

**ЗАДАЧА ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА ЗАЩЕМЛЕННОГО ПО ОДНОЙ ГРАНИ
УПРУГОГО СЛОЯ ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ВНЕ
НЕКОТОРОГО ОТРЕЗКА**

Саакян А.В., Амирджанян А.А.

Ключевые слова: продольный сдвиг, контактная задача, сингулярное интегральное уравнение, полубесконечный интервал, метод механических квадратур.

Sahakyan A.V., Amirjanyan H.A.
Problem of Longitudinal Shear of an Elastic Layer Fastened on One Face With Displacement Restricted Outside a Certain Segment

Keywords: longitudinal shear, contact problem, singular integral equation, semi-infinite interval, method of mechanical quadratures

The problem of longitudinal shear of an elastic layer fixed along its entire lower face and outside a certain strip of its upper face is considered. A rigid punch of finite width is applied to the free surface of the upper face. This punch does not cover the entire free surface and is subjected to a tangential load, creating the conditions for longitudinal shear. The solution is reduced to solving a system of singular integral equations on finite and semi-infinite intervals. The problem is solved using the mechanical quadrature method, which allows for a detailed numerical analysis of the dependence of contact stress distribution, stress concentration coefficients at the ends, and rigid punch displacement on the layer thickness and the width of the stress-free portion of the layer's upper face. The results are presented as graphs.

Սահակյան Ա.Վ., Ամիրջանյան Հ.Ա.
**Մեկ հիմքով ամրացված առաձգական շերտի երկայնական սահրի խնդիր որոշ հատվածից
դուրս տեղափոխությունների սահմանափակման դեպքում**

Հիմնաբառեր՝ երկայնական սահր, կոնտակտային խնդիր, սինգուլյար ինտեգրալ հավասարում, կիսաանվերջ հատված, մեխանիկական քառակուսացման բանաձևերի եղանակ

Դիտարկվում է ամբողջ ստորին մակերեսի երկայնքով և վերին մակերեսի որոշակի շերտից դուրս ամրացված առաձգական շերտի երկայնական սահրի խնդիրը: Վերին մակերեսի ազատ մակերեսին կիրառվում է վերջավոր լայնությամբ կոշտ դրոշմ, որը չի ծածկում ամբողջ ազատ մակերեսը և գտնվում է երկայնական սահրի պայմաններ ապահովող շոշափող բեռի ազդեցության տակ: Լուծումը հանգում է վերջավոր և կիսաանվերջ միջակայքերի վրա սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծմանը: Խնդիրը լուծվում է մեխանիկական քառակուսացման բանաձևերի եղանակով, որը թույլ է տալիս կատարել շոշափող լարումների բաշխման, ծայրերում լարումների կոնցենտրացիայի գործակիցների և դրոշմի կոշտ տեղափոխության շերտի հաստությունից և շերտի վերին մակերեսի լարումից ազատ հատվածի լայնությունից կախվածության մանրամասն թվային վերլուծություն: Արդյունքները ներկայացված են գրաֆիկների տեսքով:

Рассмотрена задача продольного сдвига упругого слоя, закрепленного по всей нижней грани и вне некоторой полосы верхней грани. К свободной поверхности верхней грани приложен жесткий штамп конечной ширины, не покрывающий всю свободную поверхность и подверженный действию тангенциальной нагрузки, обеспечивающей условия продольного сдвига. Решение задачи сведено к решению системы сингулярных интегральных уравнений на конечном и полубесконечном интервалах. Задача решена методом механических квадратур, позволившим провести детальный численный анализ зависимости распределения контактных напряжений, коэффициентов их концентрации на концах и

жесткого перемещения штампа от толщины слоя и ширины свободной от напряжений части верхней грани слоя. Результаты представлены в виде графиков.

Введение. Метод механических квадратур зарекомендовал себя в качестве эффективного численно-аналитического метода решения как сингулярных интегральных уравнений и систем таких уравнений, так и уравнений с логарифмическим ядром, определенных на конечном интервале. Задач, решенных этим методом, огромное количество. Для примера, среди последних работ отметим [1-5].

Решение сингулярных интегральных уравнений на полубесконечном интервале при помощи метода механических квадратур нам не встречалось.

В настоящей работе рассмотрена контактная задача для упругого слоя, нижняя грань которой закреплена полностью, а верхняя грань закреплена по двум полуплоскостям, расположенным на некотором расстоянии друг от друга. На свободной от напряжений части поверхности, посредством жесткой полосы конечной ширины, слою передается тангенциальное усилие, создающее условия продольного сдвига. Решение задачи, с учетом симметричного расположения жесткой полосы, сводится к решению системы из двух сингулярных интегральных уравнений относительно контактных напряжений под полосой и реактивных напряжений на одном луче заделки, одно из которых определено на конечном интервале, а другое на полубесконечном. Решение строится методом механических квадратур.

