mikilyan M., Vardanyan I., Melikyan K.V., Marzocca P. Thermoelastic non-linear flutter oscillations of rectangular plate. *Journal of Thermal stresses*, 2021, vol.44(6), pp. 731-754.
7. Baghdasaryan G., Mikilyan M., Vardanyan I., Panteleev A., Severina N.S. Nonlinear flutter response of cylindrical shell in thermal field and supersonic gas flow. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 2020, 927(1), 012022; doi:10.1088/1757-899X/927/1/012022.
8. Baghdasaryan G., Panteleev A.V., Mikilyan M.A. Mathematical Modeling of the Problem of Magneto-Aero-Elastic Stability of Rectangular Plate. *Advances in Theory and Practice of Computational Mechanics*, Springer Singapore, 2022, pp 13–27. https://doi.org/10.1007/978-981-16-8926-0_2
9. Baghdasaryan G.Y., Belubekyan M.V. Vibrations and stability of cylindrical shell in conductive gas flow, magnetic field is being present. 1966, p.120-125.
10. Bagdasaryan G., Mikilyan M. *Effects of Magnetoelastic Interactions in Conductive Plates and Shells*. Springer, 2016, -286p.
11. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Marzocca, P. Supersonic flutter characteristics of dielectric rectangular plate: The effects of magneto-aero-hydrodynamic interactions. *Journal of Fluids and Structures*, 2023, 118, 103856, <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2023.103856>
12. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A. *Magnetoelastic Vibrations and Stability of Magnetically Active Plates and Shells*. Springer, 2024.
13. Bolotin V.V. *Non-conservative problems of the theory of elastic stability*. – Moscow, Fizmatgiz, 1961. -339 p.
14. Borghi C.A., Carraro M.R., and Cristofolini A., “Analysis of Magnetoplasmadynamic Interaction in the Boundary Layer of a Hypersonic Vehicle”, *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 41, No. 4, 2004.
15. Borghi C.A., Carraro M.R., and Cristofolini A., “Magnetohydrodynamics Interaction in

the Shock Layer of a Wedge in a Hypersonic Flow”, IEEE Transaction on Plasma Science, vol. 34, no. 5, October 2006.

16. Chebotaryev N.V., Meyman N.S. Gauss-Hurwitz problem for polynomials and integer-valued functions. Proc. AN SSSR, 1949.
17. Cristofolini A. et al., “Experimental Investigation on the MHD Interaction around a Sharp Cone in an Ionized Argon Flow”, AIAA-2006-3075, 37th AIAA Plasma dynamics and Lasers Conference, San Francisco, California, June 2006
19. Dowell. E.H. “Nonlinear oscillations of a fluttering plate.” AIAA Journal, Vol. 4, No. 7, 1966, pp. 1267-1275. DOI: 10.2514/3.3658.
20. Dowell. E.H. “Nonlinear oscillations of a fluttering plate. II.” AIAA Journal, Vol. 5, No. 10, 1967, pp. 1856-1862. doi:10.2514/3.4316.
21. Mikilyan M.A. Nature of Supersonic Flutter of Aero-Magneto-Elastic System at Pre-Critical Flowing Speeds. IEEE Aerospace Conference Proceedings, 2024, p.529-537, DOI:10.1109/aero58975.2024.10521224
22. Mikilyan M.A. Thermoelastic Response of Closed Cylindrical Shells in a Supersonic Gas Flow. Aerospace 2020, 7(8), 103; <https://doi.org/10.3390/aerospace7080103>
23. Mikilyan M.A., Vardanyan I.A. The effects of magnetic field on supersonic flutter characteristics of dielectric plate: Dependence amplitude-speed. Journal of Fluids and Structures, 2024, vol. 128, 104140, DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2024.104140.
24. Miles J. W., Supersonic flutter of a cylindrical shell, Journal of Aeronautical Science Vol. 24, No. 2, 1957; Vol. 25, No. 5, 1958, pp.107-118.
25. Микилян М.А., Амбарцумян А.Г., Варданян И.А. Влияние магнитного поля на критическую скорость сверхзвукового флаттера диэлектрической пластины. Известия НАН РА, Механика, т.77 (2), 2024, стр.47-67, DOI: 10.54503/0002-3051-2024.77.2-47
26. Микилян М., Тоноян В., Честино Э. Аэро-термо-магнито-упругая устойчивость удлиненной пластинки в сверхзвуковом потоке газа. Известия НАН РА, Механика, т.78 (2), 2025, стр.43-58, DOI: 10.54503/0002-3051-2025.78.2-43
27. Mikilyan M.A., Tonoyan V.U., Cestino E. Effect of magnetic field on critical speed of aero-thermo-elastic oscillations of high aspect ratio plate. In book: TOPICAL PROBLEMS OF CONTINUUM MECHANICS, Proceedings of IX International Conference, 22-26 September 2025, Tsaghkadzor, Armenia, p.303-308.
28. Panteleev A.V., Mikilyan M.A., Vardanyan I.A. Stability of a dielectric rectangular plate in a longitudinal magnetic field in the presence of a supersonic flow field. Aerospace Systems, 2023, 6, 605–611. DOI:10.1007/s42401-023-00217-6
29. Resler, R. L., and Sears, W. R., “The Prospects for Magneto-Aerodynamics,” Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 25, No. 4, 1958, pp. 235-245, 258.
30. Russell R. Zerodur. OPTI521, 2011.
31. Vlasov V. Z. The General Theory of Shells, Gostekhizdat, Moscow, 1949.
32. Volmir S. Non-linear Dynamics of Plates and Shells, Nauka, Moscow, 1972.

Сведения об авторах:

Микилян Марине Александровна – кандидат физ.-мат. наук., доцент, ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА
Phone: (+374 91) 191129; E-mail: mikilyan@sci.am

Варданян Ирэн Арменовна – кандидат физ.-мат. наук., внештатный научный сотрудник Института механики НАН РА
Phone: (+374 55) 344473; E-mail: irena_123@bk.ru

Сагоян Рафаел Оникович – кандидат физ.-мат. наук.
Phone: (+374 93) 248226; E-mail: rafael1984@mail.ru

**ЗАДАЧА ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА ЗАЩЕМЛЕННОГО ПО ОДНОЙ ГРАНИ
УПРУГОГО СЛОЯ ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ВНЕ
НЕКОТОРОГО ОТРЕЗКА**

Саакян А.В., Амирджанян А.А.

Ключевые слова: продольный сдвиг, контактная задача, сингулярное интегральное уравнение, полубесконечный интервал, метод механических квадратур.

Sahakyan A.V., Amirjanyan H.A.
Problem of Longitudinal Shear of an Elastic Layer Fastened on One Face With Displacement Restricted Outside a Certain Segment

Keywords: longitudinal shear, contact problem, singular integral equation, semi-infinite interval, method of mechanical quadratures

The problem of longitudinal shear of an elastic layer fixed along its entire lower face and outside a certain strip of its upper face is considered. A rigid punch of finite width is applied to the free surface of the upper face. This punch does not cover the entire free surface and is subjected to a tangential load, creating the conditions for longitudinal shear. The solution is reduced to solving a system of singular integral equations on finite and semi-infinite intervals. The problem is solved using the mechanical quadrature method, which allows for a detailed numerical analysis of the dependence of contact stress distribution, stress concentration coefficients at the ends, and rigid punch displacement on the layer thickness and the width of the stress-free portion of the layer's upper face. The results are presented as graphs.

Սահակյան Ա.Վ., Ամիրջանյան Հ.Ա.
**Մեկ հիմքով ամրացված առաձգական շերտի երկայնական սահրի խնդիր որոշ հատվածից
դուրս տեղափոխությունների սահմանափակման դեպքում**

Հիմնաբառեր՝ երկայնական սահր, կոնտակտային խնդիր, սինգուլյար ինտեգրալ հավասարում, կիսաանվերջ հատված, մեխանիկական քառակուսացման բանաձևերի եղանակ

Դիտարկվում է ամբողջ ստորին մակերեսի երկայնքով և վերին մակերեսի որոշակի շերտից դուրս ամրացված առաձգական շերտի երկայնական սահրի խնդիրը: Վերին մակերեսի ազատ մակերեսին կիրառվում է վերջավոր լայնությամբ կոշտ դրոշմ, որը չի ծածկում ամբողջ ազատ մակերեսը և գտնվում է երկայնական սահրի պայմաններ ապահովող շոշափող բեռի ազդեցության տակ: Լուծումը հանգում է վերջավոր և կիսաանվերջ միջակայքերի վրա սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծմանը: Խնդիրը լուծվում է մեխանիկական քառակուսացման բանաձևերի եղանակով, որը թույլ է տալիս կատարել շոշափող լարումների բաշխման, ծայրերում լարումների կոնցենտրացիայի գործակիցների և դրոշմի կոշտ տեղափոխության շերտի հաստությունից և շերտի վերին մակերեսի լարումից ազատ հատվածի լայնությունից կախվածության մանրամասն թվային վերլուծություն: Արդյունքները ներկայացված են գրաֆիկների տեսքով:

Рассмотрена задача продольного сдвига упругого слоя, закрепленного по всей нижней грани и вне некоторой полосы верхней грани. К свободной поверхности верхней грани приложен жесткий штамп конечной ширины, не покрывающий всю свободную поверхность и подверженный действию тангенциальной нагрузки, обеспечивающей условия продольного сдвига. Решение задачи сведено к решению системы сингулярных интегральных уравнений на конечном и полубесконечном интервалах. Задача решена методом механических квадратур, позволившим провести детальный численный анализ зависимости распределения контактных напряжений, коэффициентов их концентрации на концах и

жесткого перемещения штампа от толщины слоя и ширины свободной от напряжений части верхней грани слоя. Результаты представлены в виде графиков.

Введение. Метод механических квадратур зарекомендовал себя в качестве эффективного численно-аналитического метода решения как сингулярных интегральных уравнений и систем таких уравнений, так и уравнений с логарифмическим ядром, определенных на конечном интервале. Задач, решенных этим методом, огромное количество. Для примера, среди последних работ отметим [1-5].

Решение сингулярных интегральных уравнений на полубесконечном интервале при помощи метода механических квадратур нам не встречалось.

В настоящей работе рассмотрена контактная задача для упругого слоя, нижняя грань которой закреплена полностью, а верхняя грань закреплена по двум полуплоскостям, расположенным на некотором расстоянии друг от друга. На свободной от напряжений части поверхности, посредством жесткой полосы конечной ширины, слою передается тангенциальное усилие, создающее условия продольного сдвига. Решение задачи, с учетом симметричного расположения жесткой полосы, сводится к решению системы из двух сингулярных интегральных уравнений относительно контактных напряжений под полосой и реактивных напряжений на одном луче заделки, одно из которых определено на конечном интервале, а другое на полубесконечном. Решение строится методом механических квадратур.

1. Постановка задачи и вывод определяющего уравнения.

Рассмотрим антиплоскую деформацию однородного упругого слоя, который в прямоугольной системе координат $Oxyz$ занимает область $\{-\infty < x, z < \infty, 0 < y < H\}$ и жестко закреплена по всей нижней грани $y=H$ и по двум полуплоскостям $\{|x| > b, -\infty < z < \infty\}$ верхней грани $y=0$. К свободной части верхней грани прикреплена жесткая полоса конечной ширины $\{y=0, |x| < a < b, -\infty < z < \infty\}$. Слой деформируется под воздействием статической нагрузки T , приложенной к верхней грани жесткой полосы равномерно по z (рис.1).

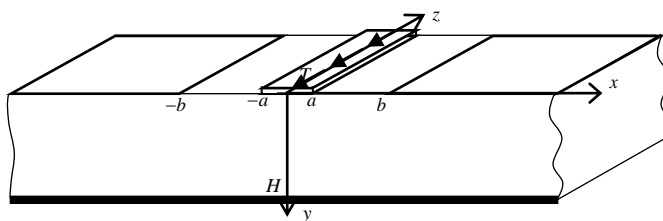


Рис. 1 Схематическое представление задачи.

При такой антиплоской деформации единственной, отличной от нуля, компонентой перемещений будет компонента $w(x, y)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа в базовой плоскости $z = 0$:

$$\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

при граничных условиях:

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= 0 & \text{при } |x| > b \\ w(x, 0) &= \Delta & \text{при } |x| < a \\ \tau_{xy}(x, 0) &= 0 & \text{при } a < |x| < b \\ w(x, H) &= 0 & \text{при } |x| < \infty \end{aligned} \quad (2)$$

Далее, все линейные величины будем считать безразмерными, отнесенными к полуширине жесткой полосы a , а напряжения – отнесенными к модулю сдвига материала слоя G . При этом все обозначения сохраним, полагая лишь $a = 1$.

При помощи интегрального преобразования Фурье по x и с учетом симметрии относительно оси ординат, перемещение $w(x, y)$, удовлетворяющее последним двум условиям в (2), выразим через искомое контактное напряжение под жесткой полосой $\tau_1(x)$ и неизвестное реактивное напряжение $\tau_2(x)$, возникающее на луче $b < x < \infty$:

$$w(x, y) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-1}^1 K_1(x, s, y) \tau_1(s) ds + \int_b^{\infty} [K_1(x, -s, y) + K_1(x, s, y)] \tau_2(s) ds \right] \quad (3)$$

где

$$K_1(x, s, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sh } \lambda(y - H)}{\lambda \text{ch } \lambda H} e^{-i\lambda(x-s)} d\lambda$$

Удовлетворяя первым двум условиям в (2), придем к системе интегральных уравнений относительно указанных напряжений

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 R(x-s) \tau_1(s) ds + \int_b^{\infty} [R(x-s) + R(x+s)] \tau_2(s) ds &= 2\pi\Delta \quad (-1 < x < 1) \\ \int_{-1}^1 R(x-s) \tau_1(s) ds + \int_b^{\infty} [R(x-s) + R(x+s)] \tau_2(s) ds &= 0 \quad (x > b) \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$R(x-s) = K_1(x, s, 0) = -2 \ln \left(\text{cth} \frac{\pi|x-s|}{4H} \right)$$

Контактное напряжение $\tau_1(x)$ должно удовлетворять также условию равновесия жесткой полосы:

$$\int_{-1}^1 \tau_1(x) dx = T \quad (5)$$

Выделив в ядре $R(x-s)$ особенность при $x \rightarrow s$ и продифференцировав уравнения системы (4) по x , получим определяющее уравнение поставленной задачи:

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{s-x} + Q(x-s) \right) \tau_1(s) ds + \int_b^{\infty} \left[\frac{1}{s-x} + Q(x-s) - \frac{1}{s+x} + Q(x+s) \right] \tau_2(s) ds = 0 \quad (-1 < x < 1) \quad (6)$$

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{s-x} + Q(x-s) \right) \tau_1(s) ds + \int_b^{\infty} \left[\frac{1}{s-x} + Q(x-s) - \frac{1}{s+x} + Q(x+s) \right] \tau_2(s) ds = 0 \quad (x > b)$$

где функция $Q(x-s)$ регулярна в точке $x=s$ и представляется формулой:

$$Q(x-s) = -\frac{1}{x-s} + \frac{\pi}{2H \operatorname{sh} \frac{\pi(x-s)}{2H}}$$

Решение системы (6) ищем в виде:

$$\tau_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1) \quad (7)$$

$$\tau_2(x) = \frac{\varphi_2(x)}{(x-b+1)\sqrt{x-b}} \quad (b < x < \infty)$$

При помощи преобразования

$$x = \frac{1+\xi}{1-\xi} + b \quad x \in (b, \infty), \quad \xi \in (-1, 1)$$

полубесконечный интервал (b, ∞) сведем к отрезку $(-1, 1)$ и нововведенную функцию $\varphi_2(x)$ заменим новой неизвестной $\varphi(\xi)$ ($-1 < \xi < 1$). Тогда реактивное напряжение на луче $b < x < \infty$ представится в виде:

$$\tau_2(x) = \tau_2 \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} + b \right) = \frac{\varphi(\xi)(1-\xi)}{2} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \quad (8)$$

Окончательно, определяющее уравнение запишем в виде:

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\xi - \eta} + Q(\eta - \xi) \right) \frac{\varphi_1(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi + \int_{-1}^1 M(\eta, \xi) \sqrt{\frac{1 - \xi}{1 + \xi}} \varphi(\xi) d\xi = 0$$

$$\int_{-1}^1 M_1(\eta, \xi) \frac{\varphi_1(s)}{\sqrt{1 - s^2}} ds + \int_{-1}^1 \left[\frac{1 - \eta}{2} \frac{1}{\xi - \eta} + M_2(\eta, \xi) \right] \sqrt{\frac{1 - \xi}{1 + \xi}} \varphi(\xi) d\xi = 0$$
(9)

Здесь

$$M(\eta, \xi) = \frac{(1 + \eta - b)^{-1}}{\xi - \frac{\eta - 1 - b}{\eta + 1 - b}} + \frac{(b + \eta - 1)^{-1}}{\xi - \frac{\eta + 1 + b}{\eta - 1 + b}} + \frac{Q\left(\eta - \frac{1 + \xi}{1 - \xi} - b\right) + Q\left(\eta + \frac{1 + \xi}{1 - \xi} + b\right)}{1 - \xi}$$

$$M_1(\eta, \xi) = \frac{1}{\xi - \frac{1 + \eta}{1 - \eta} - b} + Q\left(\frac{1 + \eta}{1 - \eta} + b - \xi\right)$$

$$M_2(\eta, \xi) = \frac{1 - \eta}{2} \frac{(\eta + b - b\eta)^{-1}}{\xi - \frac{1 + b - b\eta}{\eta + b - b\eta}} + \frac{Q\left(\frac{1 + \eta}{1 - \eta} - \frac{1 + \xi}{1 - \xi}\right) + Q\left(\frac{1 + \eta}{1 - \eta} + \frac{1 + \xi}{1 - \xi} + 2b\right)}{1 - \xi}$$

Таким образом, необходимо решить систему уравнений (9) при условии равновесия (5), которое в обозначениях (7) имеет вид:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx = T$$
(10)

После определения контактных напряжений $\tau_1(x)$ и $\tau_2(x)$, при помощи формулы (3) и с учетом перехода к безразмерным величинам с сохранением обозначений, можно определить тангенциальные напряжения, возникающие на нижней грани слоя:

$$\tau_{yz}(x, H) = \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=H} = \int_{-1}^1 K_2(x - s) \tau_1(s) ds + \int_b^\infty [K_2(x - s) + K_2(x + s)] \tau_2(s) ds$$
(11)

где

$$K_2(x - s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda H} e^{-i\lambda(x-s)} d\lambda = \frac{1}{2H \operatorname{ch} \frac{\pi(x-s)}{2H}}$$

В случае, когда слой обращается в полупространство ($H \rightarrow \infty$), поставленная задача имеет аналитическое решение:

$$\begin{aligned}\tau_1(x) &= \frac{Tb}{2K\left(\frac{1}{b^2}\right)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{b^2-x^2}} \quad (-1 < x < 1) \\ \tau_2(x) &= \frac{Tb}{2K\left(\frac{1}{b^2}\right)} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-b^2}} \quad (b < x < \infty)\end{aligned}\quad (12)$$

где $K(m)$ - полный эллиптический интеграл первого рода [6].

2. Алгоритм построения решения системы уравнений (9) и (10).

Решение указанной системы построим методом механических квадратур [7]. Учитывая, что весовые функции для интегралов в уравнениях системы (9) отличаются друг от друга, приведем квадратурные формулы для каждой из них.

а) Весовая функция $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Квадратурная формула имеет вид

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(x)}{x-z} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\varphi_1(\zeta_j)}{\zeta_j - z} [1 - R_j(z)] \quad (13)$$

где $\zeta_j (j = \overline{1, n})$ - корни многочлена Чебышева первого рода $T_n(x)$, которые определяются формулой

$$\zeta_j = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2n} \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

а функция $R_j(z)$ - формулой

$$R_j(z) = \begin{cases} \frac{1}{U_{n-1}(\xi_j)} \frac{(z + \sqrt{z-1}\sqrt{z+1})^{-n}}{\sqrt{z-1}\sqrt{z+1}} & \text{при } z \notin [-1, 1] \\ \frac{U_{n-1}(z)}{U_{n-1}(\xi_j)} & \text{при } z \in (-1, 1) \end{cases} \quad (14)$$

б) Весовая функция $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Квадратурная формула имеет вид

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(x) \sqrt{1-x}}{x-z} \frac{dx}{\sqrt{1+x}} \approx \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{j=1}^n \frac{(1-\xi_j)\varphi(\xi_j)}{\xi_j-z} \left[1 - \frac{F(z)}{P_n^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(\xi_j)} \right] \quad (15)$$

где $\xi_j = \cos \frac{2j\pi}{2n+1}$ ($j = \overline{1, n}$) - корни многочлена Якоби $P_n^{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x)$ [6].

$$F(z) = \begin{cases} \frac{\Gamma(n+0.5)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1)} \left(\frac{2}{z-1}\right)^{n+1} \left(1 + \sqrt{\frac{z+1}{z-1}}\right)^{-2n-1} \sqrt{\frac{z-1}{z+1}} & \text{при } z \notin [-1, 1] \\ P_n^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(z) & \text{при } z \in (-1, 1) \end{cases}$$

Заменив в системе уравнений (9) интегралы соответствующими суммами, согласно (12) и (15), и выбирая в качестве точек коллокации для первого уравнения корни многочлена $U_{n-1}(x)$, а для второго уравнения – корни многочлена Якоби $P_n^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x)$, получим систему линейных алгебраических уравнений из $(2n-1)$ уравнений.

Полученная система, с учетом ядер системы (9), имеет достаточно громоздкий вид и, по этой причине, здесь не приводится.

Добавив к полученной системе дискретизированное условие равновесия (10), получим замкнутую систему линейных алгебраических уравнений относительно значений искомых функций в узлах квадратурных формул $\varphi_1(\zeta_j)$ ($j = \overline{1, n}$) и $\varphi(\xi_j)$ ($j = \overline{1, n}$).

После определения указанных значений искомые функции можно построить по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varphi_1(\zeta_j) \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} T_m(x) T_m(\zeta_j) \right) \\ \varphi(x) &= \frac{2}{2n+1} \sum_{j=1}^n (1+\xi_j)\varphi(\xi_j) \sum_{m=0}^{n-1} U_{2m} \left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} \right) U_{2m} \left(\sqrt{\frac{1+\xi_j}{2}} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Отметим, что порядки аппроксимации для функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi(x)$ могут быть различными.

Для определения перемещений граничных точек слоя имеем формулу:

$$w(x,0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left(\operatorname{cth} \frac{\pi|x-s|}{4H} \right) \frac{\varphi_1(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds -$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\ln \left(\operatorname{cth} \frac{\pi \left| x - \frac{1+\xi}{1-\xi} - b \right|}{4H} \right) + \ln \left(\operatorname{cth} \frac{\pi \left| x + \frac{1+\xi}{1-\xi} + b \right|}{4H} \right) \right] \frac{\varphi(s)}{\sqrt{1-s^2}} d\xi \quad (17)$$

Перемещения точек на свободной поверхности слоя ($1 < x < b$) можно рассчитать по формуле (17), используя для интегралов обычную квадратурную формулу по узлам многочлена Чебышева первого рода $T_n(x)$, потому что в этих точках ни одно из логарифмических ядер не имеет особенности. При этом отметим, что, если для первого интеграла, при одинаковом порядке аппроксимации, можно использовать найденные значения $\varphi_1(\xi_j)$ ($j = 1, n$), то для второго интеграла значения функции $\varphi(x)$ в узлах квадратурной формулы надо вычислять по второй формуле в (16).

При желании проверить выполнение условия $w(x) = 0$, когда $x \in (-1, 1)$ или $x \in (b, \infty)$, необходимо в соответствующем интеграле выделить логарифмическую особенность и использовать следующую квадратурную формулу:

$$\int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|s-x|} \frac{f(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds = \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \left(\ln 2 + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{2}{m} T_m(\xi_i) T_m(x) \right) \quad (-1 < x < 1). \quad (18)$$

3. Численный анализ.

Проведен численный анализ поставленной задачи. Предварительно подобраны такие порядки аппроксимации, при которых построенные графики не отличаются от графиков, построенных при больших порядках аппроксимации. Для функции $\varphi_1(x)$ таковым является $n = 6$, для функции же $\varphi(x)$ этот порядок зависит от толщины слоя H и с увеличением последнего изменяется от $n = 10$ до $n = 30$ и более.

Расчеты были проведены при $n = 6$ для первой функции и $n = 20$ для второй.

Будут представлены следующие функции и величины:

1) $\varphi_1(x)$ ($-1 < x < 1$) - регулярная часть контактных напряжений под полосой,

2) $\varphi_r(x) = \frac{\varphi \left(\frac{1+b-x}{-1+b-x} \right)}{(x-b+1)}$ ($b < x < b+4$) - регулярная часть реактивных напряжений в зоне заделки,

3) $K_1 = \frac{\varphi_1(1)}{\sqrt{2}}$ - коэффициент концентрации напряжений на конце зоны

контакта,

4) $K_2 = \varphi(-1)$ - коэффициент концентрации напряжений в конце зоны заделки,

5) Δ - жесткое смещение полосы,

6) $R_0 = 2 \int_b^{\infty} \tau_2(x) dx$ - результирующая реактивных напряжений в зонах заделки

на верхней грани,

7) $R_{\infty} = - \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{yz}(x, H) dx$ - результирующая реактивных напряжений на

нижней грани.

Изменяемыми параметрами будут толщина слоя H и расстояние между полосой и зоной сцепления $d = b - 1$. Для внешней нагрузки принято $T = 2$.

На рис. 2 представлены графики распределения функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_r(x)$ для различных значений толщины слоя H , когда $d = 1$. На рисунке пунктирной линией представлена также регулярная часть аналитического решения (11), соответствующего случаю полупространства ($H = \infty$). Кривые от синего к оранжевому соответствуют значениям $H = 2, 2.5, 4, 20$. Близость оранжевой кривой к пунктирной указывает на то, что при $d = 1$ для $H > 20$ слой можно считать полупространством.

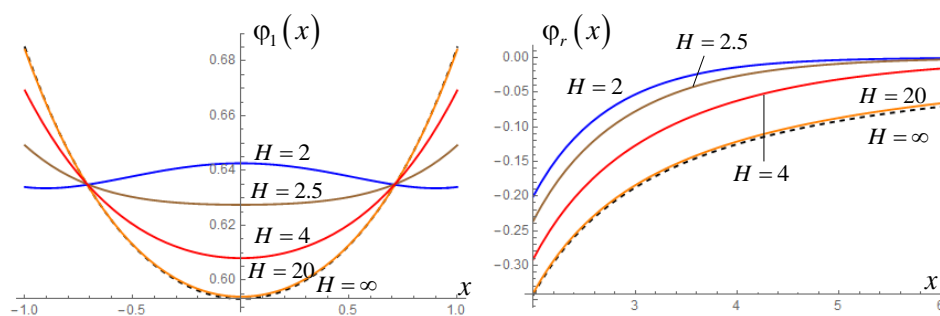


Рис.2 Зависимость регулярных частей контактных напряжений от толщины слоя

На рис. 3 представлены те же функции для различных значений длины свободной поверхности d , когда толщина слоя $H = 6$. Кривые от коричневого к оранжевому соответствуют значениям $d = 0.2, 0.3, 1, 2$.

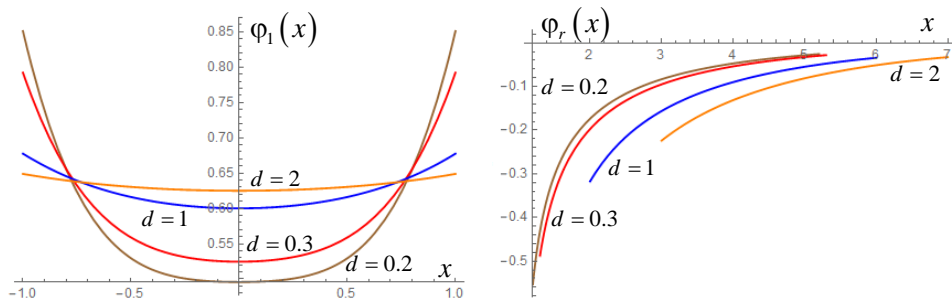


Рис.3 Зависимость регулярных частей контактных напряжений от d .

На рис.4-7 представлены кривые зависимости коэффициентов концентрации напряжений K_1 и K_2 , жесткого смещения Δ и результирующей реактивных напряжений R_0 (сплошные линии) и R_∞ (пунктирные линии) от толщины слоя H при различных значениях $d = 1, 2, 4$.

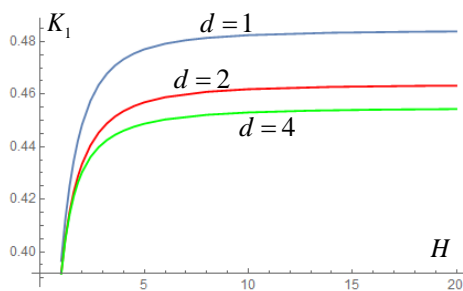


Рис. 4 Зависимость $K_1(H)$

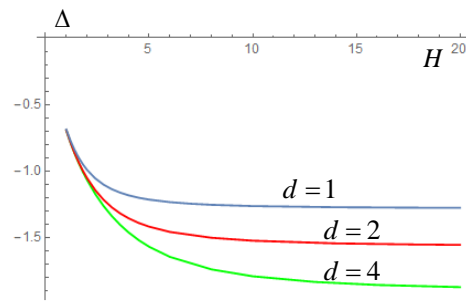


Рис. 5 Зависимость $\Delta(H)$

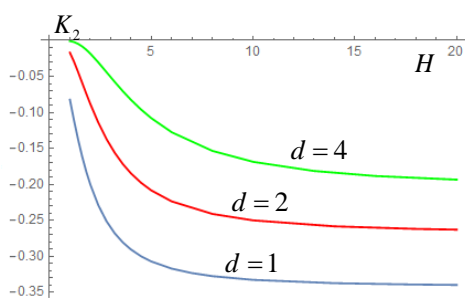


Рис. 6 Зависимость $K_2(H)$

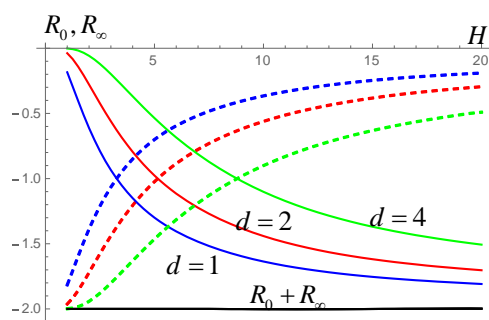


Рис. 7 Зависимости $R_0(H)$ и $R_\infty(H)$

Схождение кривых на рис. 4 и рис.5 объясняется тем, что при существенно малых значениях толщины слоя его напряженно-деформированное состояние локализуется под полосой и практически не реагирует на наличие заделки на конечном расстоянии от полосы. Этим же объясняется и стремление к нулю коэффициента K_2 и результирующей R_0 , а также увеличение по модулю результирующей R_∞ на рис.6 и рис.7. С увеличением толщины слоя все эти величины, кроме R_∞ , по модулю растут, стремясь к определенным пределам, соответствующим аналитическому решению (11). Наиболее медленное стремление к предельному значению наблюдается у результирующих R_0 и R_∞ , первая из которых стремится к черной линии на рис. 7, представляющей суммарную реакцию слоя и равной, по модулю, приложенной к полосе нагрузке, вторая же, очевидно, стремится к нулю.

На рис. 8-11 представлены графики зависимости тех же величин от расстояния между полосой и заделкой d .

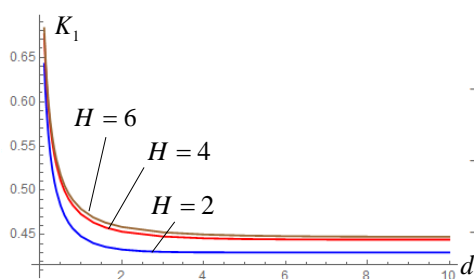


Рис. 8 Зависимость $K_1(d)$

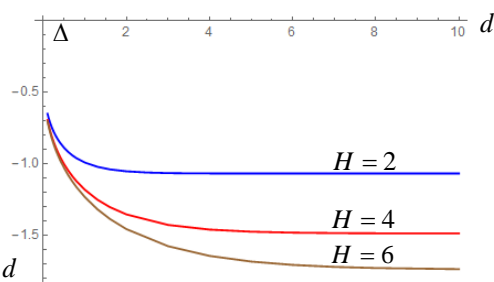


Рис. 9 Зависимость $\Delta(d)$

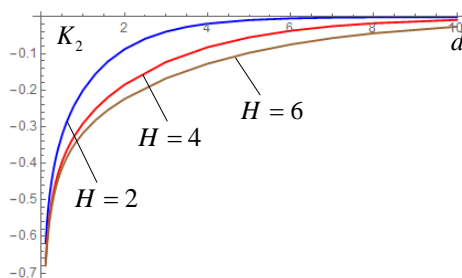


Рис. 10 Зависимость $K_2(d)$

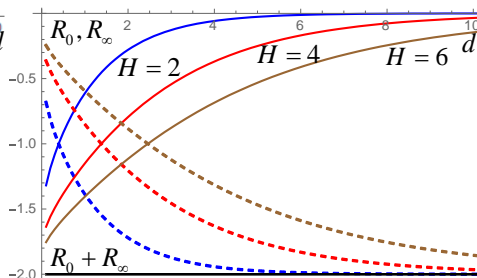
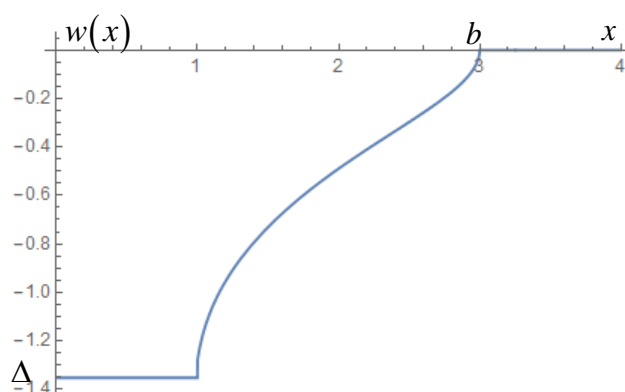


Рис. 11 Зависимости $R_0(d)$ и $R_\infty(d)$

Стремление коэффициентов $K_1(d)$ и $K_2(d)$ к бесконечности разных знаков на рис. 8 и рис. 10 полностью объясняет ситуацию среза, которое имеет место при $d=0$ и при котором контактные напряжения приобретают неинтегрируемую

особенность x^{-1} . Стремление кривых результирующей $R_0(d)$ к нулю, а результирующей $R_\infty(d)$ к -2 при увеличении d объясняется тем, что функцию уравнивания внешней нагрузки берут на себя контактные напряжения, возникающие на нижней грани слоя. На рис.11 это подтверждается тем, что чем меньше толщина слоя, тем быстрее R_0 обращается в ноль.

Рис.12 Картина перемещения $w(x)$.



На рис. 12 представлена картина перемещений отрезка $[0, 4]$ при $d = 2, H = 4$, который, для наглядности, помимо свободной поверхности $[1, b = 1 + d]$, включает также участки полосы $[0, 1]$ и заделки $[b, 4]$. Перемещения рассчитаны согласно описанию после формулы (17) при тех же порядках аппроксимации, что и при решении сингулярных интегральных уравнений. Следует отметить, что все прямые линии на рис.7, рис.11 и рис.12, которые, очевидно, известны, являются результатом численных расчетов, а не заданы как прямые линии.

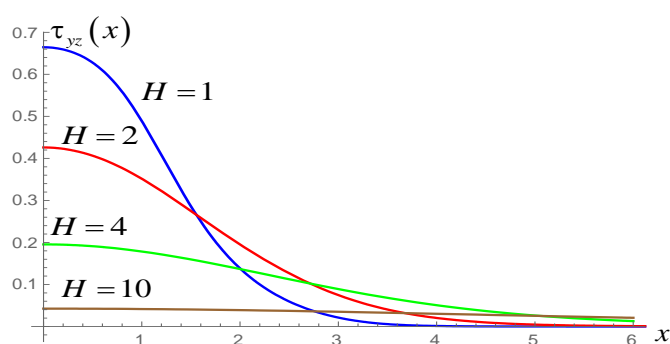


Рис. 13 Распределение реактивных напряжений на нижней грани слоя.

На рис. 13 представлены кривые распределения реактивных напряжений на нижней грани слоя при $d = 2$ и различных значениях $H = 1, 2, 4, 10$.

Заключение. На примере конкретной задачи представлен алгоритм решения сингулярного интегрального уравнения на полубесконечном интервале методом механических квадратур. Эффективность использования этого метода и высокая точность полученных результатов подтверждаются большим числом численных расчетов, иллюстрирующих выполнение всех условий поставленной задачи: условие равновесия штампа (уравнение (10)), являющееся одним из уравнений решаемой системы линейных алгебраических уравнений), условие равенства перемещений всех точек под штампом его жесткому смещению Δ (Рис.12, интервал $(0,1)$), обращение в ноль перемещений в зоне заделки (Рис.12, интервал $(3,4)$), равенство результирующей всех реактивных напряжений внешней нагрузке (Рис.7 и Рис.11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ju Ma, Liao-Liang Ke, Yue-Sheng Wang, Electro-mechanical sliding frictional contact of a piezoelectric half-plane under a rigid conducting punch, *Applied Mathematical Modelling*, Volume 38, Issue 23, 2014, Pages 5471-5489.
2. Hakobyan V.N. Stress Concentrators in Continuous Deformable Bodies. Book Series “Advanced Structured Materials”, Eds. Andreas Öchsner, Lucas F. M. da Silva, Holm Altenbach, Vol.181, 2022, Springer Cham, 380 p.
3. Popov V.G., System of cracks under the impact of plane elastic waves. 2022, *Journal of Physics: Conference Series*, **2231** 012004
4. Çömez, İ., Güler, M. A., & El-Borgi, S. (2024). Continuous and discontinuous contact problems of a functionally graded piezoelectric layer resting on a homogeneous piezoelectric half plane. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 31(10), 2130–2143.
5. Kudish II, Sahakyan A, Hakobyan V, Amirjanyan H. Contact problem for an interface crack under action of a moving punch. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2024;0(0). doi:10.1177/10812865241251469
6. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 830 с.
7. Sahakyan A.V., Amirjanyan H.A. Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types // *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. V. 991. Article 012070. doi :10.1088/1742-6596/991/1/012070

Сведения об авторах:

Амирджанян Арутюн Арменович – к.ф.м.н., в.н.с. Института механики НАН РА, тел. (37444) 920-639, e-mail: amirjanyan@gmail.com

Саакян Аветик Вараздатович – д.ф.м.н., зав. отделом Института механики НАН РА, тел. (37494) 579-348, e-mail: avetik.sahakyan@sci.am, avsahakyan@gmail.com

Поступила в редакцию 6 марта 2026г.

**МОДЕЛЬ И РАСЧЁТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ГРАФЕНА НА ОСНОВЕ
МОМЕНТНО-МЕМБРАННОЙ ТЕОРИИ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ**

Саркисян С.О., Саркисян Л.С., Жамакочян К.А.

Ключевые слова: лист графена, моментно-мембранная теория пластинки, метод конечных элементов, изгиб, собственные колебания.

Sargsyan S.H., Sargsyan L.S., Zhamakochyan K.A.
**Model and calculation of natural vibrations of graphene based on
the moment-membrane theory of an elastic plate**

Key words: graphene sheet, moment-membrane theory of a plate, finite element method, bending, natural vibrations.

In the present paper a moment-membrane linear dynamic theory of plane stress state and transverse bending of elastic plates is presented as continual theories of the deformation behavior of a graphene sheet. In solutions of these problems of a graphene sheet a finite element method is developed, based on the variational formulation of the corresponding problems. The theory and basic relations of a rectangular finite element are presented for calculating natural vibrations of a graphene sheet (rectangular plate). Based on this theory the problem of natural vibrations of transverse bending of a graphene sheet is specifically considered. The questions of practical convergence of the solution and assessment of the accuracy of the finite element method are discussed.

Սարգսյան Ս.Հ., Սարգսյան Լ.Ս., Շամակոչյան Կ.Ա.
**Գրաֆենի սեփական տատանումների մոդելը և հաշվարկը առաձգական սալի մոմենտա-
մեմբրանային տեսության հիման վրա**

Հիմնաբառեր: գրաֆենային շերտ, սալի մոմենտա-մեմբրանային տեսություն, վերջավոր տարրերի մեթոդ, ծռում, սեփական տատանումներ:

Աշխատանքում ներկայացվում է առաձգական սալի հարթ լարվածային վիճակի և լայնական ծռման դինամիկայի մոմենտա-մեմբրանային գծային տեսությունը՝ որպես գրաֆենային շերտի դեֆորմացիոն վարքագծի կոնտինուալ տեսություն: Գրաֆենային շերտի այդ խնդիրների լուծումներում մշակվել է վերջավոր տարրերի մեթոդը՝ հիմնված համապատասխան խնդիրների վարիացիոն ձևակերպման վրա: Գրաֆենային շերտի (ուղղանկյուն սալի) սեփական տատանումների հաշվարկման համար ներկայացվում է ուղղանկյուն վերջավոր տարրի տեսությունը և հիմնական առնչությունները: Այս տեսության հիմքի վրա դիտարկվում է մասնավորապես գրաֆենային շերտի լայնական ծռման սեփական տատանումների խնդիրը: Քննարկվում են լուծման գործնական զուգամիտության և վերջավոր տարրերի մեթոդի ճշտության գնահատման հարցերը:

В работе изложена моментно-мембранная линейная динамическая теория плоского напряжённого состояния и поперечного изгиба упругих пластин как континуальная теория деформационного поведения листа графена. В решении указанных задач листа графена развивается метод конечных элементов, основанного на вариационной постановке соответствующих задач. Изложены теория и основные соотношения прямоугольного конечного элемента для расчёта задач собственных колебаний листа графена (прямоугольной пластинки). На основе указанной теории конкретно рассмотрена задача о собственных

колебаниях поперечного изгиба листа графена. Обсуждены вопросы практической сходимости решения, оценки точности метода конечных элементов.

Введение. Анализ развития науки и техники (начиная с последней четверти XX века) свидетельствует о том, что наибольший прогресс связан с проникновением технологий на микро- и наноразмер. Важной составляющей нанотехнологии является разработка наноструктурных (нанокристаллических) материалов [1-2 и др.].

Следует констатировать, что кроме экспериментальных исследований, численное моделирование становится важным инструментом при изучении любых наноматериалов.

Если попытаться обозначить основные численные методы для многочастичных систем, то они главным образом сводятся к следующим: квантово-теоретические расчёты из первых принципов (*ab initio*), методы молекулярной динамики и методы молекулярной структурной механики.

Распространённые пакеты программ *ab initio* активно используются в квантовой физике, химии, биологии [3, 4 и др.]. В настоящее время появление мощных (терафлопсных) параллельных вычислительных машин делает возможным осуществлять новый шаг в развитии пакетов программ *ab initio*.

При атомистическом (молекулярном) моделировании (т.е. при применении метода молекулярной динамики [5, 6 и др.]) электронные степени свободы исчезают, а атомы представляются в виде твёрдых шариков, взаимодействующих друг с другом посредством эффективных потенциалов. Силовые поля при этом (в классическом понимании) являются парными (двухчастичными) и силы взаимодействия между двумя атомами - центральными. Если приближение двухчастичного взаимодействия даёт разумное описание свойств многоатомной системы, то расчёт методом молекулярной динамики будет представлять собой компьютерный эксперимент, при этом на каждом временном шаге будет доступна полная информация о системе (положение и скорость всех частиц).

Среди распространённых наноматериалов особо выделяются углеродные двумерные наноматериалы: однослойная нанотрубка и графен [7-9 и др.]. Общим термином их называют углеродные каркасные структуры [7] - это новые аллотропические формы углерода.

Существенно отметить (в этом легко убедиться), что парное силовое моделирование неприменимо в случае двумерных наноматериалов (т.е. для графена и однослойной углеродной нанотрубки). В связи с этим обстоятельством, в работах [10-12] было осуществлено весьма существенное заключение о том, что только существование двумерных наноматериалов свидетельствует, что в соответствующей кристаллической решётке взаимодействие между атомами и силовое и моментное, кроме того, в этих же работах, трёхмерная моментная теория упругости с независимыми полями перемещений и вращений установлена как континуальная теория деформационного поведения двумерных наноматериалов.

Следует констатировать ещё одно весьма важное обстоятельство о том, что для двумерных наноматериалов понятие толщины (либо объёма) - неоднозначное понятие [13].

Традиционно для моделирования ковалентных связей (ковалентные связи характерны также для двумерных наноматериалов) используются многочастичные потенциалы взаимодействия. Многочастичные потенциалы, учитывающие углы между

связями, для моделирования углеродных соединений были предложены в [14, 15], а затем в [16-19 и др.].

Структура каркасного типа для двумерных наноматериалов при малых деформациях даёт возможность моделировать их как на дискретном (атомном) - на низшем масштабе, так и континуальном - на высшем масштабе. Это так называемая модель многостержневой системы (дискретно-континуальное моделирование, либо, моделирование на основе метода молекулярной структурной механики) [20-26 и др.]. Таким образом, регулярность атомной структуры двумерных наноматериалов даёт возможность заменить систему атомов эквивалентной моделью упругих стержней (можно предполагать, что эту стержневую систему в макромасштабе можно заменить сплошной средой), переходя к континуальной модели двумерного наноматериала.

В настоящее время при помощи экспериментов для нанообразований [27, 28 и др.], в основном для двумерных наноматериалов, определяются модуль Юнга, коэффициент Пуассона и другие параметры и коэффициенты, характерные для континуальной среды. Аналогично имеет место и при теоретических исследованиях. При теоретических исследованиях применяется подход Коши-Борна [29] с привлечением потенциалов межатомного взаимодействия конкретной структуры (например потенциал Терзоффа-Бреннера [14, 15]). При таком подходе проводится как-бы усреднение свойств и дискретная среда заменяется континуальной средой, о чём свидетельствует полученная информация о модуле Юнга, коэффициенте Пуассона, плотности материала и т.д. - параметрах и коэффициентах, характерных для континуальной среды. Такие исследования свидетельствуют также о важности построения самой континуальной модели для двумерного наноматериала с определением всех параметров, соответствующих континуальному представлению.

При применении для двумерного наноматериала модели многостержневой системы и, в дальнейшем, переходе к континуальной модели, необходимо иметь ввиду заранее известные следующие проблематичные обстоятельства: 1) только существование такого материала свидетельствует о необходимости, кроме силового, учёта также моментного взаимодействия между атомами в соответствующей атомной кристаллической решётке [10, 12], 2) для двумерного наноматериала понятие толщины - неоднозначное понятие [13] (т.е. при моделировании не следует использовать понятие толщины). Последнее обстоятельство также означает, что как упругие стержневые модели, классические модели Кирхгофа либо Тимошенко неприменимы.

В работах [30, 31] обсуждаются основные этапы построения континуальной теории деформационного поведения листа графена, начиная изучение с его дискретной атомной кристаллической структуры.

- Построение стержневой модели.
Рассматривая линейную атомную цепочку, когда взаимодействие между атомами и силовое и моментное, построена сначала её дискретная модель, далее, предельным переходом, также и континуально-стержневая её модель.
- С помощью этой стержневой модели построена стержневая системная модель для кристаллической решётки графена и предельным переходом – континуальная модель деформации графена с установлением выражений поверхностных плотностей потенциальной энергии деформации и кинетической энергии движения.
- Основываясь на энергетическом подходе, проведено сравнение этой континуальной модели графена с ранее построенной моментно-мембранной теорией упругой пластинки [32, 33], численно определяются упруго-жесткостные

характеристики указанной теории пластин при помощи физических параметров потенциала межатомных взаимодействий для углерода (которые в литературе известны). Таким образом, моментно-мембранная теория упругой пластинки с численно определёнными упруго-жесткостными характеристиками устанавливается как континуальная теория деформационного поведения графена.

- Аналогично, в работе [34], моментно-мембранная теория упругих цилиндрических оболочек установлена как континуальная теория деформационного поведения однослойной углеродной нанотрубки.

1. Моментно-мембранная линейная теория динамики упругих тонких пластин. Следует отметить, что моментно-мембранная линейная теория оболочек [32,33] построены на основе трёхмерной моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений принятием определённых гипотез (основная кинематическая гипотеза означает, что все компоненты вектора перемещения и вектора свободного поворота не зависят от координаты, т.е. все они равномерно-распределены по толщине оболочки), которые созвучны со свойствами асимптотического решения трёхмерной граничной задачи в тонких областях. При переходе к пластинке $\left(\frac{1}{R_1} \rightarrow 0, \frac{1}{R_2} \rightarrow 0 \right)$ получим две отдельные моментно-мембранные модели: 1) модель плоского напряжённого состояния пластинки, 2) модель поперечного изгиба пластинки.

1.1. Основные уравнения, граничные и начальные условия задачи динамики плоского напряжённого состояния для листа графена по моментно-мембранной динамической теории упругих пластин. Изложим основные уравнения и граничные условия в декартовой системе координат x, y плоского напряжённого состояния для листа графена по моментно-мембранной теории упругих пластин: (рис 1.)

Уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial S_{21}}{\partial y} &= \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial S_{12}}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} &= \rho_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial L_{13}}{\partial x} + \frac{\partial L_{23}}{\partial y} + (S_{12} - S_{21}) = J_0 \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2};$$

Соотношения упругости

$$\begin{aligned} T_{11} &= \tilde{E}_* (\Gamma_{11} + \nu \Gamma_{22}), & T_{22} &= \tilde{E}_* (\Gamma_{22} + \nu \Gamma_{11}), \\ S_{12} &= C_* [\Gamma_{12} + \eta_1 \Gamma_{21}], & S_{21} &= C_* [\Gamma_{21} + \eta_1 \Gamma_{12}], \end{aligned} \quad (2)$$

$$L_{13} = B_* k_{13}, \quad L_{23} = B_* k_{23}, \quad \eta_1 = \frac{\mu - \alpha}{\mu + \alpha};$$

Геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \Gamma_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \quad \Gamma_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \Omega_3, \\ \Gamma_{21} &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \Omega_3, \quad k_{13} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x}, \quad k_{23} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial y}; \end{aligned} \quad (3)$$

Граничные условия

$$\begin{aligned} T_{11} &= \bar{T}_{11}, \quad S_{12} = \bar{S}_{12}, \quad L_{13} = \bar{L}_{13}, \quad \text{при } x = \text{const}; \\ S_{21} &= \bar{S}_{21}, \quad T_{22} = \bar{T}_{22}, \quad L_{23} = \bar{L}_{23}, \quad \text{при } y = \text{const}, \end{aligned} \quad (4)$$

или

$$\begin{aligned} u_1 &= \bar{u}_1, \quad u_2 = \bar{u}_2, \quad \Omega_3 = \bar{\Omega}_3, \quad \text{при } x = \text{const}; \\ u_1 &= \bar{u}_1, \quad u_2 = \bar{u}_2, \quad \Omega_3 = \bar{\Omega}_3, \quad \text{при } y = \text{const}; \end{aligned} \quad (5)$$

Могут иметь место также граничные условия смешанного типа.

Кроме того к полученным уравнениям необходимо присоединить ещё и начальные условия для $u_1, u_2, \Omega_3, \frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial t}, \frac{\partial \Omega_3}{\partial t}$, при $t = t_0$.

Здесь, u_1, u_2 - тангенциальные перемещения, Ω_3 - свободный поворот точек пластинки вокруг оси z ; $\Gamma_{11}, \Gamma_{22}, \Gamma_{12}, \Gamma_{21}$ - тангенциальные деформации; k_{13}, k_{23} - изменения кривизн; $T_{11}, T_{22}, S_{12}, S_{21}$ - тангенциальные усилия; L_{13}, L_{23} - моменты. В физических соотношениях упругости (2), $\tilde{E}_* = \frac{E_*}{1-\nu^2}$, $C_* = \mu_* + \alpha_*$, $\eta_1 = \frac{\mu_* - \alpha_*}{\mu_* + \alpha_*}$, B_* - упругие жесткостные характеристики графена, численные значения которых определены в работе [30] (а это означает, что в этой континуальной теории деформационного поведения графена не используется понятие толщины графена), ρ_0 - поверхностная плотность массы, а J_0 - поверхностная плотность инерции вращения графена.

Приведем числовые значения упругих жесткостных характеристик для графена [30]:

$$\begin{aligned} E_* &= 287 \frac{\text{нН}}{\text{нм}}; \quad \nu = 0.26; \quad \mu_* = 116 \frac{\text{нН}}{\text{нм}}; \quad \alpha_* = 42 \frac{\text{нН}}{\text{нм}}; \\ B_* &= 0,505 \text{нН} \cdot \text{нм}, \quad \eta_1 = 0.468 \quad (\text{нм} - \text{нанометр}, \text{нН} - \text{наноНьютон}) \end{aligned} \quad (6)$$

Подставив геометрические соотношения (3) в соотношения упругости (2) и полученные в уравнения движения (1), получим уравнения плоских колебаний листа графена в перемещениях u_i , $i = 1, 2$ и свободном повороте Ω_3 :

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_* \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + C_* \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + (\tilde{E}_* \nu + C_* \eta_1) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + C_* (1 - \eta_1) \frac{\partial \Omega_3}{\partial y} &= \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\
\tilde{E}_* \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + C_* \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + (\tilde{E}_* \nu + C_* \eta_1) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} - C_* (1 - \eta_1) \frac{\partial \Omega_3}{\partial x} &= \rho_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \\
B_* \Delta \Omega_3 + C_* (1 - \eta_1) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} - 2\Omega_3 \right) &= J_0 \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{7}$$

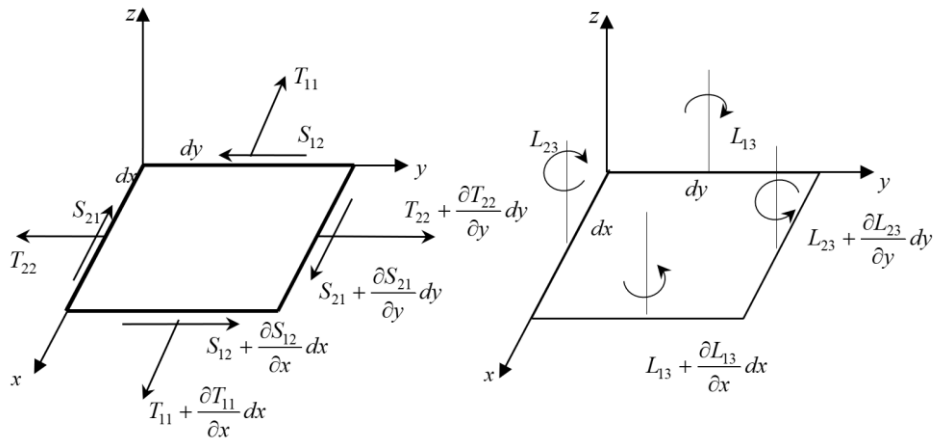


Рис. 1. Усилия и моменты при плоском напряженном состоянии пластинки

В задаче динамики упругих пластин важнейшей её частью является нахождение частот собственных колебаний и собственных функций.

Опишем кратко ход решения задачи о свободных плоских колебаниях листа графена.

Ищем решение системы уравнений (7) в виде произведений

$$u_i = u_i^*(x, y)e^{-i\omega t}, \quad i = 1, 2, \quad \Omega_3 = \Omega_3^*(x, y)e^{-i\omega t}, \tag{8}$$

где ω -круговая частота собственных плоских колебаний пластинки, связанная с периодом колебания T зависимостью

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{9}$$

Тогда относительно функций $u_i^*(x, y)$, ($i = 1, 2$), $\Omega_3^*(x, y)$ приходим к решению следующей однородной системы дифференциальных уравнений:

$$\tilde{E}_* \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x^2} + C_* \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial y^2} + (\tilde{E}_* \nu + C_* \eta_1) \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial x \partial y} + C_* (1 - \eta_1) \frac{\partial \Omega_3^*}{\partial y} = -\rho_0 \omega^2 u_1^*,$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_* \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial y^2} + C_* \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial x^2} + (\tilde{E}_* \nu + C_* \eta_1) \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x \partial y} - C_* (1 - \eta_1) \frac{\partial \Omega_3^*}{\partial x} = -\rho_0 \omega^2 u_2^*, \quad (10) \\ B_* \Delta \Omega_3^* + C_* (1 - \eta_1) \left(\frac{\partial u_2^*}{\partial x} - \frac{\partial u_1^*}{\partial y} - 2\Omega_3^* \right) = -J_0 \omega^2 \Omega_3^*. \end{aligned}$$

К этой системе уравнений присоединим однородные граничные условия типа (4) или (5). При решении граничной задачи (10), (4) или (5) (однородные), определяются частоты собственных плоских колебаний и формы собственных колебаний листа графена.

Эта задача эквивалентна [33] задаче о минимуме следующего функционала (функционал получен с помощью выражения для потенциальной энергии деформации пластин и кинетической энергии ее колебания):

$$\min(U^* - K^*), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} U^* = \frac{1}{2} \iint_{(s)} \left[\tilde{E}_* (\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 + 2\nu \Gamma_{11} \Gamma_{22}) + \right. \\ \left. + C_* (\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2 + 2\eta_1 \Gamma_{12} \Gamma_{21}) + B_* (k_{13}^2 + k_{23}^2) \right] dx dy \quad (12) \end{aligned}$$

$$K^* = \frac{1}{2} \omega^2 \iint_{(s)} \left[\rho_0 (u_1^2 + u_2^2) + J_0 \Omega_3^2 \right] dx dy. \quad (13)$$

1.2. Основные уравнения, граничные и начальные условия задачи динамики поперечного изгиба для листа графена по моментно-мембранной динамической теории упругих пластин.

Уравнения движения листа графена по моментно-мембранной динамической теории упругих пластин для модели поперечного изгиба имеют вид (рис 2):

Уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{13}}{\partial x} + \frac{\partial N_{23}}{\partial y} = -q + \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial L_{11}}{\partial x} + \frac{\partial L_{21}}{\partial y} + N_{23} = -m_1 + J_0 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial t^2}, \quad (14) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L_{12}}{\partial x} + \frac{\partial L_{22}}{\partial y} - N_{13} = -m_2 + J_0 \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2};$$

Соотношения упругости

$$\begin{aligned} N_{13} = D_* \Gamma_{13}, N_{23} = D_* \Gamma_{23}, L_{12} = D' [k_{12} + \eta_2 k_{21}], L_{21} = D' [k_{21} + \eta_2 k_{12}], \\ L_{11} = D' [(1 + 2\eta_2) k_{11} + \eta_2 k_{22}], L_{22} = D' [(1 + 2\eta_2) k_{22} + \eta_2 k_{11}]; \quad (15) \end{aligned}$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{13} = \frac{\partial w}{\partial x} + \Omega_2, \Gamma_{23} = \frac{\partial w}{\partial y} - \Omega_1, k_{11} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial x}, k_{22} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial y}, k_{12} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x}, k_{21} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial y}; \quad (16)$$

Граничные условия

$$1) N_{13} = \bar{N}_{13}, \quad L_{11} = \bar{L}_{11}, \quad L_{12} = \bar{L}_{12}, \quad \text{при } x = \text{const}, \text{ или} \\ w = \bar{w}, \quad \Omega_1 = \bar{\Omega}_1, \quad \Omega_2 = \bar{\Omega}_2, \quad \text{при } x = \text{const}. \quad (17)$$

$$2) N_{23} = \bar{N}_{23}, \quad L_{21} = \bar{L}_{21}, \quad L_{22} = \bar{L}_{22}, \quad \text{при } y = \text{const}, \text{ или} \\ w = \bar{w}, \quad \Omega_1 = \bar{\Omega}_1, \quad \Omega_2 = \bar{\Omega}_2, \quad \text{при } y = \text{const}. \quad (18)$$

3) шарнирное-опирание:

$$w = 0, \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial x} = 0, \quad \Omega_1 = 0, \quad \text{при } x = 0, a; \\ w = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} = 0, \quad \text{при } y = 0, b. \quad (19)$$

К уравнениям движения следует присоединить ещё начальные условия при $t = t_0$

$$\text{для } w, \frac{\partial w}{\partial t}, \Omega_1, \frac{\partial \Omega_1}{\partial t}, \Omega_2, \frac{\partial \Omega_2}{\partial t}.$$

Здесь w – прогиб срединной плоскости пластинки; Ω_1, Ω_2 – свободные повороты точек пластинки вокруг осей x и y соответственно; Γ_{13}, Γ_{23} – поперечные сдвиговые деформации в плоскостях xz и yz ; $k_{11}, k_{22}, k_{12}, k_{21}$ – компоненты тензора изгиба-кручений; N_{13}, N_{23} – перерезывающие усилия; L_{12}, L_{21} – изгибающие моменты, L_{11}, L_{22} – крутящие моменты от моментных напряжений. В физических

соотношениях упругости (15), $D_*, D' = \gamma_* + \varepsilon_*$, $\eta_2 = \frac{\gamma_* - \varepsilon_*}{\gamma_* + \varepsilon_*}$, $\beta_* = \frac{\gamma_* - \varepsilon_*}{\gamma_* + \varepsilon_*} 2\gamma_*$ -

упругие жёсткостные характеристики графена, численные значения которых определены в работе [30] (это означает, что и в этой континуальной теории деформационного поведения графена не используется понятие толщины пластинки):

$$D_* = 86 \frac{нН}{нм}; \quad D' = 0,415 нН \cdot нм; \quad \eta_2 = -0,219; \quad \beta_* = -0,071 нН \cdot нм. \quad (20)$$

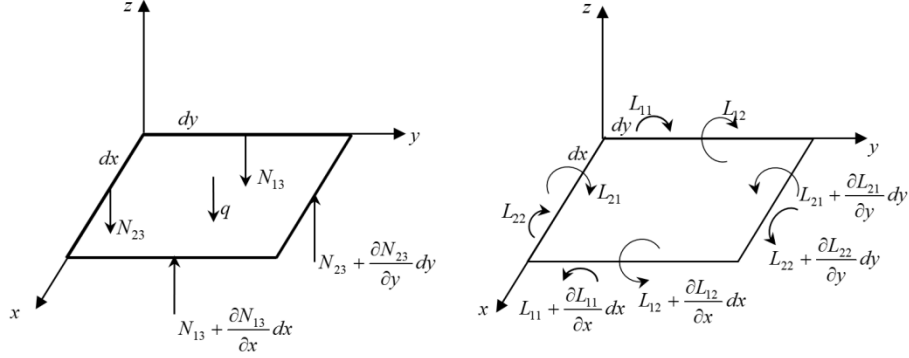


Рис. 2. Усилия и моменты при поперечном изгибе пластинки

Подставив геометрические соотношения (16) в соотношения упругости (15) и полученные в уравнения движения (14), получим уравнения динамики листа графена относительно прогиба w и свободных поворотов $\Omega_i, i = 1, 2$:

$$\begin{aligned}
 D_* \Delta w + D_* \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} \right) &= -q + \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\
 D' \Delta \Omega_1 + 2D' \eta_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial y} \right) + D_* \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \Omega_1 \right) &= -m_1 + J_0 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial t^2}, \\
 D' \Delta \Omega_2 + 2D' \eta_2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial y} \right) - D_* \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \Omega_2 \right) &= -m_2 + J_0 \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2},
 \end{aligned} \tag{21}$$

В задаче динамики упругих пластин важнейшей её частью является нахождение частот собственных колебаний и собственных функций.

Опишем кратко ход решения задачи о свободных изгибных колебаниях листа графена.

Ищем решение системы уравнений (21) в виде произведений

$$w = w^*(x, y)e^{-i\omega t}, \quad \Omega_i = \Omega_i^*(x, y)e^{-i\omega t}, \quad i = 1, 2, \tag{22}$$

Тогда относительно функций $w^*(x, y), \Omega_i^*(x, y), i = 1, 2$, приходим к решению следующей однородной системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 D_* \Delta w^* + D_* \left(\frac{\partial \Omega_2^*}{\partial x} - \frac{\partial \Omega_1^*}{\partial y} \right) &= -\rho_0 \omega^2 w^*, \\
 D' \Delta \Omega_1^* + 2D' \eta_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Omega_1^*}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_2^*}{\partial y} \right) + D_* \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} - \Omega_1^* \right) &= -J_0 \omega^2 \Omega_1^*, \\
 D' \Delta \Omega_2^* + 2D' \eta_2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Omega_1^*}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_2^*}{\partial y} \right) - D_* \left(\frac{\partial w^*}{\partial x} + \Omega_2^* \right) &= -J_0 \omega^2 \Omega_2^*.
 \end{aligned} \tag{23}$$

К этой системе уравнений присоединим однородные граничные условия типа (17) или (18). При решении граничной задачи (23), (17) или (18) (однородные), определяются частоты собственных изгибных колебаний и формы колебаний листа графена.

Эта задача эквивалентна задаче минимума для функционала (11), полученного с помощью выражения потенциальной энергии деформации пластины и кинетической энергии ее изгибных колебаний, где [33]

$$U^* = \frac{1}{2} \iint_{(S)} \left\{ D_* (\Gamma_{13}^2 + \Gamma_{23}^2) + D' [(1 + 2\eta_2)(k_{11}^2 + k_{22}^2) + 2\eta_2 \cdot k_{11}k_{22}] + \right. \\ \left. + D' (k_{12}^2 + k_{21}^2 + 2\eta_2 \cdot k_{12}k_{21}) \right\} dx dy, \quad (24)$$

$$K^* = \frac{1}{2} \omega^2 \iint_{(S)} [\rho_0 w^2 + J_0 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)] dx dy, \quad (25)$$

2. Метод конечных элементов (МКЭ) для численного решения краевых задач статики и собственных колебаний моментно-мембранной линейной теории упругих пластин (прямоугольного листа графена), при плоском напряжённом состоянии и при поперечном изгибе.

На основании принципа минимума полной потенциальной энергии системы в моментно-мембранной теории упругих пластин: А) при плоском напряжённом состоянии, Б) при поперечном изгибе, была установлена теорема: поле перемещений и свободного поворота, удовлетворяющее уравнениям равновесия (и совместности деформаций) минимизируют функционал: в случае А)[33]:

$$\Pi = \iint_{(S)} W dx dy - \int_0^a (\bar{S}_{21} \cdot u_1 + \bar{T}_{22} \cdot u_2 + \bar{L}_{23} \cdot \Omega_3) \Big|_{y=0}^{y=b} dx - \\ - \int_0^b (\bar{T}_{11} \cdot u_1 + \bar{S}_{12} \cdot u_2 + \bar{L}_{13} \cdot \Omega_3) \Big|_{x=0}^{x=a} dy, \quad (26)$$

где W - поверхностная плотность потенциальной энергии деформации пластинки:

$$W = \frac{1}{2} \left[\tilde{E}_* (\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 + 2\nu\Gamma_{11}\Gamma_{22}) + C_* (\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2 + 2\eta_1\Gamma_{12}\Gamma_{21}) + \right. \\ \left. + B_* (k_{13}^2 + k_{23}^2) \right]. \quad (27)$$

В случае Б):

$$\begin{aligned}
\Pi = & \iint_{(S)} W_0 dx dy - \iint_{(S)} q w dx dy - \int_0^a \left(\bar{N}_{23} \cdot w + \bar{L}_{22} \cdot \Omega_2 + \bar{L}_{21} \cdot \Omega_1 \right) \Big|_{y=0}^{y=b} dx - \\
& - \int_0^b \left(\bar{N}_{13} \cdot w + \bar{L}_{11} \cdot \Omega_1 + \bar{L}_{12} \cdot \Omega_2 \right) \Big|_{x=0}^{x=a} dy,
\end{aligned} \tag{28}$$

где W_0 - поверхностная плотность потенциальной энергии деформации изгиба пластинки:

$$\begin{aligned}
W_0 = & \frac{1}{2} \left\{ D_* \left(\Gamma_{13}^2 + \Gamma_{23}^2 \right) + D' \left[\left(1 + 2\eta_2 \right) \left(k_{11}^2 + k_{22}^2 \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2\eta_2 k_{11} k_{22} \right] + D' \left(k_{12}^2 + k_{21}^2 + 2\eta_2 k_{12} k_{21} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{29}$$

В рамках основных процедур МКЭ [35,36] будем искать приближение к точному решению для указанных обеих граничных задач.

После разбиения прямоугольной области срединной плоскости пластинки на прямоугольные конечные элементы, выражение полной потенциальной энергии системы можно записать в виде

$$\Pi = \sum_{e=1}^m \Pi^e = \sum_{e=1}^m \iint_{s^e} \frac{1}{2} \varepsilon^T \sigma ds^e - \sum_{e=1}^m \int_{l^e} U^T p^e dl^e, \tag{30}$$

где s^e - прямоугольная область конечного элемента, l^e - контур этой области, m - общее число элементов. А) В случае плоского напряженного состояния пластин:

$$\{u^e\}^T = (u_1^e, u_2^e, \Omega_3^e) - \text{вектор обобщённых перемещений,}$$

$$\{\varepsilon^e\}^T = (\Gamma_{11}^e, \Gamma_{22}^e, \Gamma_{12}^e, \Gamma_{21}^e, k_{13}^e, k_{23}^e) - \text{вектор обобщённых деформаций,}$$

$$\{\sigma^e\}^T = (T_{11}^e, T_{22}^{(e)}, S_{12}^e, S_{21}^e, L_{13}^{(e)}, L_{23}^{(e)}) - \text{вектор обобщённых усилий,}$$

$$\{p^e\}^T = (T_{11}^{(e)}, S_{12}^{(e)}, L_{13}^{(e)}) - \text{на контурах прямоугольного элемента } x = const,$$

$$\{p^e\}^T = (S_{21}^e, T_{22}^{(e)}, L_{23}^{(e)}) - \text{на контурах прямоугольного элемента } y = const.$$

Рассмотрим равновесие некоторого элемента e . Узлы прямоугольного конечного элемента обозначим i, j, k, l . Для прямоугольного элемента получается 36 степеней

свободы (четыре узла по $u_1^{(e)}, u_2^{(e)}, \Omega_3^{(e)}, \frac{\partial u_1^{(e)}}{\partial x}, \frac{\partial u_2^{(e)}}{\partial x}, \frac{\partial \Omega_3^{(e)}}{\partial x}, \frac{\partial u_1^{(e)}}{\partial y}, \frac{\partial u_2^{(e)}}{\partial y}, \frac{\partial \Omega_3^{(e)}}{\partial y}$ в

каждом), поэтому вводим 36 полиномиальных коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{36}$:

$$\begin{aligned}
u_1^{(e)} = & \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 xy + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 xy^2 + \alpha_9 x^3 + \\
& + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3,
\end{aligned}$$

$$u_2^{(e)} = \alpha_{13} + \alpha_{14}x + \alpha_{15}y + \alpha_{16}x^2 + \alpha_{17}y^2 + \alpha_{18}xy + \alpha_{19}x^2y + \alpha_{20}xy^2 + \alpha_{21}x^3 + \alpha_{22}y^3 + \alpha_{23}x^3y + \alpha_{24}xy^3, \quad (31)$$

$$\Omega_3^{(e)} = \alpha_{25} + \alpha_{26}x + \alpha_{27}y + \alpha_{28}x^2 + \alpha_{29}y^2 + \alpha_{30}xy + \alpha_{31}x^2y + \alpha_{32}xy^2 + \alpha_{33}x^3 + \alpha_{34}y^3 + \alpha_{35}x^3y + \alpha_{36}xy^3.$$

Выполняя процедуру действий МКЭ, получим

$$\{u^e\} = [N]\{\delta^e\}, \quad \{\varepsilon^e\} = [R][N]\{\delta^e\} = [B]\{\delta^e\}, \quad \{\sigma^e\} = [D][B]\{\delta^e\}, \quad (32)$$

где $[N]$ - матрица базисных функций конечного элемента (матрица функции формы), $[R]$ - матрица дифференциальных операторов, связывающих деформации и изгиб-кручения с перемещениями и свободным поворотом; $[D]$ - матрица упругости:

$$[R] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} \tilde{E}_* & \tilde{E}_* \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{E}_* \nu & \tilde{E}_* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_* & C_* \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_* \eta_1 & C_* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_* \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Вектор узловых обобщённых перемещений для элемента e выражается так

$$\{\delta^e\}^T = \left(u_{1i}^e, \frac{\partial u_{1i}^e}{\partial x}, \frac{\partial u_{1i}^e}{\partial y}, u_{2i}^e, \frac{\partial u_{2i}^e}{\partial x}, \frac{\partial u_{2i}^e}{\partial y}, \Omega_{3i}^e, \frac{\partial \Omega_{3i}^e}{\partial x}, \frac{\partial \Omega_{3i}^e}{\partial y}, \right. \\ u_{1j}^e, \frac{\partial u_{1j}^e}{\partial x}, \frac{\partial u_{1j}^e}{\partial y}, u_{2j}^e, \frac{\partial u_{2j}^e}{\partial x}, \frac{\partial u_{2j}^e}{\partial y}, \Omega_{3j}^e, \frac{\partial \Omega_{3j}^e}{\partial x}, \frac{\partial \Omega_{3j}^e}{\partial y}, \\ u_{1k}^e, \frac{\partial u_{1k}^e}{\partial x}, \frac{\partial u_{1k}^e}{\partial y}, u_{2k}^e, \frac{\partial u_{2k}^e}{\partial x}, \frac{\partial u_{2k}^e}{\partial y}, \Omega_{3k}^e, \frac{\partial \Omega_{3k}^e}{\partial x}, \frac{\partial \Omega_{3k}^e}{\partial y}, \\ \left. u_{1l}^e, \frac{\partial u_{1l}^e}{\partial x}, \frac{\partial u_{1l}^e}{\partial y}, u_{2l}^e, \frac{\partial u_{2l}^e}{\partial x}, \frac{\partial u_{2l}^e}{\partial y}, \Omega_{3l}^e, \frac{\partial \Omega_{3l}^e}{\partial x}, \frac{\partial \Omega_{3l}^e}{\partial y} \right). \quad (34)$$

Б) В случае поперечного изгиба имеем

$\{u^e\}^T = (w^e, \Omega_1^e, \Omega_2^e)$ - вектор обобщённых перемещений,

$\{\varepsilon^e\}^T = (\Gamma_{13}^e, \Gamma_{23}^e, k_{11}^e, k_{22}^e, k_{12}^e, k_{21}^e)$ - вектор обобщённых деформаций,

$\{\sigma^e\}^T = (N_{13}^e, N_{23}^e, L_{11}^e, L_{22}^e, L_{12}^e, L_{21}^e)$ - вектор обобщённых усилий,

$\{p^e\}^T = (N_{13}^e, L_{11}^{(e)}, L_{12}^{(e)})$ - на контуре прямоугольного элемента $x = const$,

$\{p^e\}^T = (N_{23}^e, L_{21}^e, L_{22}^e)$ - на контуре прямоугольного элемента $y = const$.