1. Постановка задачи и вывод определяющего уравнения.

Рассмотрим антиплоскую деформацию однородного упругого слоя, который в прямоугольной системе координат $Oxyz$ занимает область $\{-\infty < x, z < \infty, 0 < y < H\}$ и жестко закреплена по всей нижней грани $y=H$ и по двум полуплоскостям $\{|x| > b, -\infty < z < \infty\}$ верхней грани $y=0$. К свободной части верхней грани прикреплена жесткая полоса конечной ширины $\{y=0, |x| < a < b, -\infty < z < \infty\}$. Слой деформируется под воздействием статической нагрузки T , приложенной к верхней грани жесткой полосы равномерно по z (рис.1).

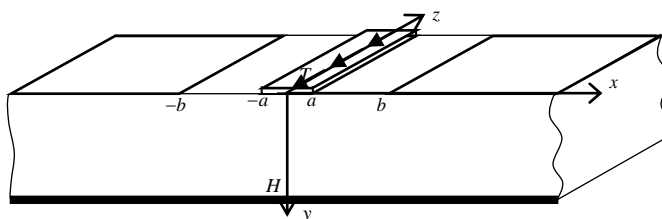


Рис. 1 Схематическое представление задачи.

При такой антиплоской деформации единственной, отличной от нуля, компонентой перемещений будет компонента $w(x, y)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа в базовой плоскости $z=0$:

$$\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

при граничных условиях:

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= 0 & \text{при } |x| > b \\ w(x, 0) &= \Delta & \text{при } |x| < a \\ \tau_{xy}(x, 0) &= 0 & \text{при } a < |x| < b \\ w(x, H) &= 0 & \text{при } |x| < \infty \end{aligned} \quad (2)$$

Далее, все линейные величины будем считать безразмерными, отнесенными к полуширине жесткой полосы a , а напряжения – отнесенными к модулю сдвига материала слоя G . При этом все обозначения сохраним, полагая лишь $a = 1$.

При помощи интегрального преобразования Фурье по x и с учетом симметрии относительно оси ординат, перемещение $w(x, y)$, удовлетворяющее последним двум условиям в (2), выразим через искомое контактное напряжение под жесткой полосой $\tau_1(x)$ и неизвестное реактивное напряжение $\tau_2(x)$, возникающее на луче $b < x < \infty$:

$$w(x, y) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-1}^1 K_1(x, s, y) \tau_1(s) ds + \int_b^{\infty} [K_1(x, -s, y) + K_1(x, s, y)] \tau_2(s) ds \right] \quad (3)$$

где

$$K_1(x, s, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sh } \lambda(y - H)}{\lambda \text{ch } \lambda H} e^{-i\lambda(x-s)} d\lambda$$

Удовлетворяя первым двум условиям в (2), придем к системе интегральных уравнений относительно указанных напряжений

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 R(x-s) \tau_1(s) ds + \int_b^{\infty} [R(x-s) + R(x+s)] \tau_2(s) ds &= 2\pi\Delta \quad (-1 < x < 1) \\ \int_{-1}^1 R(x-s) \tau_1(s) ds + \int_b^{\infty} [R(x-s) + R(x+s)] \tau_2(s) ds &= 0 \quad (x > b) \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$R(x-s) = K_1(x, s, 0) = -2 \ln \left(\text{cth} \frac{\pi|x-s|}{4H} \right)$$

Контактное напряжение $\tau_1(x)$ должно удовлетворять также условию равновесия жесткой полосы:

$$\int_{-1}^1 \tau_1(x) dx = T \quad (5)$$

Выделив в ядре $R(x-s)$ особенность при $x \rightarrow s$ и продифференцировав уравнения системы (4) по x , получим определяющее уравнение поставленной задачи:

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{s-x} + Q(x-s) \right) \tau_1(s) ds + \int_b^{\infty} \left[\frac{1}{s-x} + Q(x-s) - \frac{1}{s+x} + Q(x+s) \right] \tau_2(s) ds = 0 \quad (-1 < x < 1) \quad (6)$$

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{s-x} + Q(x-s) \right) \tau_1(s) ds + \int_b^{\infty} \left[\frac{1}{s-x} + Q(x-s) - \frac{1}{s+x} + Q(x+s) \right] \tau_2(s) ds = 0 \quad (x > b)$$

где функция $Q(x-s)$ регулярна в точке $x=s$ и представляется формулой:

$$Q(x-s) = -\frac{1}{x-s} + \frac{\pi}{2H \operatorname{sh} \frac{\pi(x-s)}{2H}}$$