Для прямоугольного конечного элемента получим 36 степеней свободы (четыре узла по $w^e, \Omega_1^e, \Omega_2^e, \frac{\partial w^e}{\partial x}, \frac{\partial w^e}{\partial y}, \frac{\partial \Omega_1^e}{\partial x}, \frac{\partial \Omega_1^e}{\partial y}, \frac{\partial \Omega_2^e}{\partial x}, \frac{\partial \Omega_2^e}{\partial y}$ в каждом). Прогиб w^e и

независимые повороты Ω_1^e, Ω_2^e представим так

$$\begin{aligned} w &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 xy + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 xy^2 + \alpha_9 x^3 + \\ &+ \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3, \\ \Omega_1 &= \alpha_{13} + \alpha_{14} x + \alpha_{15} y + \alpha_{16} x^2 + \alpha_{17} y^2 + \alpha_{18} xy + \alpha_{19} x^2 y + \alpha_{20} xy^2 + \alpha_{21} x^3 + \\ &+ \alpha_{22} y^3 + \alpha_{23} x^3 y + \alpha_{24} xy^3, \\ \Omega_2 &= \alpha_{25} + \alpha_{26} x + \alpha_{27} y + \alpha_{28} x^2 + \alpha_{29} y^2 + \alpha_{30} xy + \alpha_{31} x^2 y + \alpha_{32} xy^2 + \alpha_{33} x^3 + \\ &+ \alpha_{34} y^3 + \alpha_{35} x^3 y + \alpha_{36} xy^3. \end{aligned} \quad (35)$$

В этом случае также приходим к выражениям (32), где на этот раз

$$[R] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & +1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}, [D] = \begin{bmatrix} D_* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D'(1+2\eta_2) & D'\eta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D'\eta_2 & D'(1+2\eta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D' & D'\eta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D'\eta_2 & D' \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Вектор узловых обобщённых перемещений для элемента e имеет вид

$$\begin{aligned} \{\delta^e\}^T = & \left(w_i^e, \frac{\partial w_i^e}{\partial x}, \frac{\partial w_i^e}{\partial y}, \Omega_{1i}^e, \frac{\partial \Omega_{1i}^e}{\partial x}, \frac{\partial \Omega_{1i}^e}{\partial y}, \Omega_{2i}^e, \frac{\partial \Omega_{2i}^e}{\partial x}, \frac{\partial \Omega_{2i}^e}{\partial y}, \right. \\ & w_j^e, \frac{\partial w_j^e}{\partial x}, \frac{\partial w_j^e}{\partial y}, \Omega_{1j}^e, \frac{\partial \Omega_{1j}^e}{\partial x}, \frac{\partial \Omega_{1j}^e}{\partial y}, \Omega_{2j}^e, \frac{\partial \Omega_{2j}^e}{\partial x}, \frac{\partial \Omega_{2j}^e}{\partial y}, \\ & w_k^e, \frac{\partial w_k^e}{\partial x}, \frac{\partial w_k^e}{\partial y}, \Omega_{1k}^e, \frac{\partial \Omega_{1k}^e}{\partial x}, \frac{\partial \Omega_{1k}^e}{\partial y}, \Omega_{2k}^e, \frac{\partial \Omega_{2k}^e}{\partial x}, \frac{\partial \Omega_{2k}^e}{\partial y}; \\ & \left. w_l^e, \frac{\partial w_l^e}{\partial x}, \frac{\partial w_l^e}{\partial y}, \Omega_{1l}^e, \frac{\partial \Omega_{1l}^e}{\partial x}, \frac{\partial \Omega_{1l}^e}{\partial y}, \Omega_{2l}^{(e)}, \frac{\partial \Omega_{2l}^{(e)}}{\partial x}, \frac{\partial \Omega_{2l}^{(e)}}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Для обеих задач А) и Б), имея выражение функционала (30), используя формулу дифференцирования (21, 22) и принимая обозначения

$$[K^e] = \iint_{(s^e)} [B]^T [D] [B] ds^e, \quad \{f^e\} = \int_{(r^e)} [N]^T \{p^e\} dl^e, \quad (38)$$

уравнение равновесия элемента e , в окончательном виде будет выражаться так

$$\frac{\partial \Pi^e}{\partial \{\delta^e\}} = [K^e] \{\delta^e\} - \{f^e\} = 0. \quad (39)$$

Здесь матрица $[K^e]$ носит название матрицы жёсткости конечного элемента e ;

$\{f^e\}$ - вектор эквивалентных узловых сил.

Далее, осуществляя объединение этих элементарных матричных соотношений в одно матричное соотношение, которое корректируется в целях учёта кинематических граничных условий (статические граничные условия учитываются автоматически при составлении вектора узловых сил), получим окончательную систему алгебраических уравнений:

$$[K_\Sigma] \{\Delta\} = \{f_\Sigma\}, \quad (40)$$

порядок которой соответствует количеству введённых в рассмотрение неизвестных.

Матрица $[K_\Sigma]$ носит название глобальной матрицы жёсткости или матрицы жёсткости системы конечных элементов, а $\{f_\Sigma\}$ - глобального вектора узловых сил системы; $\{\Delta\}$ - глобальный вектор узловых неизвестных

$$\{\Delta\} = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N\}^T. \quad (41)$$

Здесь N - общее число узлов в системе; δ_i - вектор неизвестных i -го узла типа (34) и (37).

Теперь перейдём к задаче о собственных колебаниях листа графена на основе моментно-мембранной теории упругих пластин: А)-плоское напряжённое состояние, Б)-поперечный изгиб. Решение этой задачи численно реализуем с помощью МКЭ. При

решении МКЭ задачи о собственных колебаний пластин, удобно пользоваться соответствующей вариационной формулировкой.

А) Вариационная задача в этом случае имеет вид (11), с учётом (12), (13).

Б) Вариационная задача в этом случае имеет вид (11), с учётом (24), (25).

Итак, будем иметь дело с экстремальным свойством для функционала (11), на основе которого получим основные матрицы теории МКЭ для определения частот и форм собственных колебаний пластины:

$$\left\{ \left[K^e \right] - \omega^2 \left[M^e \right] \right\} \cdot \left\{ \delta^e \right\} = 0, \quad (42)$$

где $\left[K^e \right]$ - матрица жёсткости (37), а $\left[M^e \right]$ - матрица массы конечного элемента e .

Глобальная система однородных алгебраических уравнений метода МКЭ примет вид

$$\left\{ \left[K_{\Sigma} \right] - \omega^2 \left[M_{\Sigma} \right] \right\} \cdot \left\{ \Delta \right\} = 0, \quad (43)$$

где $\left[K_{\Sigma} \right]$ - глобальная матрица жёсткости пластины; $\left[M_{\Sigma} \right]$ - глобальная матрица масс пластины; $\left\{ \Delta \right\}$ - глобальный вектор узловых неизвестных (41).

Система (43) является обобщённой задачей на собственные значения, решая которую (после учёта в ней граничных условий) будут определены частоты и формы собственных колебаний пластины (листа графена), как для случая А), так и для Б).

3. Прикладная задача собственных колебаний листа графена на основе моментно-мембранной теории упругих пластин.

Рассмотрим задачу собственных колебаний прямоугольного листа графена по модели поперечного изгиба пластинки, когда пластинка по всему контуру шарнирно-опёрта. Граничные условия имеют вид (19).

Жесткостные характеристики для графена имеют значения (20), по данным работы [30]: $\rho_0 = 0,76 \text{ мг} / \text{м}^2 = 0,76 \cdot 10^{-15} \text{ нкг} / \text{нм}^2$; $J_0 = 0,46 \cdot 10^{-19} \text{ нкг}$. Пусть $a = 20 \text{ нм}$, $b = 20 \text{ нм}$.

Для этого, на основании (41), составляя разрешающее матричное уравнение с учётом граничных условий (19), для каждого приближения по МКЭ, обращая соответствующий определитель к нулю, численно определяются значения частот колебаний.

В таблице 1 приведены значения наименьшей частоты собственных колебаний прямоугольного листа графена.

Таблица 1. Наименьшая частота собственных колебаний листа графена

Наименьшая частота собственных колебаний ГГц -(ГигаГерц)	Приближения по МКЭ			Теоретическое значение
	4 конечных элемента	16 конечных элементов	36 конечных элементов	
ω	19.5	6.47	5.80	5.72

Приведённые в таблице 1 числовые значения, указывают на практическую сходимость приближений по МКЭ.

Отметим, что теоретические значения искомых величин определены применением для решения указанных граничных задач метода двойных тригонометрических рядов.

Заключение. В работе изложена моментно-мембранная линейная динамическая теория упругих пластин: 1) плоское напряжённое состояние, 2) поперечный изгиб, как континуальные теории деформационного поведения листа графена. Эта теория открывает большие возможности для изучения прикладных деформационных задач листа графена, как в его плоскости, так и в случае поперечного изгиба. Для построения численных решений поставленных таким образом краевых задач применяется метод конечных элементов. Задачи изгиба и собственных колебаний листа графена (прямоугольной пластинки) методом конечных элементов решаются на основе принципа минимума определённых функционалов. В результате, построены матрицы жёсткости и масс прямоугольного конечного элемента листа графена.

Построено численное решение конкретной прикладной задачи собственных изгибных колебаний листа графена. В соответствующей таблице показаны численные результаты решения указанной задачи при равномерной разбивке пластинки на различное число прямоугольных конечных элементов. Даны сравнения полученных результатов с теоретическими.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nalwa H.S. Handbook of Nanostructured Materials and Nanotechnology. London: Elsevier Applied Science, 2000.
2. Bhushan B. Springer Handbook of Nanotechnology. Heidelberg: Springer, 2004.
3. Kudin K.N. et al. C₂F, BN and C nanoshell elasticity from ab initio computations // Phys. Rev. B. 2001. 64(23). P. 235406.
4. Liu F et al. Ab initio calculation of ideal strength and phonon instability of graphene in tension // Phys. Rev. B. 2007. Vol. 76. Is. 6. P. 1-7.
5. Рапапорт Д.К. Искусство молекулярной динамики. Москва, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2012. 632 с.
6. Галимзянов Б.Н., Мокшин А.В. Основы моделирования молекулярной динамики. Москва, Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2018. 106 с.
7. Дьячков П.Н. Углеродные нанотрубки. Строение, свойства, применения. М.: БИНОМ. 2006. 293 с.
8. Geim A.K., Novoselov K.S. The rise of graphene // Nature Materials. 2007. Vol. 6, no. 3. P. 183- 191. DOI:10.1038/nmat1849.
9. Баимова Ю.А., Мулюков Р.Р. Графен, нанотрубки и другие углеродные наноструктуры. М.: РАН. 2018. 212 с.
10. Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф., Фирсова А.Д. Учёт моментного взаимодействия при расчёте изгибной жёсткости наноструктур // Доклады РАН. 2003. Т. 391, № 6. С. 764-768.
11. Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. Получение макроскопических соотношений упругости сложных кристаллических решёток при учёте моментных взаимодействий на микроуровне // Прикл. мат. и механика. 2007. Т. 71. Вып. 4. С. 595-615.

12. Современные проблемы механики. Механические свойства ковалентных кристаллов / под ред. А.М. Кривцова, О.С. Лободы. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2014. 160 с.
13. Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. Аномалии механических характеристик наноразмерных объектов // Доклады РАН. 2001. Т. 381. Вып. 3. С. 345-347.
14. Tersoff, J. Empirical Interatomic potential for Carbon, with Applications to Amorphous Carbon. *Phys. Rev. B*. 1988, 61. 2879-2882. DOI: 10.1103/PhysRevLett.61.2879
15. Brenner, D.W.; Shendezova, O.A.; Harrison, J.A. et al. A second- generation reactive empirical bond order (REBO) potential energy expression for hydrocarbons // *J. Phys: Condens. Matter* 2002, 14, 783-802. DOI:10.1088/0953-8984/14/4/312
16. Dmitriev S.V., Semenov A.S., Savin A.V., Igamor M.A., Bachurin D.V. Rotobreather in a carbon nanotube bundle// *J. Micromech. Mol. Phys.* 2020. Vol. 5. N 3. 2050010.
17. Дмитриев С. В., Сунагатова И.Р., Ильгамов М.А, Павлов И.С. Собственные частоты изгибных колебаний углеродных нанотрубок // Журнал технической физики. 2021. Т. 91. Вып. 11. С. 1732-1737.
18. Головнева Е.И., Головнев И.Ф., Фомин В.М. Молекулярно- динамический анализ динамического разрушения наноструктур // Физ. мезомех. 2003. Т. 6. N: 2. С.37-46.
19. Андреев А.Н., Астафуров С.В., Фомин В.М. и др. Механика - от дискретного к сплошному / Отв. ред. В. М. Фомин. Новосибирск: Наука. 2008. 344 с.
20. Odegard G.M., Gates T.S., Nicholson L.M., Wise K.E. Equivalent-Continuum Modeling of Nano-structured Materials// NASA Langley Research Center: Technical Memorandum NASA/TM-2001-210863-2001.
21. Гольдштейн Р.В., Ченцов А.В. Дискретно-континуальная модель нанотрубки. //Иzv. РАН. Механика твердого тела. 2005. № 4. С. 57-74.
22. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С. Мезомеханика многослойных углеродных нанотрубок и наноусов//Физическая мезомеханика. 2008. Т. 11. N 6. С. 25-42.
23. Li, C.A.; Chou, T.W. A structural mechanics approach for the analysis of carbon nanotubes. *Int. J. Solids Struch.*2003, 40, 2487-2499. DOI: 10.1016/S0020-7683(03)00056-8
24. Wan, H.; Delate, F. A structural approach for predicting the mechanical properties of carbon nanotubes. *Meccanica* 2010, 45, 43-51. DOI: 10.1007/s11011№2-009-9222-2
25. Аннин Б.Д., Алёхин В.В., Бабичев А.В., Коробейников С.Н. Применение метода молекулярной механики к задачам устойчивости и собственных колебаний однослойных углеродных нанотрубок//Иzv. РАН. Механика твёрдого тела. 2012. N. 5. С. 65-83.
26. Алёхин В.В., Аннин Б. Д., Бабичев А.В., Коробейников С.Н. Собственные колебания и выпучивание графеновых листов// Изв. РАН. Механика твёрдого тела. 2013. N 5. С. 34-39.
27. Zhang P., Jiang H., Huang Y., Geubelle P.H., Hwang K.C. An atomistic-based continuum theory the carbon nanotubes analysis of fracture nucleation// *J. Mech. And Phys. Solids*. 2004. 52. P. 977-998.
28. Xiao J.R., Gama B.A., Gillespie Jr. An analytical molecular structural mechanics model for the mechanical properties of carbon nanotubes// *Int. J. Solis Struct.* 2025. 42. P. 3075-3092.

29. Борн М., Кунь Х. Динамическая теория кристаллических решёток. М.: Изд-во иностр.лит. 1958. 488 с. (Born M., Huang K. Dynamic Theory of Crystal Lattices. Oxford: Oxford University Press. 1954).
30. Саркисян С.О. Стержневая и континуально-моментная модели деформаций двумерных наноматериалов//Физическая мезомеханика. 2022. Т.25. N 2. С. 109-121.
31. Sargsyan S.H. Continuous Theory and Problems of Static Bending, Natural Vibrations and Stability of a Graphene Sheet// Actual Problems of Continuum Mechanics: Experiment, Theory, and Applications. AIP Conference Proceedings 2504, 030047 (2023)
32. Саркисян С.О. Модель тонких оболочек в моментной теории упругости с деформационной концепцией «сдвиг плюс поворот» // Физическая мезомеханика. 2020. Т. 23. № 4. С. 13-19.
33. Саркисян С.О. Вариационные принципы моментно-мембранной теории оболочек // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2022. № 1. С. 38-47.
34. Sargsyan S.H. Moment-membrane theory of elastic cylindrical shells as a continual model of deformations of a single-layer carbon nanotube// Journal of Materials Physics and Mechanics. 2024. Vol. 52. №1. P. 26-38.
35. Norrie D.H., De Vries G. An Introduction to Finite Element Analysis. New York: Academic Press, 1978. 301 p.
36. Gallagher R.H. Finite Element Analysis: Fundamentals. Pearson College Div. First Edition, 1975. 420 p.

Сведения об авторах:

Саркисян Самвел Оганесович – чл.-корр. НАН РА, д.ф.м.н, проф., заведующий лабораторией «Механики материалов и конструкций нано- и микротехники» Ширакского государственного университета им. М. Налбандяна,
Тел.:(37493)151698. **E-mail:** s_sargsyan@yahoo.com

Саркисян Лусине Самвеловна – к.ф.м.н., доцент, старший научный сотрудник Института Механики НАН РА,
Тел.:(37499)577790. **E-mail:** lusinehsargsyan@gmail.com

Жамакочян Кнарик Араратовна- к.ф.м.н., доцент, старший научный сотрудник Ширакского государственного университет имени М. Налбандяна,
Тел.: (37493)873294. **E-mail:** knarikzhamakochyan@mail.ru.

Поступила в редакцию 4-ого марта 2026 г.

**Solution of Special Mixed Dynamic Problems
of Anisotropic Plates**
Aghalovyan L.A., Aghalovyan M.L., Zakaryan T.V., Tovmasyan A.B.

Keywords: anisotropy, dynamics, 3D mixed boundary problems, resonance, asymptotic solution

The spatial mixed dynamic problem for anisotropic plates is solved. It is assumed, that the plate has a plane of elastic symmetry, the facial surface is imparted normal displacements that change harmonically over time, and the shear stresses there are equal to zero. The lower facial surface of the plate is rigidly fixed. For this class of problems, the hypotheses of the classical and well-known refined theories of plates (Reissner E., Ambartsumyan S., Timoshenko's type aren't applicable. The asymptotic solution to the problem is obtained. It is shown that longitudinal oscillations in the vertical direction are dominant, which also generate tangential oscillations, the amplitudes of which, however, are an order of magnitude smaller than the longitudinal ones. The conditions for the occurrence of resonance were established and the values of resonant frequencies were determined. If the displacements subjected to the facial surface depend polynomially on the tangential coordinates, the solution becomes mathematically exact. The illustrative example is given.

Агаловян Л.А., Агаловян М.Л., Закарян Т.В., Товмасын А.Б.

К решению пространственных смешанных динамических задач анизотропных пластин.

Ключевые слова: анизотропия, динамика, 3D смешанные краевые задачи, резонанс, асимптотическое решение

Решена пространственная смешанная динамическая задача для анизотропных пластин. Считается, что пластина имеет плоскость упругой симметрии, лицевой поверхности сообщены нормальные перемещения гармонически изменяющиеся во времени, а касательные напряжения там равны нулю. Нижняя лицевая поверхность пластины жёстко закреплена. Для этого класса задач гипотезы классической и известных уточнённых теорий пластин (Рейснер Е., Амбарцумян С., типа Тимошенко) неприменимы. Получено асимптотическое решение задачи. Показано, что доминирующими являются продольные колебания в вертикальном направлении, которые порождают также тангенциальные колебания, амплитуда которых, однако, на порядок меньше продольных. Установлены условия возникновения резонанса и определены значения резонансных частот. Если сообщаемые лицевой поверхности перемещения полиномиально зависят от тангенциальных координат, решение становится математически точным. Приведён иллюстрационный пример.

Աղալովյան Լ.Ա., Աղալովյան Մ.Լ., Ջաքարյան Տ.Վ., Թովմասյան Ա.Բ.

Անիզոտրոպ սալերի տարածական խառը դինամիկական խնդիրների լուծման մասին

Հիմնաբառեր` անիզոտրոպություն, դինամիկա, 3D խառը եզրային խնդիրներ, ռեզոնանս, ասիմպտոտիկ լուծում

Անիզոտրոպ սալերի համար լուծված է տարածական խառը դինամիկական խնդիրը: Ենթադրվում է, որ սալն ունի առաձգականության սիմետրիայի հարթություն, դիմային մակերևույթին հաղորդված է նորմալ տեղափոխություն՝ ըստ ժամանակի հարմունիկ փոփոխվող, շոշափող լարումներն այնտեղ զրո են: Սալի ստորին մակերևույթը կոշտ ամրակցված է: Այս դասի խնդիրների լուծման համար սալերի դասական և ճշգրտված հայտնի տեսությունները (Ռեյսներ, Համբարձումյան, Տիմոշենկոյի տիպի) կիրառելի չեն: Ստացված է խնդրի ասիմպտոտիկ լուծումը: Ցույց է տրված, որ գլխավոր են ուղղաձիգի ուղղությամբ երկայնական տատանումները, առաջանում են նաև սահքային տատանումներ, սակայն նրանց ամպլիտուդը կարգով փոքր է: Արտածված են ռեզոնանսի առաջացման

պայմանները, որոշված են ռեզոնանսային հաճախությունները: Բերված է իլյուստրացիոն օրինակ՝ երբ ասիմպտոտիկ լուծումը դառնում է մաթեմատիկորեն ճշգրիտ:

Introduction

Most of crystals and modern composite materials are anisotropic, part of them have a plane of elastic symmetry. For example, such are, crystals of the monoclinic system [1,2]. There are relatively few works on determining the stress-strain states of plates and shells, having the plane of elastic symmetry, even according to the classical theory of plates and shells. The classical theory of plates and shells, as well as the well-known refined theories of Reissner [3,4], Ambartsumyan [5], Timoshenko's type [6], consider only one class of problems: it is assumed that on the facial surfaces of plates and shells the conditions of the first boundary value problem of elasticity theory are given, i.e. the values of the corresponding components of the stress tensor. These theories aren't applicable when on the facial surfaces are specified the conditions of the second (displacements) or mixed boundary value problems. For example, the conditions of the second boundary value problem can't be satisfied, since in classical theory it is assumed that the normal displacement (W) doesn't depend on the transverse coordinate (z). By classical and refined theories a variety of static and dynamic problems for isotropic, orthotropic and layered plates and shells have been solved. In recent decades, many important results in the field of theory of plates and shells have been obtained on the base of the asymptotic theory of plates and shells [7-13]. The asymptotic method turned out to be particularly effective for solving the second and mixed, both static and dynamic, boundary value problems of plates and shells. The fundamentally new asymptotics, compared to the classical one, was established, asymptotics, which made it possible to effectively solve these problems [14-20]. In this paper forced vibrations of plates, having the plane of elastic symmetry, when to the facial surface were subjected normal displacements that changed harmonically over time, and the lower facial surface was rigidly fixed were studied.

1. The statement of the problem: basic equations and relationships.

It is required to find in the area $D = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq h, 2h \ll l, l = \min(a, b)\}$, which is occupied by a plate (Fig. 1) solutions to the equations of motion of the three-dimensional problem of elasticity theory:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

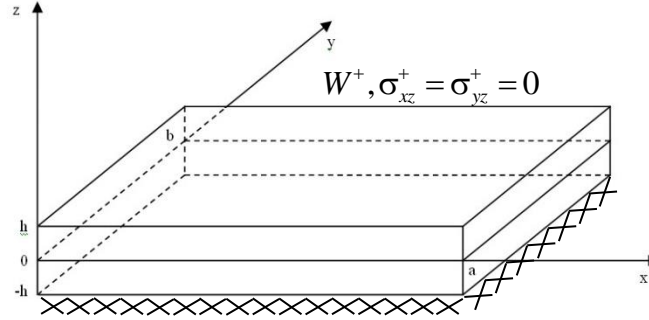


Fig.1. The structure of plate

and the relations of an anisotropic body, which have a plane of elastic symmetry [1,2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz} + a_{16}\sigma_{xy} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= a_{12}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy} + a_{23}\sigma_{zz} + a_{26}\sigma_{xy} \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= a_{13}\sigma_{xx} + a_{23}\sigma_{yy} + a_{33}\sigma_{zz} + a_{36}\sigma_{xy} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= a_{44}\sigma_{yz} + a_{45}\sigma_{xz} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= a_{45}\sigma_{yz} + a_{55}\sigma_{xz} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= a_{16}\sigma_{xx} + a_{26}\sigma_{yy} + a_{36}\sigma_{zz} + a_{66}\sigma_{xy} \end{aligned} \quad (2)$$

at the following boundary conditions at $z = h$

$$\begin{aligned} W(x, y, h, t) &= -W^+(\xi, \eta) \exp(i\Omega t), \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l}, \\ \sigma_{xz}(x, y, h, t) &= 0, \quad \sigma_{yz}(x, y, h, t) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

and at $z = -h$

$$u(x, y, -h, t) = 0, \quad v(x, y, -h, t) = 0, \quad w(x, y, -h, t) = 0 \quad (4)$$

where Ω – the frequency of forced action.

The conditions on the lateral surfaces of the plate we will not specify for now; by them is caused the appearance of boundary layer [13].

2. The asymptotic solution of the problem.

The solution of the formulated problem will be sought in the form

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta}(x, y, z, t) &= \sigma_{ij}(\xi, \eta, \zeta) \exp(i\Omega t), \quad \alpha, \beta = x, y, z, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ u(x, y, z, t) &= u_x(\xi, \eta, \zeta) \exp(i\Omega t), \quad (u, v, w; u_x, u_y, u_z)\end{aligned}\quad (5)$$

By substituting (5) in equations (1) and elasticity relations (2) and in the newly obtained system, moving to dimensionless coordinates and displacements

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{h}, \quad U = \frac{u_x}{l}, \quad V = \frac{u_y}{l}, \quad W = \frac{u_z}{l}, \quad (6)$$

as a result we will obtain the system singularly perturbed by the small parameter $\varepsilon = \frac{h}{l}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \Omega_*^2 U &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \Omega_*^2 V &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \Omega_*^2 W &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial \xi} &= a_{11} \sigma_{11} + a_{12} \sigma_{22} + a_{13} \sigma_{33} + a_{16} \sigma_{12}, \\ \frac{\partial V}{\partial \eta} &= a_{12} \sigma_{11} + a_{22} \sigma_{22} + a_{23} \sigma_{33} + a_{26} \sigma_{12}, \\ \varepsilon^{-1} \frac{\partial W}{\partial \zeta} &= a_{13} \sigma_{13} + a_{23} \sigma_{22} + a_{33} \sigma_{33} + a_{36} \sigma_{12}, \\ \frac{\partial W}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V}{\partial \zeta} &= a_{44} \sigma_{23} + a_{45} \sigma_{13}, \\ \frac{\partial W}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U}{\partial \zeta} &= a_{45} \sigma_{23} + a_{55} \sigma_{13}, \\ \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta} &= a_{16} \sigma_{11} + a_{26} \sigma_{22} + a_{36} \sigma_{33} + a_{66} \sigma_{12}, \\ \Omega_*^2 &= \rho h^2 \Omega^2,\end{aligned}\quad (7)$$

The solution of the singularly perturbed system (7) is the sum of the solutions of the external problem (I^{out}) and the boundary layer (I_b) [13]: $I = I^{\text{out}} + I_b$. The solutions of the external problem (I^{out}) and the boundary layer (I_b) can be constructed separately. The boundary layer solution (I_b) localized near the lateral surface and all quantities decrease exponentially from the lateral surface into the inside of the plate [13]. To this also corresponds the phenomenon of the edge effect [21]. That's why, we don't consider it in this paper. The

solution for the boundary layer and its conjugation with the solution of the external problem $(\mathbf{I}^{\text{out}})$ can be implemented in the way described in [13].

The solution to the external problem we will seek out in the form of

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{\text{out}} &= \varepsilon^{-1+s} \sigma_{ij}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad s = \overline{0, N} \\ (\mathbf{U}^{\text{out}}, \mathbf{V}^{\text{out}}, \mathbf{W}^{\text{out}}) &= \varepsilon^s (\mathbf{U}^{(s)}, \mathbf{V}^{(s)}, \mathbf{W}^{(s)}), \end{aligned} \quad (8)$$

where notation $s = \overline{0, N}$ means summation by repeating (umbral) index s from 0 to number of approximations N . From (8) it follows that the stresses must have the same intensity.

By substituting (8) into (7) and in each equation equating coefficients at the same powers ε , we will obtain the following consistent system for determining unknown functions $\sigma_{ij}^{(s)}, \mathbf{U}^{(s)}, \mathbf{V}^{(s)}, \mathbf{W}^{(s)}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \Omega_*^2 \mathbf{U}^{(s)} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \Omega_*^2 \mathbf{V}^{(s)} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{33}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \Omega_*^2 \mathbf{W}^{(s)} &= 0, \\ \\ \frac{\partial \mathbf{U}^{(s-1)}}{\partial \xi} &= a_{11} \sigma_{11}^{(s)} + a_{12} \sigma_{22}^{(s)} + a_{13} \sigma_{33}^{(s)} + a_{16} \sigma_{12}^{(s)}, \\ \frac{\partial \mathbf{V}^{(s-1)}}{\partial \eta} &= a_{12} \sigma_{11}^{(s)} + a_{22} \sigma_{22}^{(s)} + a_{23} \sigma_{33}^{(s)} + a_{26} \sigma_{12}^{(s)}, \\ \frac{\partial \mathbf{W}^{(s)}}{\partial \zeta} &= a_{13} \sigma_{11}^{(s)} + a_{23} \sigma_{22}^{(s)} + a_{33} \sigma_{33}^{(s)} + a_{36} \sigma_{12}^{(s)}, \\ \\ \frac{\partial \mathbf{W}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{V}^{(s)}}{\partial \zeta} &= a_{44} \sigma_{23}^{(s)} + a_{45} \sigma_{13}^{(s)}, \\ \frac{\partial \mathbf{W}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{U}^{(s)}}{\partial \zeta} &= a_{45} \sigma_{23}^{(s)} + a_{55} \sigma_{13}^{(s)}, \\ \frac{\partial \mathbf{V}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{U}^{(s-1)}}{\partial \eta} &= a_{16} \sigma_{11}^{(s)} + a_{26} \sigma_{22}^{(s)} + a_{36} \sigma_{33}^{(s)} + a_{66} \sigma_{12}^{(s)}, \end{aligned} \quad (9)$$

From the elasticity relations of system (9) all stresses can be expressed through displacements by formulas

$$\begin{aligned}
\sigma_{13}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta_2} \left(a_{44} \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} - a_{45} \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{13}^{(s)*} \right), \\
\sigma_{23}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta_2} \left(-a_{45} \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + a_{55} \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{23}^{(s)*} \right), \\
\sigma_{11}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta_1} \left(A_{31} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{11}^{(s)*} \right), & \sigma_{22}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta_1} \left(A_{32} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{22}^{(s)*} \right) \\
\sigma_{33}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta_1} \left(A_{33} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{33}^{(s)*} \right), & \sigma_{12}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta_1} \left(A_{34} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{12}^{(s)*} \right),
\end{aligned} \tag{10}$$

Where

$$\begin{aligned}
\sigma_{13}^{(s)*} &= a_{44} \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} - a_{45} \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta}, & \sigma_{23}^{(s)*} &= -a_{45} \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} + a_{55} \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta}, \\
\sigma_{11}^{(s)*} &= A_{11} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} + A_{21} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} + A_{41} \left(\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} \right), \\
\sigma_{22}^{(s)*} &= A_{12} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} + A_{22} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} + A_{42} \left(\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} \right), \\
\sigma_{33}^{(s)*} &= A_{13} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} + A_{23} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} + A_{43} \left(\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} \right), \\
\sigma_{12}^{(s)*} &= A_{14} \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} + A_{24} \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} + A_{44} \left(\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} \right),
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \mathbf{a}_{16} \\ \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} & \mathbf{a}_{26} \\ \mathbf{a}_{13} & \mathbf{a}_{23} & \mathbf{a}_{33} & \mathbf{a}_{36} \\ \mathbf{a}_{16} & \mathbf{a}_{26} & \mathbf{a}_{36} & \mathbf{a}_{66} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \mathbf{a}_{44} \mathbf{a}_{55} - \mathbf{a}_{45}^2,$$

By substituting $\sigma_{13}^{(s)*}, \sigma_{23}^{(s)*}$ into two first equations of system (9), for determining $U^{(s)}, V^{(s)}$ we will obtain the system

$$\begin{aligned}
a_{44} \frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} - a_{45} \frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \Delta_2 \Omega_*^2 U^{(s)} &= R_u^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \\
-a_{45} \frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55} \frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \Delta_2 \Omega_*^2 V^{(s)} &= R_v^{(s)}(\xi, \eta, \zeta)
\end{aligned} \tag{12}$$

$$R_u^{(s)} = -\Delta_2 \left(\frac{\partial \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial \sigma_{13}^{(s)}}{\partial \zeta},$$

$$R_v^{(s)} = -\Delta_2 \left(\frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial \sigma_{23}^{(s)}}{\partial \zeta},$$

By substituting the value Of $\sigma_{33}^{(s)}$ into the third equation of system (9), for determination of $W^{(s)}$ we will obtain the equation

$$\frac{\partial^2 W^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\Delta_1}{A_{33}} \Omega_*^2 W^{(s)} = R_w^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (13)$$

$$R_w^{(s)} = -\frac{1}{A_{33}} \left[\frac{\partial \sigma_{33}^{(s)}}{\partial \zeta} + \Delta_1 \left(\frac{\partial \sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial \eta} \right) \right],$$

From system (12) $V^{(s)}$ can be expressed through $U^{(s)}$ by formula

$$V^{(s)} = -\frac{1}{a_{45} \Omega_*^2} \frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} - \frac{a_{55}}{a_{45}} U^{(s)} + R_v^{*(s)} \quad (14)$$

$$R_v^{*(s)} = \frac{1}{\Delta_2 \Omega_*^2} \left(\frac{a_{55}}{a_{45}} R_u^{(s)} + R_v^{(s)} \right)$$

and for determining $U^{(s)}$ taking into account (14) we will obtain the equation

$$\frac{\partial^4 U^{(s)}}{\partial \zeta^4} + (a_{44} + a_{55}) \Omega_*^2 \frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \Delta_2 \Omega_*^4 U^{(s)} = \bar{R}_u^{(s)} \quad (15)$$

$$\bar{R}_u^{(s)} = \frac{1}{\Delta_2} \left(a_{55} \frac{\partial^2 R_u^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \Delta_2 \Omega_*^2 R_u^{(s)} + a_{45} \frac{\partial^2 R_v^{(s)}}{\partial \zeta^2} \right)$$

The solution to the equation (15) is $U^{(s)} = U_0^{(s)} + U_\tau^{(s)}(\xi, \eta, \zeta)$, where $U_\tau^{(s)}$ – is particular solution:

$$U_0^{(s)} = D_1^{(s)} \cosh b_1 \Omega_* \zeta + D_2^{(s)} \sinh b_1 \Omega_* \zeta + D_3^{(s)} \cosh b_2 \Omega_* \zeta + D_4^{(s)} \sinh b_2 \Omega_* \zeta \quad (16)$$

$$b_{1,2} = \sqrt{\frac{(a_{44} + a_{55}) \mp \sqrt{(a_{44} - a_{55})^2 + 4a_{45}^2}}{2}}$$

According to (14), (16) we have

$$V^{(s)} = D_1^{(s)} d_1 \cosh b_1 \Omega_* \zeta + D_2^{(s)} d_1 \sinh b_1 \Omega_* \zeta + D_3^{(s)} d_2 \cosh b_2 \Omega_* \zeta + D_4^{(s)} d_2 \sinh b_2 \Omega_* \zeta + V_\tau^{(s)} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{1}{a_{45}}(b_1^2 - a_{55}), & d_2 &= \frac{1}{a_{45}}(b_2^2 - a_{55}) \\
V_\tau^{(s)} &= -\frac{1}{a_{45}\Omega_*^2} \frac{\partial^2 U_\tau^{(s)}}{\partial \zeta^2} - \frac{a_{55}}{a_{45}} U_\tau^{(s)} + \frac{1}{\Delta_2 \Omega_*^2} \left(\frac{a_{55}}{a_{45}} R_u^{(s)} + R_v^{(s)} \right), \\
\text{According to (10), (16), (17)} \\
\sigma_{13}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta_2} (D_1^{(s)} d_{11} \sin b_1 \Omega_* \zeta - D_2^{(s)} d_{11} \cos b_1 \Omega_* \zeta + \\
&\quad + D_3^{(s)} d_{12} \sin b_2 \Omega_* \zeta - D_4^{(s)} d_{12} \cos b_2 \Omega_* \zeta + \sigma_{13\tau}^{(s)}) \\
\sigma_{23}^{(s)} &= \frac{1}{\Delta_2} (D_1^{(s)} d_{21} \sin b_1 \Omega_* \zeta - D_2^{(s)} d_{21} \cos b_1 \Omega_* \zeta + \\
&\quad + D_3^{(s)} d_{22} \sin b_2 \Omega_* \zeta - D_4^{(s)} d_{22} \cos b_2 \Omega_* \zeta + \sigma_{23\tau}^{(s)}) \\
d_{11} &= \Omega_* b_1 (b_1^2 - a_{55} - a_{44}), & d_{12} &= \Omega_* b_2 (b_2^2 - a_{55} - a_{44}) \\
d_{21} &= \Omega_* b_1 (a_{45} - a_{55} d_1), & d_{22} &= \Omega_* b_2 (a_{45} - a_{55} d_2) \\
\sigma_{13\tau}^{(s)} &= a_{44} \frac{\partial U_\tau^{(s)}}{\partial \zeta} - a_{45} \frac{\partial V_\tau^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{13*}^{(s)}, \\
\sigma_{23\tau}^{(s)} &= -a_{45} \frac{\partial U_\tau^{(s)}}{\partial \zeta} + a_{55} \frac{\partial V_\tau^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{23*}^{(s)},
\end{aligned} \tag{18}$$

The solution to the equation (13) is

$$\begin{aligned}
W^{(s)} &= W_0^{(s)} + W_\tau^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \\
\text{at } \frac{\Delta_1}{A_{33}} &> 0, \\
W_0^{(s)} &= D_5^{(s)} \cos \sqrt{\frac{\Delta_1}{A_{33}}} \Omega_* \zeta + D_6^{(s)} \sin \sqrt{\frac{\Delta_1}{A_{33}}} \Omega_* \zeta, \\
\sigma_{33}^{(s)} &= \sqrt{\frac{A_{33}}{\Delta_1}} \Omega_* \left(-D_5^{(s)} \sin \sqrt{\frac{\Delta_1}{A_{33}}} \Omega_* \zeta + D_6^{(s)} \cos \sqrt{\frac{\Delta_1}{A_{33}}} \Omega_* \zeta \right) + \sigma_{33\tau}^{(s)}, \\
\text{at } \frac{\Delta_1}{A_{33}} &< 0, \\
W_0^{(s)} &= D_5^{(s)} \operatorname{ch} \sqrt{\left| \frac{\Delta_1}{A_{33}} \right|} \Omega_* \zeta + D_6^{(s)} \operatorname{sh} \sqrt{\left| \frac{\Delta_1}{A_{33}} \right|} \Omega_* \zeta,
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\sigma_{33}^{(s)} = \sqrt{\frac{A_{33}}{\Delta_1}} \Omega_* \left(D_5^{(s)} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\Delta_1}{A_{33}}} \Omega_* \zeta + D_6^{(s)} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\Delta_1}{A_{33}}} \Omega_* \zeta \right) + \sigma_{33\tau}^{(s)}, \quad (20)$$

$$\sigma_{33\tau}^{(s)} = \frac{1}{\Delta_1} \left(A_{33} \frac{\partial W_\tau^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{33*}^{(s)} \right),$$

The general solution of the external problem contains 6 yet unknown functions $D_1^{(s)}(\xi, \eta) - D_6^{(s)}(\xi, \eta)$, which are uniquely determined using boundary conditions (3), (4).

3. The satisfaction of the boundary conditions

Using solutions (16), (17), (18), (19), (20) we will satisfy the boundary conditions (3), (4). Satisfaction of boundary conditions (3) with respect to σ_{xz}, σ_{yz} and condition (4) relatively to u, v leads to the solution of the algebraic system

$$\begin{aligned} D_1^{(s)} d_{11} c_1 - D_2^{(s)} d_{11} c_2 + D_3^{(s)} d_{12} c_3 - D_4^{(s)} d_{12} c_4 &= -\sigma_{13*}^{(s)}(\zeta = 1) \\ D_1^{(s)} d_{21} c_1 - D_2^{(s)} d_{21} c_2 + D_3^{(s)} d_{22} c_3 - D_4^{(s)} d_{22} c_4 &= -\sigma_{23*}^{(s)}(\zeta = 1) \\ D_1^{(s)} c_2 - D_2^{(s)} c_1 + D_3^{(s)} c_4 - D_4^{(s)} c_3 &= -U_\tau^{(s)}(\zeta = -1) \\ D_1^{(s)} d_1 c_2 - D_2^{(s)} d_1 c_1 + D_3^{(s)} d_2 c_4 - D_4^{(s)} d_2 c_3 &= -V_\tau^{(s)}(\zeta = -1) \end{aligned} \quad (21)$$

where

$$c_1 = \sin b_1 \Omega_*, \quad c_2 = \cos b_1 \Omega_*, \quad c_3 = \sin b_2 \Omega_*, \quad c_4 = \cos b_2 \Omega_*$$

by Cramer's formula

$$D_j^{(s)} = \frac{\Delta_j^{(s)}}{\Delta}, \quad j=1,2,3,4 \quad (22)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} d_{11} c_1 & d_{11} c_2 & d_{12} c_3 & d_{12} c_4 \\ d_{21} c_1 & d_{21} c_2 & d_{22} c_3 & d_{22} c_4 \\ c_2 & c_1 & c_4 & c_3 \\ d_1 c_2 & d_1 c_1 & d_2 c_4 & d_2 c_3 \end{vmatrix} = (d_2 - d_1)(d_{11} d_{22} - d_{12} d_{21}) \cos 2b_1 \Omega_* \cos 2b_2 \Omega_*$$

$\Delta_j^{(s)}$ is obtained from Δ by replacing j -th column with column from free terms $j=1,2,3,4$.

According to (22) we have

$$\begin{aligned} D_1^{(s)} &= \frac{\sin b_1 \Omega_*}{\delta_1} \left(d_{12} \sigma_{23*}^{(s)}(\zeta = 1) - d_{22} \sigma_{13*}^{(s)}(\zeta = 1) \right) + \\ &+ \frac{\cos b_1 \Omega_*}{\delta_2} \left(d_2 U_\tau^{(s)}(\zeta = -1) - V_\tau^{(s)}(\zeta = -1) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2^{(s)} &= \frac{\cos b_1 \Omega_*}{\delta_1} \left(d_{12} \sigma_{23}^{(s)}(\zeta=1) - d_{22} \sigma_{13}^{(s)}(\zeta=1) \right) + \\
&\quad + \frac{\sin b_1 \Omega_*}{\delta_2} \left(d_2 U_\tau^{(s)}(\zeta=-1) - V_\tau^{(s)}(\zeta=-1) \right), \\
D_3^{(s)} &= \frac{\sin b_2 \Omega_*}{\delta_3} \left(d_{21} \sigma_{13}^{(s)}(\zeta=1) - d_{11} \sigma_{23}^{(s)}(\zeta=1) \right) + \\
&\quad + \frac{\cos b_2 \Omega_*}{\delta_4} \left(-d_1 U_\tau^{(s)}(\zeta=-1) + V_\tau^{(s)}(\zeta=-1) \right), \quad (23) \\
D_4^{(s)} &= \frac{\cos b_2 \Omega_*}{\delta_3} \left(d_{21} \sigma_{13}^{(s)}(\zeta=1) - d_{11} \sigma_{23}^{(s)}(\zeta=1) \right) + \\
&\quad + \frac{\sin b_2 \Omega_*}{\delta_4} \left(-d_1 U_\tau^{(s)}(\zeta=-1) + V_\tau^{(s)}(\zeta=-1) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= (d_{11} d_{22} - d_{12} d_{21}) \cos 2b_1 \Omega_*, \quad \delta_2 = (d_1 - d_2) \cos 2b_1 \Omega_* \\
\delta_3 &= (d_{11} d_{22} - d_{12} d_{21}) \cos 2b_2 \Omega_*, \quad \delta_4 = (d_1 - d_2) \cos 2b_2 \Omega_*
\end{aligned}$$

At $\cos 2b_1 \Omega_* = 0$ or $\cos 2b_2 \Omega_* = 0$ the resonance will occur. The resonant frequencies are

$$\Omega = \frac{1}{hb_1 \sqrt{\rho}} \frac{\pi}{4} (2n+1), \quad \Omega = \frac{1}{hb_2 \sqrt{\rho}} \frac{\pi}{4} (2n+1), \quad n \in N, \quad (24)$$

Using (18), (20) and satisfying to conditions (3), (4) relatively we will obtain the system

$$D_5^{(s)} c_5 + D_6^{(s)} c_6 = -W^{+(s)} - W_\tau^{(s)}(\zeta=1) \quad (25)$$

$$D_5^{(s)} c_5 - D_6^{(s)} c_6 = -W_\tau^{(s)}(\zeta=-1) \sigma_{zz}, \quad w,$$

from which is follows

$$c_5 = \cos \sqrt{\frac{\Delta_1}{A_{33}}} \Omega_*, \quad c_6 = \sin \sqrt{\frac{\Delta_1}{A_{33}}} \Omega_*, \quad \text{at } \frac{\Delta_1}{A_{33}} > 0 \quad (26)$$

$$c_5 = \operatorname{ch} \sqrt{\left| \frac{\Delta_1}{A_{33}} \right|} \Omega_*, \quad c_6 = \operatorname{sh} \sqrt{\left| \frac{\Delta_1}{A_{33}} \right|} \Omega_*, \quad \text{at } \frac{\Delta_1}{A_{33}} < 0 \quad (27)$$

$$D_5^{(s)} = \frac{1}{2c_5} \left(-W^{+(s)} - W_\tau^{(s)}(\zeta=1) - W_\tau^{(s)}(\zeta=-1) \right), \quad (28)$$

$$D_6^{(s)} = \frac{1}{2c_6} \left(-W^{+(s)} - W_\tau^{(s)}(\zeta=1) + W_\tau^{(s)}(\zeta=-1) \right),$$

The resonant frequencies according to (26) are:

$$\Omega = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{A_{33}}{\rho \Delta_1}} \frac{\pi}{2} (2n+1), \quad \Omega = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{A_{33}}{\rho \Delta_1}} \pi n, \quad n \in \mathbb{N}$$

At (27) there is no resonance.