Решение системы (6) ищем в виде:

$$\tau_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1) \quad (7)$$

$$\tau_2(x) = \frac{\varphi_2(x)}{(x-b+1)\sqrt{x-b}} \quad (b < x < \infty)$$

При помощи преобразования

$$x = \frac{1+\xi}{1-\xi} + b \quad x \in (b, \infty), \quad \xi \in (-1, 1)$$

полубесконечный интервал (b, ∞) сведем к отрезку $(-1, 1)$ и нововведенную функцию $\varphi_2(x)$ заменим новой неизвестной $\varphi(\xi)$ ($-1 < \xi < 1$). Тогда реактивное напряжение на луче $b < x < \infty$ представится в виде:

$$\tau_2(x) = \tau_2 \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} + b \right) = \frac{\varphi(\xi)(1-\xi)}{2} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \quad (8)$$

Окончательно, определяющее уравнение запишем в виде:

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\xi - \eta} + Q(\eta - \xi) \right) \frac{\varphi_1(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi + \int_{-1}^1 M(\eta, \xi) \sqrt{\frac{1 - \xi}{1 + \xi}} \varphi(\xi) d\xi = 0$$

$$\int_{-1}^1 M_1(\eta, \xi) \frac{\varphi_1(s)}{\sqrt{1 - s^2}} ds + \int_{-1}^1 \left[\frac{1 - \eta}{2} \frac{1}{\xi - \eta} + M_2(\eta, \xi) \right] \sqrt{\frac{1 - \xi}{1 + \xi}} \varphi(\xi) d\xi = 0$$
(9)

Здесь

$$M(\eta, \xi) = \frac{(1 + \eta - b)^{-1}}{\xi - \frac{\eta - 1 - b}{\eta + 1 - b}} + \frac{(b + \eta - 1)^{-1}}{\xi - \frac{\eta + 1 + b}{\eta - 1 + b}} + \frac{Q\left(\eta - \frac{1 + \xi}{1 - \xi} - b\right) + Q\left(\eta + \frac{1 + \xi}{1 - \xi} + b\right)}{1 - \xi}$$

$$M_1(\eta, \xi) = \frac{1}{\xi - \frac{1 + \eta}{1 - \eta} - b} + Q\left(\frac{1 + \eta}{1 - \eta} + b - \xi\right)$$

$$M_2(\eta, \xi) = \frac{1 - \eta}{2} \frac{(\eta + b - b\eta)^{-1}}{\xi - \frac{1 + b - b\eta}{\eta + b - b\eta}} + \frac{Q\left(\frac{1 + \eta}{1 - \eta} - \frac{1 + \xi}{1 - \xi}\right) + Q\left(\frac{1 + \eta}{1 - \eta} + \frac{1 + \xi}{1 - \xi} + 2b\right)}{1 - \xi}$$

Таким образом, необходимо решить систему уравнений (9) при условии равновесия (5), которое в обозначениях (7) имеет вид:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx = T$$
(10)

После определения контактных напряжений $\tau_1(x)$ и $\tau_2(x)$, при помощи формулы (3) и с учетом перехода к безразмерным величинам с сохранением обозначений, можно определить тангенциальные напряжения, возникающие на нижней грани слоя:

$$\tau_{yz}(x, H) = \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=H} = \int_{-1}^1 K_2(x - s) \tau_1(s) ds + \int_b^\infty [K_2(x - s) + K_2(x + s)] \tau_2(s) ds$$
(11)

где

$$K_2(x - s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda H} e^{-i\lambda(x-s)} d\lambda = \frac{1}{2H \operatorname{ch} \frac{\pi(x-s)}{2H}}$$

В случае, когда слой обращается в полупространство ($H \rightarrow \infty$), поставленная задача имеет аналитическое решение:

$$\begin{aligned}\tau_1(x) &= \frac{Tb}{2K\left(\frac{1}{b^2}\right)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{b^2-x^2}} \quad (-1 < x < 1) \\ \tau_2(x) &= \frac{Tb}{2K\left(\frac{1}{b^2}\right)} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-b^2}} \quad (b < x < \infty)\end{aligned}\quad (12)$$

где $K(m)$ - полный эллиптический интеграл первого рода [6].

2. Алгоритм построения решения системы уравнений (9) и (10).

Решение указанной системы построим методом механических квадратур [7]. Учитывая, что весовые функции для интегралов в уравнениях системы (9) отличаются друг от друга, приведем квадратурные формулы для каждой из них.