4. On mathematically precise solutions

As it was stated above, if W^+ is an algebraic polynomial, the iteration terminates at the certain approximation, depending on the degree of the polynomial, as a result the solution becomes mathematically exact. Let illustrates this when:

$$W^+ = a_0 + a_1 \xi + a_2 \eta \quad (30)$$

At $s = 0$, according to formulas (10), (16), (17), (18), (19) we will have:

$$U^{(0)} = 0, \quad V^{(0)} = 0, \quad \sigma_{13}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{23}^{(0)} = 0$$

$$W^{(0)} = -W^+ \left(\frac{\bar{c}_5}{2c_5} + \frac{\bar{c}_6}{2c_6} \right)$$

$$\bar{c}_5 = \cos \sqrt{\frac{\Delta_1}{A_{33}}} \Omega_* \zeta, \quad \bar{c}_6 = \sin \sqrt{\frac{\Delta_1}{A_{33}}} \Omega_* \zeta, \quad (31)$$

$$\sigma_{11}^{(0)} = -\frac{A_{31} W^+}{\Delta_1} \phi_1(\zeta), \quad \sigma_{22}^{(0)} = -\frac{A_{32} W^+}{\Delta_1} \phi_1(\zeta),$$

$$\sigma_{33}^{(0)} = -\frac{A_{33} W^+}{\Delta_1} \phi_1(\zeta), \quad \sigma_{12}^{(0)} = -\frac{A_{34} W^+}{\Delta_1} \phi_1(\zeta),$$

$$\phi_1(\zeta) = \frac{\Omega_*}{2} \sqrt{\frac{\Delta_1}{A_{33}}} \left(\frac{\bar{c}_5}{c_6} - \frac{\bar{c}_6}{c_5} \right),$$

At $s = 1$ we will have:

$$U^{(1)} = D_1^{(1)} \cos b_1 \Omega_* \zeta + D_2^{(1)} \sin b_1 \Omega_* \zeta + D_3^{(1)} \cos b_2 \Omega_* \zeta + D_4^{(1)} \sin b_2 \Omega_* \zeta + U_\tau^{(1)},$$

$$V^{(1)} = D_1^{(1)} d_1 \cos b_1 \Omega_* \zeta + D_2^{(1)} d_1 \sin b_1 \Omega_* \zeta + D_3^{(1)} d_2 \cos b_2 \Omega_* \zeta + D_4^{(1)} d_2 \sin b_2 \Omega_* \zeta + V_\tau^{(1)}, \quad (32)$$

$$\sigma_{13}^{(1)} = \frac{1}{\Delta_2} (D_1^{(1)} d_{11} \sin b_1 \Omega_* \zeta - D_2^{(1)} d_{11} \cos b_1 \Omega_* \zeta + D_3^{(1)} d_{12} \sin b_2 \Omega_* \zeta - D_4^{(1)} d_{12} \cos b_2 \Omega_* \zeta)$$

$$\sigma_{23}^{(1)} = \frac{1}{\Delta_2} (D_1^{(1)} d_{21} \sin b_1 \Omega_* \zeta - D_2^{(1)} d_{21} \cos b_1 \Omega_* \zeta + D_3^{(1)} d_{22} \sin b_2 \Omega_* \zeta - D_4^{(1)} d_{22} \cos b_2 \Omega_* \zeta)$$

$$\mathbf{W}^{(1)} = 0, \sigma_{11}^{(1)} = 0, \sigma_{22}^{(1)} = 0, \sigma_{33}^{(1)} = 0, \sigma_{12}^{(1)} = 0,$$

$$\mathbf{U}_\tau^{(1)} = \frac{k_1}{k_2} \begin{pmatrix} \bar{c}_6 - \bar{c}_5 \\ c_5 - c_6 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V}_\tau^{(1)} = 2 \left[\frac{k_1}{k_2 a_{45}} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ A_{33} \end{pmatrix} - a_{55} \right] + \frac{1}{\Delta_1 \Omega_*^2} \left(\frac{k_1 a_{55}}{k_2 a_{44}} + \frac{\Delta_2 \Omega_*^2}{2 \Delta_1} \sqrt{\frac{\Delta_1}{A_{33}}} (A_{34} a_1 + A_{32} a_2) - \frac{\Omega_*}{2} \sqrt{\frac{\Delta_1}{A_{33}}} (a_{55} a_2 - a_{45} a_1) \right) \left] \text{ctg} 2 \sqrt{\frac{\Delta_1}{A_{33}}} \Omega_* \zeta,$$

$$k_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Delta_1}{A_{33}}} \left((A_{31} a_1 + A_{34} a_2) \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1} - \frac{a_{55}}{A_{33}} \right) - a_{45} (A_{34} a_1 + A_{32} a_2) \right),$$

$$k_2 = \Omega_* \left(\frac{\Delta_1}{A_{33}} \left(\frac{\Delta_1}{A_{33}} - a_{44} - a_{55} \right) + \Delta_2 \right),$$

$$D_1^{(1)} = \frac{\text{sin} b_1 \Omega_*}{\delta_1} (d_{12} (a_{55} a_2 - a_{45} a_1) - d_{22} (a_{44} a_1 - a_{45} a_2)) + \frac{\text{cos} b_1 \Omega_*}{\delta_2} (d_2 \mathbf{U}_\tau^{(1)} (\zeta = -1) - \mathbf{V}_\tau^{(1)} (\zeta = -1)),$$

$$D_2^{(1)} = \frac{\text{cos} b_1 \Omega_*}{\delta_1} (d_{12} (a_{55} a_2 - a_{45} a_1) - d_{22} (a_{44} a_1 - a_{45} a_2)) + \frac{\text{sin} b_1 \Omega_*}{\delta_2} (d_2 \mathbf{U}_\tau^{(1)} (\zeta = -1) - \mathbf{V}_\tau^{(1)} (\zeta = -1)),$$

$$D_3^{(1)} = \frac{\text{sin} b_2 \Omega_*}{\delta_3} (d_{21} (a_{44} a_1 - a_{45} a_2) - d_{11} (a_{55} a_2 - a_{45} a_1)) + \frac{\text{cos} b_2 \Omega_*}{\delta_4} (-d_1 \mathbf{U}_\tau^{(1)} (\zeta = -1) + \mathbf{V}_\tau^{(1)} (\zeta = -1)),$$

$$D_4^{(1)} = \frac{\text{cos} b_2 \Omega_*}{\delta_3} (d_{21} (a_{44} a_1 - a_{45} a_2) - d_{11} (a_{55} a_2 - a_{45} a_1)) + \frac{\text{sin} b_2 \Omega_*}{\delta_4} (-d_1 \mathbf{U}_\tau^{(1)} (\zeta = -1) + \mathbf{V}_\tau^{(1)} (\zeta = -1)),$$

The iteration breaks at the approximation $s = 1$, as a result we will have the exact solution.

$$\begin{aligned} w &= l W^{(0)} \exp(i \Omega t), \quad \sigma_{xx} = \varepsilon^{-1} \sigma_{11}^{(0)} \exp(i \Omega t), \quad \sigma_{yy} = \varepsilon^{-1} \sigma_{22}^{(0)} \exp(i \Omega t), \\ \sigma_{zz} &= \varepsilon^{-1} \sigma_{33}^{(0)} \exp(i \Omega t), \quad \sigma_{xy} = \varepsilon^{-1} \sigma_{12}^{(0)} \exp(i \Omega t), \end{aligned} \quad (33)$$

$$u = hU^{(1)} \exp(i\Omega t), \quad v = hV^{(1)} \exp(i\Omega t),$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{13}^{(1)} \exp(i\Omega t), \quad \sigma_{yz} = \sigma_{23}^{(1)} \exp(i\Omega t)$$

Conclusions

The asymptotic solution of mixed dynamic 3D problem for plate having a plane of elastic symmetry is obtained. It is assumed, that the facial surface of the plate is subjected the normal displacements, which changed harmonically over time, and the lower edge of the plate is rigidly fixed. By switching to dimensionless coordinates and displacement in the basic equations and elasticity relations (13 independent constants of elasticity), the system of differential equations singularly perturbed by a small parameter was obtained, which was solved by an asymptotic method. All components of the stress tensor and displacement vector, as well as the values of resonant frequencies were determined. It was shown, that in similar classes of problems, the dominant role played longitudinal oscillations in the vertical direction and the amplitudes of shear oscillations are an order smaller.

References

1. Dielesan E., Royer D. (1982). Elastic waves in solids. (in Russ.) Moscow: Nauka 424 p.
2. Lekhnitsky S.G. (1977). Theory of Elasticity of Anisotropic Body. Moscow: Nauka. 416 p.
3. Reissner E. (1944). On the theory of bending of elastic plates. J. Math. and Phys. 23. pp.184-191.
4. Reissner E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J. of Appl. 12. pp. 69-77.
5. Ambartsumyan S.A. (1967). Theory of Anisotropic Plates. (in Russ.) Nauka. Moscow
6. Pelekh B.L.(1973). Theory of Shells with Finite Shear Stiffness. (in Russ.). Naukova Dumka. Kiev
7. Friedrichs K.O. (1955) Asymptotic Phenomena in Mathematical Physics. //Bull. Amer. Math. Soc. Vol.61. P.485.
8. Friedrichs K.O. and Dressler R.F. (1961). A Boundary-Layer Theory for Elastic Plates.// Comm. Pure and Appl. Math. Vol. 14. №1.P. 114-122.
9. Goldenweiser A.L.(1962) Derivation of an Approximate Theory of Bending of a Plate by the Method of Asymptotic Integration of the Equations of the Theory of Elasticity // J. Appl. Math. Mech. Vol. 26. Issue. 4. P. 1000-1025 .
10. Goldenweiser A.L. (1976) Theory of Thin Elastic Shells. Moscow: Nauka. 512 p.
11. Green A.E. (1962). On the Linear Theory of Thin Elastic Shells // Proc. Roy. Soc. Ser. A.. Vol. 266. №1325. P. 143-161.
12. Green A.E. (1962). Boundary layer equations in the linear theory of thin elastic shells.// Proc. Roy. Soc. Ser. A. Vol. 269.- №1339.
13. Aghalovyan L.A. (2015). Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore. World Scientific Publishing. 376 p. (Russian Edition: Moscow, Nauka, Fizmatlit. 1997. 414 p.)
14. Aghalovyan L.A. (1982). On the Structure of Solution of One Class of Plane Problems of the Theory of Elasticity of Anisotropic Body //The Inter-Universities Collection Mechanics: Yerevan: Publishing House of Yerevan State University. Issue 2. P. 7-12.
15. Agalovyan L.A.(2004). On asymptotic method in the solution of static and dynamic boundary value problems. Proc. of NAS of Armenia, Mechanics 57, 4, pp. 3-14.

16. Aghalovyan L.A., Gevorkyan R.S. (2005). Non-Classical Boundary Value Problems of Anisotropic Layered Beams, Plates and Shells.- Yerevan: Publishing House "Gitutyun" of NAS RA. 468 p.
17. Agalovyan L.A.(2009) Asymptotic theory of deformable thin-walled systems. (in Russ.): Proceedings of the International School – Conference of Young Scientists. Yerevan. Publishing House of National Yerevan State University of Architecture and Construction, 2009. pp.5-35.
18. Agalovyan L.A.(2010). An asymptotic method of boundary-value problems solution of elasticity theory for thin bodies. Proc. of the Symposium: Recent Advances in Mechanics. Athens. pp.9-26.
19. Aghalovyan M.L., Zakaryan T.V. (2019). Asymptotic Solution of the First 3D Dynamic Elasticity Theory Problem on Forced Vibrations of a Three-Layer Plate with an Asymmetric Structure // Mechanics of Composite Materials. Vol. 55. № 1. P. 3-18 .
20. Aghalovyan L.A., Aghalovyan M.L., Zakaryan T.V. (2020). Asymptotic Analysis of the Forced Oscillations of Double-Layered Plates with Viscous Resistance. //Mechanics of Solids. Vol.55. №5. P.1062-1070.
21. Timoshenko S.P. and Goodier J.N. (1970). Theory of Elasticity, McGraw-Hill, NewYork.

Information about the authors:

Aghalovyan Lenser Abgar- Dr. of Sc., Professor, Head of Department of Thin-Walled Systems, Institute of Mechanics of NAS Armenia
 Marshal Bagramyan ave.24/2, 0019, Yerevan, Armenia
 Tel.(+37410)529630, E-mail: lagal@sci.am

Aghalovyan Mher Lenser- Dr. of Sc., Lecturer, Armenian State University of Economics, Leading Researcher, Institute of Mechanics of NAS Armenia,
 Nalbandyan St. 128, 025 Yerevan, Armenia
 Tel.(+37493)055070, E-mail: mheraghalovyan@yahoo.com

Zakaryan Tatevik Vladik-PhD, Researcher, Institute of Mechanics of NAS Armenia,
 Marshal Bagramyan ave.24/2, 0019, Yerevan, Armenia
 Tel.(+37494)638882, E-mail: zaqaryantatevik@mail.ru

Tovmasyan Artur Babken- PhD, Researcher, Institute of Mechanics of NAS Armenia,
 Marshal Bagramyan ave.24/2, 0019, Yerevan, Armenia
 Tel.(+37497)319999, E-mail: Tovmasyanarthur01@gmail.com

Received 05.02.2026

On Stiffened Composite Multilayer Cylindrical Shells
Alam M.F., Banafshi A., Moriel C., Hasanyan D.J., Hasanyan A.D.

Keywords: Cylindrical shell, Stability, Reinforced anisotropic shell.

Մ.Փ.Ալամ, Ա.Բանաֆշի, Ս.Մորիել, Դ.Դ.Բ.Ասանյան, Ա.Դ.Բ.Ասանյան
Об усиленных многослойных цилиндрических оболочках из композитных материалов

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, устойчивость, усиленная анизотропная оболочка

Выведены уравнения для анализа колебаний/потери устойчивости цилиндрической композитной оболочки, состоящей из нескольких ортотропных слоев и усиленной эксцентрическими ребрами жесткости, под действием осевого сжатия, бокового давления и/или их комбинации, на основе теории Сандерса-Койтера. Нагрузки, вызывающие потерю устойчивости, получены с использованием теорий оболочек Сандерса-Койтера, Лява и Доннелла. Для дальнейшего представления теорий оболочек для определения нагрузки, вызывающей потерю устойчивости, рассмотрен следующий случай: перекрестно-слоистая конструкция из N , нечетно (симметрично) слоистых, ортотропных слоев. В некоторых случаях выведена аналитическая формула для нагрузки, вызывающей потерю устойчивости упрочненной изотропной цилиндрической оболочки, когда отношение основных жесткостей слоя равно 1. Из-за вариаций геометрических и физических параметров в теории, представление значимых общих результатов затруднено.

Три упомянутые выше теории сравниваются для нагрузок, вызывающих потерю устойчивости, в зависимости от расстояния между ребрами жесткости (кольцевыми ребрами жесткости). Показано, что упомянутые теории дают разные значения нагрузок, вызывающих потерю устойчивости. В некоторых случаях расхождение может достигать ~25%. Приводятся другие конкретные численные примеры для иллюстрации применения предложенной теории и выведенных аналитических формул для нагрузок, вызывающих потерю устойчивости. Кроме того, полученные здесь результаты сравниваются с аналогичными, ранее опубликованными, работами.

Ալամ Մ.Փ., Բանաֆշի Ա., Մորիել Ս., Հասանյան Դ.Դ., Հասանյան Ա.Դ.
Ուժեղացված կոմպոզիտային բազմաշերտ գլանային թաղանթների մասին

Հիմնաբառեր` գլանային թաղանթ, կայունություն, ուժեղացված անիզոտրոպ թաղանթ

Սանդերս-Կոյտերի տեսության հիման վրա դուրս են բերված հավասարումներ առանցքային սեղման, կողային ճնշման կամ նրանց կոմբինացիայի ազդեցության տակ զանվող մի քանի օրթոտրոպ շերտերից կազմված գլանային կոմպոզիտ թաղանթի տասանումների/կայունության կորստի ուսումնասիրման համար: Կայունության կորստի բերող բեռները ստացվել են սպերի Սանդերս-Կոյտերի, Լյավի և Դոնելի տեսությունների հիման վրա: Կայունության կորստի բերող բեռների որոշման սպերի տեսությունների հետագա ներկայացնելու նպատակով դիտարկվել է հետևյալ դեպքը` N կենտ (համաչափ) շերտավոր օրթոտրոպ շերտերից կազմված խաչաձև շերտավոր կոմպոզիտ: Որոշ դեպքերում ուժեղացված իզոտրոպ գլանային թաղանթի, երբ շերտի հիմնական կոշտությունների հարաբերությունը հավասար է 1: Կայունության կորստի բերող բեռի հաշվարկման համար ստացվել է անալիտիկ բանաձև: Տեսության երկրաչափական և ֆիզիկական պարամետրերի փոփոխման լայն տիրույթի պատճառով նշանակալի ընդհանուր արդյունքների ներկայացումը դժվարություն է հարուցում:

Վերը նշված երեք տեսությունները համեմատվում են կայունության կորստի բերող բեռների համար` կախված կոշտության կողերի հեռավորությունից: Ցույց է տրված, որ նշված տեսությունները կայունության կորստի բերող բեռների տարբեր արժեքներ: Որոշ դեպքերում այն կարող է հասնել ~25%:

Բերված են այլ կոնկրետ թվային օրինակներ ցուցադրելու առաջարկված տեսության և արտածված անալիտիկ բանաձևերի կիրառության կայունության կորստի բերող բեռների համար: Ստացված արդյունքները համեմատվում են նախկինում ստացված աշխատանքների արդյունքների հետ:

Equations are derived for vibration/buckling analyses of a circular cylindrical shell with multiple orthotropic layers and eccentric stiffeners acting under axial compression, lateral pressure, and/or combinations based on Sanders-Koiter theory. Buckling loads are obtained using Sanders-Koiter, Love, and Donnell shell theories. To further demonstrate the shell theories for buckling load, the following case has been discussed: Cross-Ply with N odd (symmetric) laminated orthotropic layers. For certain cases the analytical buckling loads formula is derived for the stiffened isotropic cylindrical shell, when the ratio of the principal lamina stiffness is $F = E_2 / E_1 = 1$. Due to the variations in geometrical and physical parameters in theory, meaningful general results are complicated to present.

The three theories mentioned above are compared for buckling loads versus stiffeners (ring stiffened) spacing. It is shown that mentioned theories give different values for buckling loads. In some cases, disagreements can approach ~25%.

Accordingly, other specific numerical examples are given to illustrate application of the proposed theory and derived analytical formulas for the buckling loads. Also, the results derived herein are then compared to similar published work.

Keywords: Cylindrical shell, Stability, Reinforced anisotropic shell.

Nomenclature

$$\mu_s = \frac{E_s A_s}{E_1 d_s h} (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \text{ - dimensionless stiffener rigidity}$$

$$\mu_r = \frac{E_r A_r}{E_1 d_r h} (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \text{ - dimensionless ring rigidity}$$

$$\eta_s = \frac{G_s A_s}{E_1 d_s h} (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \frac{J_s}{A_s L^2} \text{ - dimensionless torsional rigidity of stiffener}$$

$$\eta_r = \frac{G_r A_r}{E_1 d_r h} (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \frac{J_r}{A_r L^2} \text{ - dimensionless torsional rigidity of rings}$$

$$F = \frac{E_2}{E_1} \text{ - ratio of principal lamina stiffness}$$

$$R = \frac{1}{M+1} + \frac{8M(M-1)}{N^2(M+1)^3} \text{ - denoted expression}$$

$$M = \frac{\sum_{k=odd} h_k}{\sum_{k=even} h_k} \text{ - called the cross-ply ratio}$$

$$G = \frac{G_{12} (1 - \nu_{12} \nu_{21})}{E_1} \text{ - non-dimensional shear modulus}$$

$I_1 = \frac{I_s}{A_s L^2}$ - dimensionless moment of inertia for stiffeners

$I_2 = \frac{I_r}{A_r L^2}$ - dimensionless moment of inertia for rings

d_s - stiffener spacing

d_r - ring spacing

e_s - distance from stiffener centroid to shell reference surface, positive when stiffener is on outside

e_r - distance from rings centroid to shell reference surface, positive when rings are on outside;

h_k - thickness of k -th layer

E_1 and E_2 - Young's modulus of two perpendicular directions

ν_{12} and ν_{21} - Poisson's ratios

INTRODUCTION

It is well known that composite materials offer the potential for lighter weight and more efficient structures for various engineering applications. For instance, aerospace structures such as wings or fuselages are predominantly assemblies of shell structures. Pressure vessels are another common application where shell theory is applied in the design and subsequent fabrication of components. The analysis of composite shell structures has been of considerable interest to researchers due to the increasing use of composites in the design and construction of components in industry. The rise in use of composites in engineering applications can be directly attributed to the fact that composite designs produce lighter components than typical construction materials, with equal or greater strength and durability.

Shell theories developed for thin elastic shells are usually based on the Kirchhoff-Love hypothesis. Since ring stiffened composites have a low transverse shear modulus compared to isotropic materials, the Kirchhoff-Love hypothesis of non-deformable normal's is not strictly applicable for laminated, ring stiffened shell structures.

Leissa [16] provides an account and comparison of thirteen shell theories with proper assessment of both strain displacement relations and stress resultants.

In this paper, the theory accounting for rotation of shell elements around the mid-surface normal (Sanders-Koiter theory) is developed. In classic theories mentioned rotation is omitted for various reasons. If shells are stiffened local deformations can be created due to stiffeners. To capture local deformations (sometimes local buckling's due to stiffeners) without accountants of mid-surface normal can create significant disagreement between theoretical and realistic results.

The equations of motion and different aspects of stability and vibration of shells/plates have been discussed by many authors [1-34]. Recent bibliographies and review papers have also appeared in [14, 22, 32]. These theories involve the thinness assumption while still

retaining the first order, shear-deformation approximation through the shell thickness. Donnell's theory neglects the contribution of the transverse shearing force intensity to the equilibrium of forces in the circumferential direction, while the Sanders-Koiter and Love shell theories include it. For this reason, the Donnell's shell theory is often referred to as Donnell quasi-shallow shell equations. Love and Donnell shell theories do not include the contribution of transverse and axial displacement in the twist terms. In view of these differences, it is important to establish the accuracy of these shell theories for composite circular cylindrical shell or panels, where the material could be anisotropic.

Stability studies of curved cylindrical shells with isotropic geometry under pressure, shear, and axial compression have been reported by many authors (see Leissa [16], Rafel [24], Rafel & Sandlin [25]). Further literature revealed that Gerard and Becker [9], as well as Jones [12-13], developed an exact solution for the buckling of a circular cylindrical shell with multiple orthotropic layers and eccentric stiffeners under axial compression. This theory enables the study of coupling between bending and extensional forces due to the presence of different layers in the shell and the presence of eccentric stiffeners. Critical design incentives were presented by James and Whitley [23] on the buckling strength of longitudinally stiffened curved plates. The buckling coefficient of stiffened curved plates was determined in terms of buckling coefficient of flat plate with the same edge restraint as

$$k = k_{\infty} + \frac{1}{k_{\infty}} \frac{12}{\pi^4} \left(\frac{d_s^2 \sqrt{1-\nu^2}}{Rh} \right)^4,$$

where k_{∞} is a buckling coefficient of flat plate; d_s is a stiffener spacing.

Governing equations or the statics and dynamics of reinforced composite shells are developed based on Vlasov's semi-membrane shell theory by Birman [4-5]. These equations have closed-form solutions illustrated for buckling and free vibration problems. The buckling solution converges to the known result for unstiffened isotropic shells.

Semites [30] discussed the general instability of eccentrically stiffened thin cylindrical panels under the action of three types of applied loads. The three loads are uniform axial compression, uniform hoop compression or lateral pressure, and uniform shear. The analysis is based on a small deflection theory for orthotropic shells which includes effects of stiffener eccentricity; stiffener spacing is assumed to be sufficiently small (smeared technique), the stiffener geometry is taken to be uniform, and the skin-stiffener connection is assumed to be monolithic. Effects of stiffener eccentricity, panel aspect ratio, and the curvature parameter is shown in graphical form.

The theoretical buckling strength of long curved plates in compression was investigated by Baruch and Singer [1]. The plates considered were supported against lateral deflection along their unloaded edges and were elastically restrained against rotation along those edges; hence, the plates considered may be reasonably representative of plates found in actual structures. They suggested an equation for stiffened curved plates from computing the buckling strength of a corresponding stiffened flat plate using a method such as the method of moment distribution.

Design information is presented on the buckling strength of longitudinally stiffened curved plates (see Jaunky et al [11]). Design charts for determining the buckling strength of flat plates stiffened longitudinally along the Z-section stringers were given for the plate support and similarly stiffener to the curved plate.

McElman et al [18-19] extended the work to include the effect of stiffeners on vibration and flutter. Correlation between theory and experiment was reported for static buckling loads by Card and Jones [6].

Yi-Wei et al [34] presented axial buckling loads for a circular cylindrical shell with a laminate, using a special stacking sequence. This showed that differences exist in buckling loads between results obtained using Sanders' equations and Donnell's equations, for some values of the fiber winding angle. These buckling loads were not compared to results from an analysis which is independent of any shell theory.

A linear analysis method is presented for the elastic stability of structures with uniform cross section that may be idealized as an assembly of laminated plate-strips, flat and curved, and beams (see Viswanathan and Tamakun [33]). Each plate-strip and beam cover the entire length of the structure and is simply supported on the edges normal to the longitudinal axis. Arbitrary boundary conditions may be specified on any external longitudinal side of plate-strips. The structure or selected plate-strips may be loaded in any desired combination of in-plane biaxial loads. The analysis simultaneously considers all modes of instability and is applicable for the buckling of laminated composite structures. Some numerical results are presented to indicate possible applications.

The primary objective of the present paper is to assess the accuracy of Sanders-Koiter, Love, and Donnell shell theories for buckling analysis using an analytical approach. These shell theories are commonly used due to their simplicity. Buckling loads for laminated and isotropic circular cylindrical curved panels are obtained for different geometrical parameters.

GENERAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF STABILITY OF STIFFENED CYLINDRICAL SHELLS: SANDERS-KOITER APPROACH

In this paragraph, the stability equations of cylindrical shells based on Sanders-Koiter theory is introduced. Using standard procedures, kinematics expressions shown in previous paragraph and equilibrium equations for multilayer composites, the Sanders-Koiter type stability differential equations for circular cylindrical shells can be derived at the following form

$$L_{ij}(U_j) - 2\rho h \frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} = G_{ij}(U_j) \quad (1)$$

where $L_{ij}(\ast)$ are operators introduced below

$$L_{11}(\ast) = A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(2A_{16} - B_{16} \frac{c_2}{R} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \left(A_{66} - B_{66} \frac{c_2}{R} + D_{66} \frac{c_2}{4R^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2a)$$

$$L_{12}(\ast) = \left(A_{16} + \frac{3c_2}{2R} B_{16} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left[A_{12} + A_{66} + \frac{c_2}{R} (B_{12} + B_{66}) - \frac{c_2}{4R^2} D_{66} \right] \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \left(A_{26} + B_{26} \frac{c_2}{2R} - D_{66} \frac{c_2}{2R^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2b)$$

$$L_{13}(\ast) = \frac{A_{12}}{R} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{R} \left(A_{26} - B_{26} \frac{c_2}{R} \right) \frac{\partial}{\partial y} - B_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \left[B_{12} + 2B_{66} - \frac{c_2}{R} D_{66} \right] \frac{\partial^2}{\partial x \partial y^2} \\ + \left(D_{16} \frac{c_2}{2R} - 3B_{16} \right) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \left(D_{26} \frac{c_2}{2R} - B_{26} \right) \frac{\partial^3}{\partial y^3} \quad (2c)$$

$$L_{22}(\ast) = \left(A_{66} + \frac{3c_2}{R} B_{66} + \frac{9c_2}{4R^2} D_{66} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left[2A_{26} + \frac{9c_2}{2R} B_{26} + \frac{3c_2}{R^2} D_{26} \right] \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ + \left(A_{22} + 2B_{22} \frac{c_2}{R} + D_{22} \frac{c_2}{R^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2d)$$

$$L_{23}(\ast) = \frac{1}{R} \left(A_{26} + 3B_{26} \frac{c_2}{2R} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{R} \left(A_{22} + B_{22} \frac{c_2}{R} \right) \frac{\partial}{\partial y} \\ - \left(B_{16} + \frac{3c_2}{2R} D_{16} \right) \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \left(3B_{26} + 7D_{26} \frac{c_2}{2R} \right) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \\ - \left[B_{12} + 2B_{66} + \frac{c_2}{R} (D_{12} + 3D_{66}) \right] \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - \left(B_{26} + \frac{c_2}{R} D_{26} \right) \frac{\partial^3}{\partial y^3} \quad (2e)$$

$$L_{33}(\ast) = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \\ - 2 \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2 \frac{B_{22}}{R} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 4 \frac{B_{26}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{A_{22}}{R^2} \quad (2f)$$

$$L_{13} = L_{31}, \quad L_{23} = L_{32} \quad (2g)$$

Force operators $G_{ij}(\bullet)$ have the following form

$$G_{11}(\bullet) = -\frac{c_1 c_2}{4} \frac{\partial}{\partial y} \left[(N_{xx}^0 + N_{yy}^0) \frac{\partial(\bullet)}{\partial y} \right], \quad G_{12}(\bullet) = \frac{c_1 c_2}{4} \frac{\partial}{\partial y} \left[(N_{xx}^0 + N_{yy}^0) \frac{\partial(\bullet)}{\partial x} \right], \\ G_{21}(\bullet) = \frac{c_1 c_2}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left[(N_{xx}^0 + N_{yy}^0) \frac{\partial(\bullet)}{\partial y} \right], \\ G_{22}(\bullet) = \frac{c_2}{R^2} N_{yy}^0(\bullet) - \frac{c_1 c_2}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left[(N_{xx}^0 + N_{yy}^0) \frac{\partial(\bullet)}{\partial x} \right],$$

$$\begin{aligned}
G_{23}(\cdot) &= -\frac{c_2}{R} \frac{\partial}{\partial y} \left[N_{xx}^0 \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + N_{yy}^0 \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \right], \\
G_{32}(\cdot) &= -\frac{c_2}{R} \frac{\partial}{\partial x} (N_{xy}^0(\cdot)) - \frac{c_2}{R} \frac{\partial}{\partial y} (N_{yy}^0(\cdot)), \\
G_{33}(\cdot) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx}^0 \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + N_{xy}^0 \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy}^0 \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + N_{yy}^0 \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \right) \quad (3a-g)
\end{aligned}$$

where N_{xx}^0 , N_{yy}^0 and N_{xy}^0 are introduced initial stresses acting along corresponding directions.

Elements of matrixes A , B , and D are:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A_{11}^{shell} & A_{12}^{shell} & 0 \\ A_{12}^{shell} & A_{22}^{shell} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66}^{shell} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{E_s A_s}{d_s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_r A_r}{d_r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} D_{11}^{shell} & D_{12}^{shell} & 0 \\ D_{12}^{shell} & D_{22}^{shell} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^{shell} \end{vmatrix} \\
+ \begin{vmatrix} \frac{E_s}{d_s} (I_s^c + e_s^2 A_s) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_r}{d_r} (I_r^c + e_r^2 A_r) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G_s J_s}{d_s} + \frac{G_r J_r}{d_r} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

In above equations c_1 and c_2 coefficients introduced to implement different shell theories or strain-displacement relations (see also [11]).

Accordingly, when

- $c_1 = c_2 = 1$ the first approximation of Sander's- Koiter shell theory,
- $c_1 = 1, c_2 = 0$ Love's shell theory,
- $c_1 = c_2 = 0$ Donnell's Shell theory.

STABILITY OF ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL UNDER COMPRESSIVE FORCES

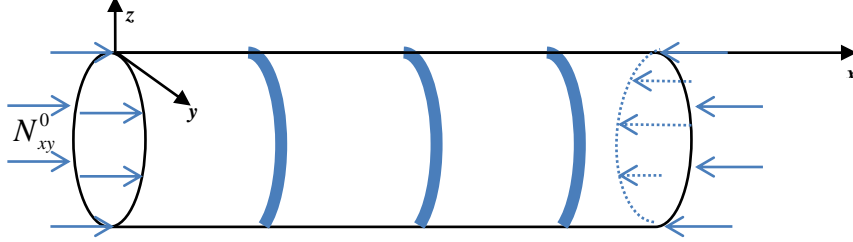


Figure 1: Orthotropic stiffened cylindrical shell under axial compressive loads.

Geometrical representation is given in Figure 1.

Let's $N_{xx}^{(0)} = -L_1 \tilde{p}$, $N_{yy}^{(0)} = -L_2 \tilde{p}$, and $N_{xy}^{(0)} = 0$, where L_1 and L_2 are some constants. Next, we will assume $A_{16} = A_{26} = 0$ and cylindrical shell is closed with simply supported boundary conditions on both edges: $x = 0$ and $x = L$.

Next the solutions of Equations (1) we will search in the following form

$$U_1 = \bar{u}_1 \cos\left(\frac{\pi mx}{L}\right) \cos\left(\frac{ny}{R}\right), \quad U_2 = \bar{u}_2 \sin\left(\frac{\pi mx}{L}\right) \sin\left(\frac{ny}{R}\right)$$

$$U_3 = \bar{u}_3 \sin\left(\frac{\pi mx}{L}\right) \cos\left(\frac{ny}{R}\right)$$

with unknown coefficients $\bar{u}_i (i = 1, 2, 3)$. It is obvious that mentioned solutions satisfying simply supported boundary conditions. Inserting solutions $U_i(x, y) (i = 1, 2, 3)$ in to Eq (1) and averaging

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cdot) dx dy$$

the following algebraic equation can be obtained from (1) for the unknown coefficients $\bar{u}_i (i = 1, 2, 3)$

$$k_{ij} \bar{u}_j = \tilde{p} g_{ij} \bar{u}_j, (i = 1, 2, 3) \quad (4)$$

where

$$k_{11} = A_{11} \left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 + \left(A_{66} - B_{66} \frac{c_2}{R} + D_{66} \frac{c_2}{4R^2}\right) \left(\frac{n}{R}\right)^2 \quad (5a)$$

$$k_{13} = -\left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 \left[\frac{A_{12}}{R} + B_{11} \left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 + \left[B_{12} + 2B_{66} - \frac{c_2}{R} D_{66} \right] \right] \left(\frac{n}{R}\right)^2 \quad (5b)$$

$$k_{22} = \left(A_{66} + \frac{3c_2}{R} B_{66} + \frac{9c_2}{4R^2} D_{66} \right) \left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 + \left(A_{22} + 2B_{22} \frac{c_2}{R} + D_{22} \frac{c_2}{R^2} \right) \left(\frac{n}{R}\right)^2 \quad (5c)$$

$$k_{23} = \frac{n}{R} \left\{ \frac{1}{R} \left(A_{22} + B_{22} \frac{c_2}{R} \right) + \left[B_{12} + 2B_{66} + \frac{c_2}{R} (D_{12} + 3D_{66}) \right] \left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 + \left(B_{22} + \frac{c_2}{R} D_{22} \right) \left(\frac{n}{R}\right)^2 \right\} \quad (5d)$$

$$k_{33} = D_{11} \left(\frac{\pi m}{L}\right)^4 + D_{22} \left(\frac{n}{R}\right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 \left(\frac{n}{R}\right)^2 + 2\frac{B_{12}}{R} \left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 + 2\frac{B_{22}}{R} \left(\frac{n}{R}\right)^2 + \frac{A_{22}}{R^2} \quad (5e)$$

$$k_{23} = k_{32}, \quad k_{13} = k_{31}, \quad k_{12} = k_{21} \quad (5f)$$

$$g_{11} = \frac{c_1 c_2}{4} (L_1 + L_2) \left(\frac{n}{R}\right)^2, \quad g_{12} = \frac{c_1 c_2}{4} (L_1 + L_2) \left(\frac{n}{R}\right) \left(\frac{\pi m}{L}\right)$$

$$g_{22} = \frac{c_2 L_2}{R} + \frac{c_1 c_2}{4} (L_1 + L_2) \left(\frac{\pi m}{L}\right)^2, \quad g_{23} = \frac{c_2 L_2}{R} \left(\frac{n}{R}\right),$$

$$g_{33} = L_1 \left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 + L_2 \left(\frac{n}{R}\right)^2,$$

$$g_{23} = g_{32}, \quad g_{13} = g_{31}, \quad g_{12} = g_{21} = 0 \quad (6a-g)$$

Critical load \tilde{p} then can be determined from algebraic equations (4) assuming existence of nontrivial solutions

$$C_3 \tilde{p}^3 + C_2 \tilde{p}^2 - C_1 \tilde{p} + C_0 = 0 \quad (7)$$

where

$$C_0 = k_{33} (k_{11} k_{22} - k_{12} k_{21}) + k_{23} (k_{12} k_{23} - k_{22} k_{13}) + k_{13} (k_{12} k_{23} - k_{22} k_{13})$$

$$C_1 = g_{11} (k_{33} k_{22} - k_{23} k_{33}) + g_{22} (k_{11} k_{33} - k_{13} k_{31})$$

$$+ g_{33} (k_{11} k_{22} - k_{12} k_{21}) + 2g_{12} (k_{13} k_{23} - k_{12} k_{33}) + 2g_{23} (k_{12} k_{13} - k_{11} k_{23})$$

$$\begin{aligned}
C_2 &= k_{11}(g_{33}g_{22} - g_{23}g_{23}) + k_{22}(g_{11}g_{33}) \\
&+ k_{33}(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{12}) + 2g_{12}(k_{13}g_{23} - k_{12}g_{33}) - 2g_{11}(g_{23}k_{23}) \\
C_3 &= g_{11}g_{23}g_{23} - g_{33}(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{12}) \tag{8a-d}
\end{aligned}$$

Notice that the value's of c_1 and c_2 are only 0 or 1, respectively. In general (when $c_1 = 1, c_2 = 1$) the critical value for buckling load \tilde{p} is determined from 3th order algebraic equation (7). There are some particular cases when buckling load \tilde{p} is obtained from second order (when $C_3 = 0$) algebraic equation. In this case buckling load $\tilde{p} = \min\{\tilde{p}_1, \tilde{p}_2\}$ (if $\tilde{p}_1 > 0, \tilde{p}_2 > 0$), and $\tilde{p} = \tilde{p}_1$ (if $\tilde{p}_1 > 0, \tilde{p}_2 < 0$),

$$\text{where } \tilde{p}_{1,2} = \left(C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4C_0C_2} \right) / 2C_2.$$

When $C_3 = C_2 = 0$, buckling load \tilde{p} is determined as $\tilde{p} = C_0 / C_1$. Expression for C_3 can be simplified

$$C_3 = -4c_1c_2L_2(L_1 + L_2) \left[-4(c_2 - 1)L_2 + \pi^2L_1 \right] \tag{9}$$

From (9) it can be seen that $C_3 = 0$ in the following cases:

- 1) $c_1 = 0, c_2 = 0$ (Donnell's theory; in this case from (8c-d) it follows that not only $C_3 = 0$ but also $C_2 = 0$ and algebraic equation (7) is first order);
- 2) $c_1 = 0, c_2 = 1$;
- 3) $c_1 = 1, c_2 = 0$ (Love's theory);
- 4) $L_2 = 0$ (Axial compression);
- 5) $L_1 = -L_2$;
- 6) $L_1 = 0$.

PARTICULAR CASES

R. Jones Results

From formulae (7) Jones [12] results can be derived: stability criterion for stiffened orthotropic circular cylindrical shells. For that reason, we need to assume that $c_1 = c_2 = 0$, then $C_2 = C_3 = 0$. From (7) \tilde{p} can be obtained in the following way

$$\tilde{p} = \frac{C_0}{C_1} = \frac{1}{g_{33}} \left[k_{33} + k_{23} \frac{k_{13}k_{12} - k_{11}k_{23}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{12}} + k_{13} \frac{k_{12}k_{23} - k_{13}k_{22}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{12}} \right]$$

Results From Leissa [16]; Mikulas & McElman [20]

From formulae (7) Leissa [16] and Mikulas & McElman [20] results can be derived. Assuming a cylindrical shell is isotropic with Young's modulus E and Poisson's ratio ν , from (7) \tilde{p} can be obtained in the following way

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= \tilde{p} \left(\frac{m^2 L^2}{D\pi^2} \right) (\delta^2 L_2 + L_1) = m^4 (1 + \delta^2)^2 \\ &+ m^4 \left[\frac{E_s I_s}{Dd_s} + \delta^2 \left(\frac{G_s J_s}{Dd_s} + \frac{G_r J_r}{Dd_r} \right) + \delta^4 \frac{E_r I_r}{Dd_r} \right] \\ &+ \frac{12L^4 (1 - \nu^2)}{h^2 R^2} \left[\frac{1 + \bar{S}\Lambda_s + \bar{R}\Lambda_r + \bar{S}\bar{R}\Lambda_{rs}}{\Lambda} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

where,

$$\begin{aligned} \Lambda_s &= 1 + 2\lambda^2 (e_s / R) (\delta^2 - \nu) + \lambda^4 (e_s / R)^2 (1 + \delta^2)^2 \\ \Lambda_r &= 1 + 2n^2 (e_r / R) (1 - \delta^2 \nu) + n^4 (e_r / R)^2 (1 + \delta^2)^2 \\ \Lambda_{rs} &= \lambda^2 n^2 \left[\delta^2 (1 - \nu^2) + 2(1 + \nu) (e_s / R)^2 \right] + \\ &+ n^4 \left[1 - \nu^2 + 2\delta^2 (1 + \nu) (e_r / R)^2 \right] + 2n^2 (1 - \nu^2) (e_s / R)^2 + \\ &+ 2n^2 (1 - \nu^2) (e_r / R)^2 + 2n^4 (1 + \nu)^2 (e_s / R) (e_r / R) + 1 - \nu^2 \Lambda = \\ &= (1 + \delta^2)^2 + 2\delta^2 (1 + \nu) (\bar{R} + \bar{S}) + (1 - \nu^2) \left[\bar{S} + \delta^4 \bar{R} + 2\delta^2 \bar{S} \bar{R} (1 + \nu) \right] \\ \lambda &= \frac{\pi m R}{L}, \quad \bar{S} = \frac{E_s A_s}{E h d_s}, \quad \bar{R} = \frac{E_r A_r}{E h d_r} \\ \delta &= \frac{n}{\lambda} = \frac{n L}{\pi m R}, \quad D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \end{aligned}$$

Formulae (10) is consistent to Leissa's [16] notations.

NUMERICAL RESULTS AND DISCUSSION

Ring-Stiffened Circular Cylindrical Shell With Two Isotropic Layers Under Axial Compression

A specific numerical example is given to illustrate application of the theory. The results are compared to similar problems previously studied (see Jones [12]).

For example, the stability of a ring-stiffened circular cylindrical shell with two isotropic layers under axial compression is considered. The properties of the layers are

$$E_1 = 44 \times 10^6 \text{ psi}, \nu_1 = 0, t_1 = 0.04 \text{ in} \text{ and}$$

$$E_2 = 2 \times 10^6 \text{ psi}, \nu_2 = 0.4, t_2 = 0.3 \text{ in}$$

where t_1 and t_2 are the thickness of first and second layers. The rings are of rectangular cross section with a height of 0.25 in and a thickness of 0.06 in . The rings are on the inner surface of layer one, and have the same material properties as layer one. The shell has a length of $L = 12 \text{ in}$ and a radius of $R = 6 \text{ in}$ to the middle surface of layer one (which, in this case, is also the reference surface).

For comparison purposes the behavior of non-dimensional axial load $N_{xx}^0 / E_1 h$, ($h = t_1 + t_2$ is a total thickness of the shell) with respect of dimensionless ring spacing is shown in Figure 2 using Donnell's, Sanders and Love's theories (Red line illustrates Donnell's, blue line-Sander's, and gray line-Love's theories, respectively).

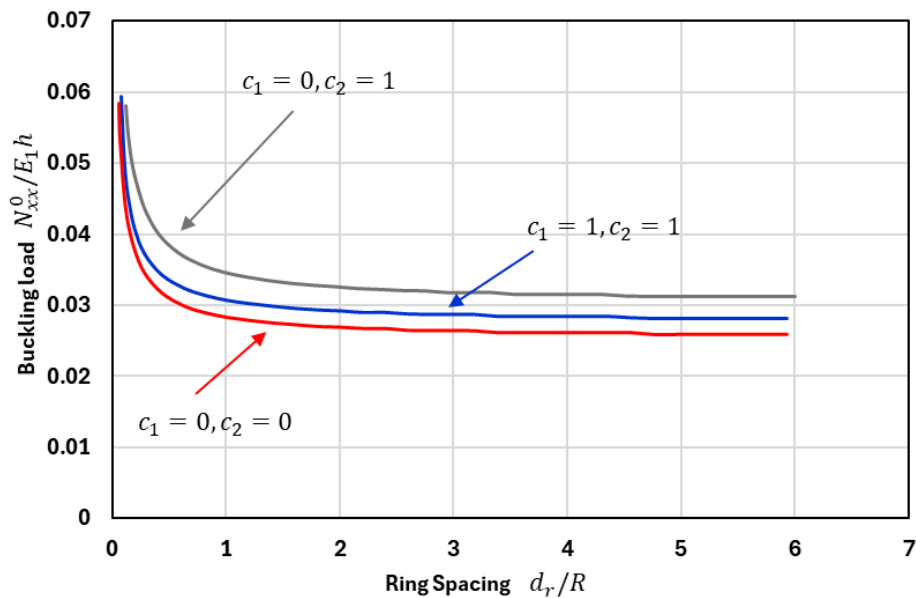


Figure 2: Buckling load of a ring-stiffened, two-layered circular cylindrical shell versus ring spacing. Red line-Donnell's theory; Blue line-Sander's theory; Gray line-Love's theory.

Each of these theories show a limiting level of buckling load with increasing ring spacing. The Sander's theory lies between Donnell's and Love's theories. In some cases, the difference between presented theories can approach as much as 5~30% (More investigation is needed for buckling load, versus modulus of elasticity of the ring, and ring spacing). Notice that red line is consistent to Jones [12] result calculated with a formula (25) in the mentioned work.

Isotropic Ring-Stiffened Circular Cylindrical Shell Under Axial Compression

The material properties of the shell are

$$E_1 = 44 \times 10^6 \text{ psi} \quad \nu_1 = 0 \quad h = t_1 = 0.34 \text{ in}$$

The rings are on the inner surface of the shell. The shell has a length of $L = 12 \text{ in}$ and a radius of $R = 6 \text{ in}$ to the middle surface of shell (which, in this case, is also the reference surface). Notice that red line is consistent to McElman's [19] result, calculated with a formula (33) in the mentioned work.

From Figure 3 it can be seen that for large values of ring spacing using Donnell's theory (red line, $c_1 = c_2 = 0$) and Love's theory (gray line, $c_1 = 0, c_2 = 1$), it provides a close value for critical buckling load. In some cases the difference between Donnell's, Sander's and Love's theories is $\sim 15\%$, which should be taken into account for determination of buckling load.

Based on Equations (3)–(8) some particular cases are considered the next.

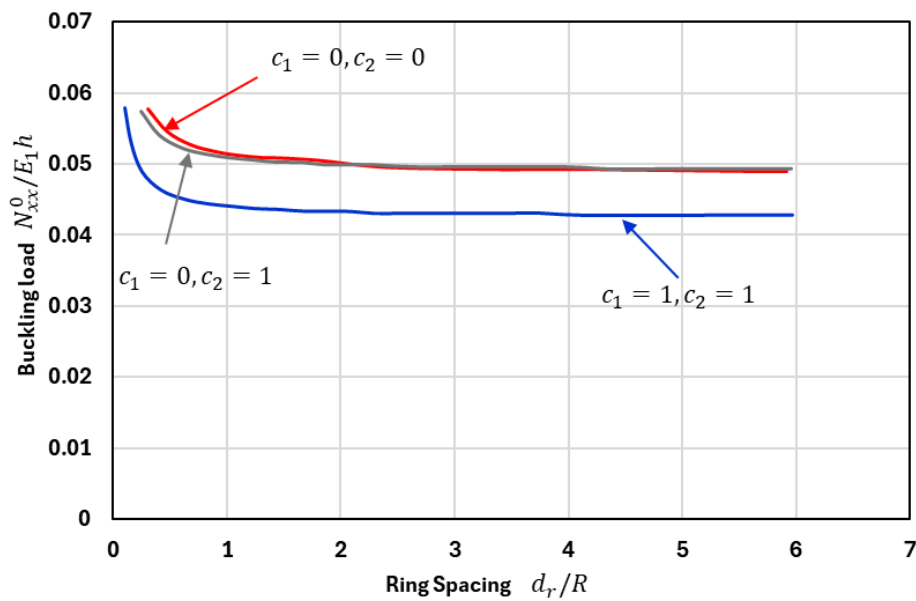


Figure 3: Buckling load of a ring-stiffened, isotropic circular cylindrical shell versus ring spacing. Red line-Donnell's theory; Blue line-Sander's theory; Gray line-Love's theory.

Cross -Ply with N odd (symmetric) Laminated Layers

A cross-ply laminate has N unidirectional reinforced layers with principal material directions oriented in an alternating manner at 0° and 90° to the laminate coordinate axes. The fiber direction of odd-numbered layers is the x direction of the laminate. The fiber direction of even-numbered layers is then the y direction of the laminate. Two geometrical

parameters are important: N , the total number of layers, and M , the ratio of the total thickness of odd-numbered layers to the total thickness of even-numbered layers (called the cross-ply ratio). Thus,

$$M = \sum_{k=odd} h_k / \sum_{k=even} h_k,$$

and the ratio of principal lamina stiffness

$$F = E_2 / E_1.$$

Following notations are given below:

$$\tilde{A}_{11} = \frac{M+F}{1+M} + \mu_s, \tilde{A}_{22} = \frac{1+MF}{1+M} + \mu_r, \tilde{A}_{12} = \nu_{12}F, \tilde{A}_{ij} = A_{ij}(1 - \nu_{12}\nu_{21}) / E_1 h$$

$$\tilde{B}_{11} = \frac{M(F-1)}{N(1+M)^2} h + \mu_s e_s, \quad \tilde{B}_{22} = -\frac{M(F-1)}{N(1+M)^2} h + \mu_r e_r,$$

$$\tilde{B}_{ij} = B_{ij}(1 - \nu_{12}\nu_{21}) / E_1 h,$$

$$\tilde{D}_{11} = \frac{h^2}{12} [R(F-1) + 1] + \mu_s e_s^2 + \mu_s I_1 L^2,$$

$$\tilde{D}_{22} = \frac{h^2}{12} [R(F-1) + 1] + \mu_r e_r^2 + \mu_r I_2 L^2,$$

$$\tilde{D}_{12} = \frac{h^2}{12} \nu_{12} F, \quad \tilde{D}_{66} = \frac{h^2}{12} G + (\eta_r + \eta_s) L^2$$

$$\tilde{D}_{12} = \frac{h^2}{12} \nu_{12} F, \quad \tilde{D}_{66} = \frac{h^2}{12} G + (\eta_r + \eta_s) L^2$$

$$\tilde{D}_{ij} = D_{ij}(1 - \nu_{12}\nu_{21}) / E_1 h$$

The expressions for k_{ij} can be simplified as

$$k_{ij} = \frac{L^2(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{E_1 h} \tilde{k}_{ij}$$

$$\tilde{k}_{11} = (\pi m)^2 \left(\frac{M+F}{M+1} + \mu_s \right) + n^2 \left(\frac{L}{R} \right)^2 G + c_2 \frac{1}{4} \left(\frac{L}{R} \right)^2 \left[\frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 G + \left(\frac{L}{R} \right)^2 (\eta_s + \eta_r) \right]$$

$$\tilde{k}_{12} = -(\pi mn) \frac{L}{R} \{ \nu_{12} F + G - c_2 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{h}{R} \right)^2 G + \left(\frac{L}{R} \right)^2 (\eta_s + \eta_r) \right] \}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{k}_{13} &= -(\pi m) \left\{ v_{12} F \frac{L}{R} + (\pi m) \left[\frac{M(F-1)h}{N(1+M)^2} \frac{h}{L} + \mu_s \frac{e_s}{L} \right] \right. \\
&\quad \left. - c_2 n^2 \left(\frac{L}{R} \right)^2 \left[\frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right) \left(\frac{h}{L} \right) G + \left(\frac{L}{R} \right) (\eta_s + \eta_r) \right] \right\} \\
\tilde{k}_{22} &= (\pi m)^2 \left\{ G + c_2 \frac{9}{4} \left(\frac{L}{R} \right)^2 \left[\frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 G + \left(\frac{L}{R} \right)^2 (\eta_s + \eta_r) \right] \right\} \\
&\quad + n^2 \left(\frac{L}{R} \right)^2 \left\{ -\frac{MF+1}{M+1} + \mu_r - 2c_2 \left[-\frac{M(F-1)h}{N(M+1)^2} \frac{h}{R} + \mu_r \frac{e_r}{R} \right] \right. \\
&\quad \left. + c_2 \left[\frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 (F+R-FR) + \mu_r \left(\frac{e_r}{R} \right)^2 + \mu_r I_2 \left(\frac{h}{R} \right)^2 \right] \right\} \\
\tilde{k}_{23} &= n \left(\frac{L}{R} \right)^2 \left\{ \frac{MF+1}{M+1} + \mu_r + c_2 \left[-\frac{M(F-1)h}{N(M+1)^2} \frac{h}{R} + \mu_r \frac{e_r}{R} \right] + \right. \\
&\quad \left. (\pi m)^2 n c_2 \left[\frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 v_{12} F + 3 \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 G + 3(\eta_s + \eta_r) \left(\frac{L}{R} \right)^2 \right] \right\} + \\
&\quad + n^3 \left(\frac{L}{R} \right)^2 \left\{ -\frac{M(F-1)h}{N(M+1)^2} \frac{h}{R} + \mu_r \frac{e_r}{R} + \right. \\
&\quad \left. + c_2 \left[\frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 (F+R-FR) + \mu_r \left(\frac{e_r}{R} \right)^2 + \mu_r I_2 \left(\frac{h}{R} \right)^2 \right] \right\} \\
\tilde{k}_{33} &= (\pi m)^4 \left\{ \frac{1}{12} \left(\frac{h}{L} \right)^2 (FR - R + 1) + \mu_s \left(\frac{e_s}{R} \right)^2 + \mu_s I_1 \right\} + \\
&\quad 2(\pi m)^2 n^2 \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 v_{12} F + 4(\pi m)^2 n^2 \left\{ \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 G + (\eta_s + \eta_r) \left(\frac{L}{R} \right)^2 \right\} \\
&\quad + n^4 \left(\frac{L}{R} \right)^2 \left\{ \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 (F+R-FR) + \mu_r \left(\frac{e_r}{R} \right)^2 + \mu_r I_2 \left(\frac{h}{R} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + 2n^2 \left(\frac{L}{R} \right)^2 \left[-\frac{M(F-1)h}{N(F+1)^2} \frac{h}{R} + \mu_r \frac{e_r}{R} \right] + \left(\frac{L}{R} \right)^2 \left[\frac{MF+1}{1+M} + \mu_r \right] \right\}
\end{aligned}$$

Numerical example is given to illustrate application of the theory for cross-ply laminated shells. For this example, the stability of a ring-stiffened circular cylindrical shell with two layers under axial compression is considered (we assume that $F = 2, M = 1, \nu_{12} = 0.25$). Parameters of stiffeners and rings are: $\mu_s = \eta_r = \eta_s = 0, e_r = 0.01, e_s = 0$. The rings are of rectangular cross section with a height of $0.25in$ and a thickness of $0.06in$. The shell has a length of $L = 12in$ and a radius of $R = 6in$ to the middle surface of layer one (which, in this case, is also the reference surface).

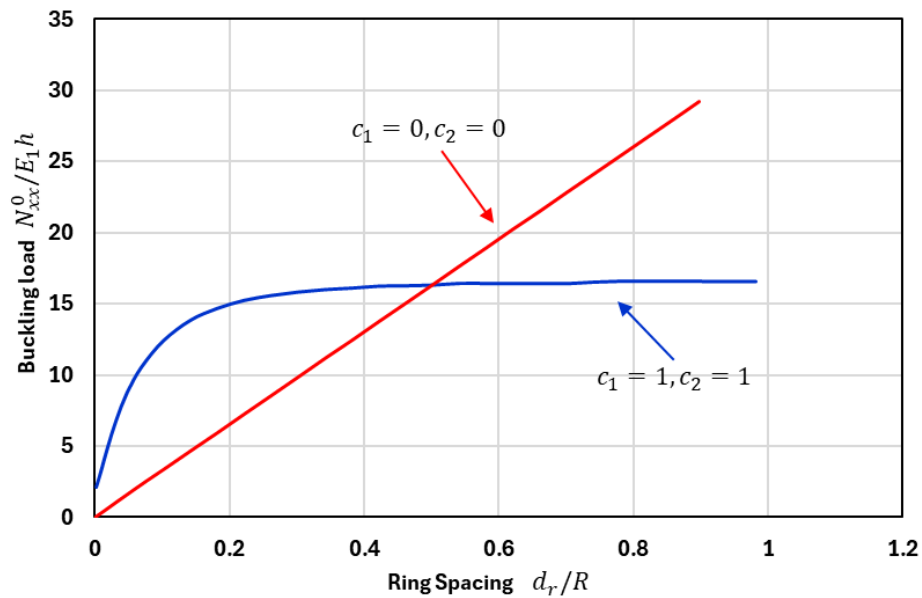


Figure 4: Buckling load of a ring-stiffened, cross-ply circular cylindrical shell versus ring rigidity. Red line-Donnell's theory; Blue line-Sander's theory.

Figure 4 provides the value of buckling load of a ring-stiffened, cross-ply circular cylindrical shell versus ring rigidity. Red line represents Donnell's theory, blue line-Sander's theory, and gray line-Love's theory for small values of rigidity of rings. From this numerical calculation it can be seen that buckling load is essentially different for different theories: Donnell's, Sander's and Love's, respectively. It is visible that Love's theory cannot provide values for critical buckling load for large values of rigidity of the rings.

SOME APPLICATIONS IN INDUSTRY

Composite vessel designs with unique features and attachments generally require reinforcement to increase the load carrying capacity for nozzle stresses and torsional loads; orthogonal stiffeners, thicker cross sections, and reinforcement layers are common to increase the load capacity. Analytical tools that allow each layer to have different elastic and material properties will be required to allow the composite designer to optimize using functionally graded material sets. Analysis approaches like those demonstrated will allow

future designers to match material properties to the design need. These techniques can also be used to analyze repairs and alterations to FRP (fiber reinforced plastic) vessels.

Stiffened cylindrical shells (vessels) have broad applications. For example, Space Shuttle external tank (stiffened cylindrical vessel) was designed for liquid hydrogen fuel and liquid oxygen oxidizer. Other applications of stiffened cylindrical vessels are in nuclear industry, for storing different types of nuclear and chemical components.

More complex designs and configurations with integral nozzles and stiffened cylindrical vessels require more sophisticated analysis tools and a design-by-stress type of analysis.

Note that stiffened cylindrical shells have tendency of local deformations (global and local buckling). Existing classical theories do not allow them to capture all mentioned deformations (especially the local deformations). Modified Sander's theory is a tool that can be used to design more complex vessels and get more accurate behavior of shells (stresses, strains, displacements) locally and globally.

CONCLUSION

The current study presents theoretical formulations of stability analysis for stiffened cylindrical shells. Theory is developed based on Sanders-Koiter assumptions. An example of buckling of stiffened cylindrical shell under axial compression loads demonstrated disagreements between various theories (Donnel, Love-Kirckhoff) compared with Sanders-Koiter assumptions. Buckling critical loads derived and demonstrated Buckling load variation versus rings spacing. Numerical examples are given to illustrate application of the proposed theory and analytically derived formulas comprised of buckling loads.

The results will be practical to investigate the behavior of the composite structures under different types of external factors (i.e. mechanical forces, thermal loads, earthquake etc). Thus, the results will predict a design life more accurately for composite vessels which is significantly greater than similar vessels constructed using current industry standards.

REFERENCES

1. Baruch, M., Singer, J., Effect of eccentricity of stiffeners on the general instability of stiffened cylindrical shells under hydrostatic pressure, *Journal of Mechanical Engineering Science*, 5, 1, pp. 23-27, 1963.
2. Batdorf, S.B. et al, Critical combinations of shear and longitudinal direct stress for long plates with transverse curvature. TN 1347, NACA, 1947.
3. Becker, H., Handbook of structural stability. Part VI-strength of stiffened curved plates and shells, TN 3786, NACA, 1958.
4. Birman, V., Extension of Vlasov's Semi-membrane Theory to Reinforced Composite Shells, *Transactions of the ASME*, 462/Vol. 59, JUNE 1992.
5. Birman, V., Thermal Dynamic Problems of Reinforced Composite Cylinders, *Journal of Applied Mechanics* DECEMBER, Vol. 57 / 941, 1990.
6. Card, M.F., Jones, R.M., Experimental and theoretical results for buckling of eccentrically stiffened cylinders, TN-D-3639, NASA, 1966.
7. Chandrashekara, K. Pavan Kumar, D. V.T.G., Assessment of shell theories for the static analysis of cross-ply laminated circular cylindrical shells, *Thin Walled Structures* 22, 291-318, 1995.
8. Donnell, L.H., A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending. *Trans ASME*, 56:795-806, 1934.

9. Gerard, G., Becker, H., Handbook of structural stability. Part III-Buckling of curved plates and shells, TN 3783, NACA, 1957.
10. James, P.P., and Ralph, O.W., Local buckling of longitudinally stiffened curved plates, NASA TECHNICAL NOTE D-750, 1961.
11. Jaunky, N., and Knight, Norman, F., Jr., An assessment of shell theories for buckling of circular cylindrical laminated composite panels loaded in axial compression. *Int. J. Solids and Structures*, 36 , 3799-3820, 1999.
12. Jones, R.M., Buckling of circular cylindrical shells with multiple orthotropic layers and eccentric stiffeners, *AIAA Journal*, v.6, 12, 1968, pp. 2301-2305.
13. Jones, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, McGraw-Hill (1975).
14. Knight, N.F., Starnes J.H., Developments in cylindrical shell stability analysis, Proceedings of the 38th AIAA/ASME/ASC/AHS/ASCE Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Kissimmee, Florida, April 1997, pp 1933-1947. Also AIAA Paper No AIAA-97-1076, 1997.
15. Koiter, W.T., A consistent first approximation in general theory of thin elastic shells. The theory of thin elastic shells, Proceedings IUTAM Symposium, Delft, North Holland, Amsterdam, The Netherlands, pp 12-33, 1959.
16. Leissa, A. W., *Vibration of Shells*. NASA SP-288 (1973).
17. Love, A.E.H., On the small free vibrations and deformations of the elastic shells, *Phil. Trans. R. Soc Lond. A* 17, 401-546, 1988.
18. McElman, J.A., Mikulas, M.M., Stein, M., Static and dynamic effects of eccentric stiffening of plates and cylindrical shells, *AIAA Journal*, 4, 5, pp.887-894, 1966.
19. McElman, J.A., Eccentrically stiffened Shallow shells of double curvature., NASA-TN-D-3826, February 1967.
20. Mikulas, M.M., McElman, J.A., On free vibrations of eccentrically stiffened cylindrical shells and flat plates, NASA-TN-D-3010, Sept., 1965.
21. Nemeth M.P. Nondimensional parameters and equations for buckling of anisotropic shallow shells, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 61, 664-669, 1994.
22. Nemeth M.P., A Leonard-Sanders-Budiansky-Koiter-Type Nonlinear Shell Theory with a Hierarchy of Transverse-Shearing Deformations, NASA/TP-2013-218025, July, 2013.
23. Noor A.K., Bibliography of monographs and surveys on shells, *Applied Mechanics Review* 43 (9), 1990.
24. Peterson, J.P., and Whitley, R.O., Local Buckling of Longitudinally Stiffened Curved Plates, NASA, TN D-750, 1961.
25. Rafel, N., Effect of normal pressure on the critical compressive stress of curved sheet. WRL-258, NACA, 1942.
26. Rafel, N., and Sandlin, C.W. Jr., Effect of normal pressure on the critical compressive and shear stress of curved sheet. WRL-57, NACA, 1944.
27. Reddy, J.N., A Layerwise Shell Theory with Applications to Buckling and Vibration of Cross-Ply Laminated Stiffened Circular Cylindrical Shells. *CCMS-92-01*, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1992.
28. Sanders, J.L., An improved first-approximation theory for thin shells, NASA Tech. Rep. R-24 1959.
29. Sanders, J.L., Non-linear theories for thin shells, *Quart J Appl. Math*, 21:21-36, 1963.
30. Schildcrout, M., Stein, M., Critical combination of shear and direct axial stress for curved rectangular panels, TN 1928, NACA, 1949.

31. Simitzes, G.J., General instability of eccentrically stiffened cylindrical panels, J. AIRCRAFT VOL. 8, NO. 7, pp. 569-575, 1971.
32. Stein, M., and Fralich, R.W., Critical shear stress of infinitely long, simply supported plate with transverse stiffeners technical note No. 1851., 1949.
33. Teng, G. J., Buckling of thin shells]: recent advances and trends. Applied Mechanics Review 49 (4), 263-274, 1996.
34. Viswanathan, A.V., and Tamakun M., Elastic Stability of Biaxially Loaded Longitudinally Stiffened Composite Structures, AIAA Journal, Vol. 11, No. 11, November, 1973.
35. Yi-Wei, L., Elishakoff, I., Starnes Jr., J. H., Bushnell, D. Effect of the thickness variation and initial imperfection on buckling of composite cylindrical shells] asymptotic analysis and numerical results by BOSOR3 and PANDA2, International Journal of Solids and Structures 34, 3755-3767, 1997.

APPENDIX

KINEMATIC RELATIONS FROM SANDERS FORMULATION

The tangential and normal displacement fields of a material point (x, y, ζ) of a cylindrical shell are expressed in orthogonal principal-curvature coordinates as

$$u_1(x, y, z) = U_1(x, y) + \zeta(\varphi_1 - \varphi_n \varphi_2)$$

$$u_2(x, y, z) = U_2(x, y) + \zeta(\varphi_2 + \varphi_n \varphi_1)$$

$$u_3(x, y, z) = U_3(x, y) - \frac{1}{2} \zeta(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$$

Where x is an axial coordinate, y is a circumferential arc length coordinate, ζ is an outward radial coordinate with its origin at the middle-surface; The middle surface has radius R and length L ; $U_i(x, y)$, ($i=1,2,3$) are middle-surface displacements ($U_1(x, y)$ is an axial displacement, $U_2(x, y)$ is a circumferential displacement and $U_3(x, y)$ is a radial displacement).

The linear rotation vectors components that correspond to the rotations of differential elements coincides to the middle-surface normal at the point (x, y) and expressed as

$$\varphi_1 = -\frac{\partial U_3}{\partial x};$$

$$\varphi_2 = c_2 \frac{U_2}{R} - \frac{\partial U_3}{\partial y};$$

$$\varphi_n = \frac{1}{2} c_2 \left[\frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial y} \right];$$

The nonlinear membrane strains components of the cylindrical middle-surface are given in Sanders original paper [29] and expressed as

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^{(0)} &= \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{1}{2}[\varphi_1^2 + c_1\varphi_n^2]; \\ \varepsilon_{22}^{(0)} &= \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{U_3}{R} + \frac{1}{2}[\varphi_2^2 + c_1\varphi_n^2] \\ \varepsilon_{12}^{(0)} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial y} + c_1\varphi_1\varphi_2\right]\end{aligned}$$

Bending strains of the middle Surface of cylindrical Shell, associated with changes in surface curvature and torsion caused by deformations are given by

$$k_{11}^{(0)} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}; \quad k_{22}^{(0)} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2}; \quad k_{12}^{(0)} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{c_2}{R} \varphi_n$$

In equations two parameters c_1 , and c_2 are introduced to trace the contributions of various terms to the equations governing nonlinear and buckling phenomena. These two parameters c_1 , and c_2 are equal to unity or zero.

Information about authors:

M.F. Alam. Ph.D. Candidate , Department of Aerospace and Mechanical Engineering, University of Texas at El Paso, 500 W University Ave, El Paso, 79928, Texas, United States.

E-mail: malam8@miners.utep.edu

A. Banafshi. Ph.D. Candidate, Department of Aerospace and Mechanical Engineering, University of Texas at El Paso, 500 W University Ave, El Paso, 79928, Texas, United States.

E-mail: abanafshi@miners.utep.edu

C. Moriel. Ph.D. Candidate , Department of Aerospace and Mechanical Engineering, University of Texas at El Paso, 500 W University Ave, El Paso, 79928, Texas, United States.

E-mail: emoriel2@miners.utep.edu

D. J. Hasanyan. Sr Specialist, Copeland Inc., Sidney, OH, USA,

E-mail: davreshh@yahoo.com

A.D. Hasanyan. Assistant Professor, Department of Aerospace and Mechanical Engineering, University of Texas at El Paso, 500 W University Ave, El Paso, 79928, Texas, United States.

E-mail: adhasanyan@utep.edu

Received 12, March, 2026

СОДЕРЖАНИЕ 2026 г., том 79 №1-2

Геворг Ервандович Багдасарян (к 90-летию со дня рождения).....	3
Агаян К.Л., Закарян В.Г. Составное пьезоэлектрическое пространство с полубесконечным электродом на поверхности присоединения двух полупространств.....	5
Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Саакян С.К. Вынужденные колебания кусочно-однородного слоя с межфазными дефектами.....	20
Арабян М. О., Оганисян З. Б. Определение собственных частот поперечных колебаний балки переменного сечения при шарнирном опирании.....	36
Белубекян Э.В., Геворкян Г.З., Дарбинян А.З., Амирджанян А.А. Задача термоупругости для полубесконечной ребристой композитной пластины.....	46
Гукасян А.А. Исследование кинематики вращательного движения упругой пластинки асимптотическим методом	59
Микилян М.А., Сагоян Р.О., Варданян И.А. Влияние магнитного поля на сверхзвуковые флаттерные колебания прямоугольной пластинки, помещенной в температурное поле	74
Саакян А.В., Амирджанян А.А. Задача продольного сдвига защемленного по одной грани упругого слоя при ограничении перемещения вне некоторого отрезка.....	88
Саркисян С.О., Саркисян Л.С., Жамакочян К.А. Модель и расчёт собственных колебаний графена на основе моментно-мембранной теории упругой пластинки....	101
Агаловян Л.А., Агаловян М.Л., Закарян Т.В., Товмасын А.Б. К решению пространственных смешанных динамических задач анизотропных пластин.	119
М.Ф.Алам, А.Банафши, С.Мориел, Д.Дж.Асанян, А.Д.Асанян. Об усиленных многослойных цилиндрических оболочках из композитных материалов	133

CONTENTS 2026, v. 79 №1-2

Gevorg Ervand Baghdasaryan (90-th anniversary)	3
Aghayan K.L., Zakaryan V.G. A Composite Piezoelectric Space Weakened with Semi-Infinite Electrode on Joint Surface of Two Half-Spaces	5
Hakobyan V.N., Amirjanyan A.A., Sahakyan S.K. Forced Oscillations of a Piecewise-Homogeneous Layer with Interphase Defects	20
Arabyan M. H., Oganisyan Z. B. Determination of the Natural Frequencies of Transverse Vibrations of a Beam with Variable Cross-Section under Pinned Support	36
Belubekyan E.V., Gevorgyan G.Z., Darbinyan A.Z., Amirjanyan H.A. Thermoelasticity Problem for a Semi-Infinite Ribbed Composite Plate	46
Ghukasyan A.A. Investigation of the Kinematics of Rotational Motion of an Elastic Plate by the Asymptotic Method	59
Mikilyan M.A., Sagoyan R.O., Vardanyan I.A. Influence of Magnetic Field on Supersonic Flutter Oscillations of a Rectangular Plate Placed in a Temperature Field	74
Sahakyan A.V., Amirjanyan H.A. Problem of Longitudinal Shear of an Elastic Layer Fastened on One Face With Displacement Restricted Outside a Certain Segment	88
Sargsyan S.H., Sargsyan L.S., Zhamakochyan K.A. Model and calculation of natural vibrations of graphene based on the moment-membrane theory of an elastic plate	101
Aghalovyan L.A., Aghalovyan M.L., Zakaryan T.V., Tovmasyan A.B. Solution of Special Mixed Dynamic Problems of Anisotropic Plates	119
Alam M.F., Banafshi A., Moriel C., Hasanyan D.J., Hasanyan A.D On Stiffened Composite Multilayer Cylindrical Shells.	133

Գևորգ Երվանդի Բաղդասարյան (ծննդյան 90-ամյակի կապակցությամբ)3

Աղայան Կ.Լ., Զաքարյան Վ.Գ. Բաղադրյալ պիեզոէլեկտրիկ տարածությունը երկու կիսատարածությունների միացման մակերևույթում տեղադրված կիսասանվերջ էլեկտրոդի առկայությամբ5

Հակոբյան Վ.Ն., Ամիրջանյան Հ.Ա., Սահակյան Ս.Կ. Միջֆազային դեֆեկտներով կտոր առ կտոր համասեռ շերտի ստիպողական տատանումները20

Արաբյան Մ. Հ. Հովհաննիսյան Զ.Բ. Փոփոխական լայնական կտրվածք ունեցող հողակապորեն ամրացված եզրերով հեծանի սեփական լայնական տատանումների հաճախականությունների որոշումը36

Բելուբեկյան Է.Վ., Գևորգյան Գ.Զ., Դարբինյան Ա.Զ., Ամիրջանյան Հ. Ա. Ջերմատառձգական խնդիր կողով ուժեղացված կիսասանվերջ կոմպոզիտ սալի համար46

Ղուկասյան Ա.Ա. Առաձգական սալի պտտական շարժման կինեմատիկայի ուսումնասիրումը ասիմպտոտիկ մեթոդով59

Միկիլյան Մ.Ա., Սաղոյան Ռ.Օ., Վարդանյան Ի.Ա. Սագնիսական դաշտի ազդեցությունը ջերմային դաշտում գտնվող ուղղանկյուն սալի գերձայնային տատանումների վրա74

Սահակյան Ա.Վ., Ամիրջանյան Հ.Ա. Մեկ հիմքով ամրացված առաձգական շերտի երկայնական սահքի խնդիր որոշ հատվածից դուրս տեղափոխությունների սահմանափակման դեպքում88

Սարգսյան Ս.Հ., Սարգսյան Լ.Ս., Ժամակոչյան Զ.Ա. Գրաֆենի սեփական տատանումների մոդելը և հաշվարկը առաձգական սալի մոմենտա-մեմբրանային տեսության հիման վրա101

Աղաբաբյան Լ.Ա., Աղաբաբյան Մ.Լ., Զաքարյան Տ.Վ., Թովմասյան Ա.Բ. Անիզոտրոպ սալերի տարածական խառը դինամիկական խնդիրների լուծման մասին119

Ալամ Մ.Ֆ., Բանաֆշի Ա., Մորիել Ս., Հասանյան Դ.Զ., Հասանյան Ա.Դ. Ուժեղացված կոմպոզիտային բազմաշերտ գլանային թաղանթների մասին133

Правила для авторов

«Известия НАН Армении. Механика» освещает вопросы в области теоретической и прикладной механики: теорий упругости, оболочек и пластин, пластичности, ползучести и вязкоупругости, электромагнитоупругости, аэрогидромеханики, устойчивости движения, строительной механики и техники экспериментирования.

1. Статьи, представляемые в «Известия НАН Армении. Механика», должны сопровождаться рекомендацией на опубликование от семинара, на котором доложена работа.
2. Статьи представляются на армянском, русском или английском языках в двух экземплярах с указанием УДК и должны включать **ключевые слова** и **краткие аннотации** на трёх языках, в которых не допускаются ссылки на цитированную литературу и громоздкие формулы. Отдельно в основном тексте выделить: **введение, постановку задачи, решение и заключение.**
3. Вместе с оригиналом статьи необходимо представить электронную версию в среде Word: бумага – формат А4; **Fonts – Times New Roman, Sylfaen. Поля – слева и справа – 4 см; снизу и сверху – 5 см; аннотации – 8pt; основной текст – 10pt с интервалом 1. Формулы – MathType, Defaults.**
4. Литература (10pt) приводится общим списком в конце статьи на языке оригинала, а также на английском языке, при этом, в нижеследующей последовательности указываются:
для книги – фамилия и инициалы автора, полное название книги, номер тома, место издания (город), издательство, год издания и количество страниц;
для журнала – фамилия и инициалы автора, полное наименование работы, название журнала, год издания, том, выпуск или номер и страницы.
5. В конце статьи должны быть приведены сведения об авторах с указанием контактных данных.
6. При наличии нескольких авторов редколлегия рекомендует фамилии авторов статьи расположить в алфавитном порядке.
7. В случае отказа в публикации, редколлегия оставляет за собой право не возвращать автору один экземпляр статьи.