а) Весовая функция $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Квадратурная формула имеет вид

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(x)}{x-z} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\varphi_1(\zeta_j)}{\zeta_j - z} [1 - R_j(z)] \quad (13)$$

где $\zeta_j (j = \overline{1, n})$ - корни многочлена Чебышева первого рода $T_n(x)$, которые определяются формулой

$$\zeta_j = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2n} \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

а функция $R_j(z)$ - формулой

$$R_j(z) = \begin{cases} \frac{1}{U_{n-1}(\xi_j)} \frac{(z + \sqrt{z-1}\sqrt{z+1})^{-n}}{\sqrt{z-1}\sqrt{z+1}} & \text{при } z \notin [-1, 1] \\ \frac{U_{n-1}(z)}{U_{n-1}(\xi_j)} & \text{при } z \in (-1, 1) \end{cases} \quad (14)$$

б) Весовая функция $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Квадратурная формула имеет вид

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(x) \sqrt{1-x}}{x-z} \frac{dx}{\sqrt{1+x}} \approx \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{j=1}^n \frac{(1-\xi_j)\varphi(\xi_j)}{\xi_j-z} \left[1 - \frac{F(z)}{P_n^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(\xi_j)} \right] \quad (15)$$

где $\xi_j = \cos \frac{2j\pi}{2n+1}$ ($j = \overline{1, n}$) - корни многочлена Якоби $P_n^{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x)$ [6].

$$F(z) = \begin{cases} \frac{\Gamma(n+0.5)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1)} \left(\frac{2}{z-1}\right)^{n+1} \left(1 + \sqrt{\frac{z+1}{z-1}}\right)^{-2n-1} \sqrt{\frac{z-1}{z+1}} & \text{при } z \notin [-1, 1] \\ P_n^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(z) & \text{при } z \in (-1, 1) \end{cases}$$

Заменив в системе уравнений (9) интегралы соответствующими суммами, согласно (12) и (15), и выбирая в качестве точек коллокации для первого уравнения корни многочлена $U_{n-1}(x)$, а для второго уравнения – корни многочлена Якоби $P_n^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x)$, получим систему линейных алгебраических уравнений из $(2n-1)$ уравнений.

Полученная система, с учетом ядер системы (9), имеет достаточно громоздкий вид и, по этой причине, здесь не приводится.

Добавив к полученной системе дискретизированное условие равновесия (10), получим замкнутую систему линейных алгебраических уравнений относительно значений искомых функций в узлах квадратурных формул $\varphi_1(\zeta_j)$ ($j = \overline{1, n}$) и $\varphi(\xi_j)$ ($j = \overline{1, n}$).

После определения указанных значений искомые функции можно построить по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varphi_1(\zeta_j) \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} T_m(x) T_m(\zeta_j) \right) \\ \varphi(x) &= \frac{2}{2n+1} \sum_{j=1}^n (1+\xi_j)\varphi(\xi_j) \sum_{m=0}^{n-1} U_{2m} \left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} \right) U_{2m} \left(\sqrt{\frac{1+\xi_j}{2}} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Отметим, что порядки аппроксимации для функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi(x)$ могут быть различными.

Для определения перемещений граничных точек слоя имеем формулу:

$$w(x,0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left(\operatorname{cth} \frac{\pi|x-s|}{4H} \right) \frac{\varphi_1(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds -$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\ln \left(\operatorname{cth} \frac{\pi \left| x - \frac{1+\xi}{1-\xi} - b \right|}{4H} \right) + \ln \left(\operatorname{cth} \frac{\pi \left| x + \frac{1+\xi}{1-\xi} + b \right|}{4H} \right) \right] \frac{\varphi(s)}{\sqrt{1-s^2}} d\xi \quad (17)$$

Перемещения точек на свободной поверхности слоя ($1 < x < b$) можно рассчитать по формуле (17), используя для интегралов обычную квадратурную формулу по узлам многочлена Чебышева первого рода $T_n(x)$, потому что в этих точках ни одно из логарифмических ядер не имеет особенности. При этом отметим, что, если для первого интеграла, при одинаковом порядке аппроксимации, можно использовать найденные значения $\varphi_1(\xi_j)$ ($j = 1, n$), то для второго интеграла значения функции $\varphi(x)$ в узлах квадратурной формулы надо вычислять по второй формуле в (16).

При желании проверить выполнение условия $w(x) = 0$, когда $x \in (-1, 1)$ или $x \in (b, \infty)$, необходимо в соответствующем интеграле выделить логарифмическую особенность и использовать следующую квадратурную формулу:

$$\int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|s-x|} \frac{f(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds = \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \left(\ln 2 + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{2}{m} T_m(\xi_i) T_m(x) \right) \quad (-1 < x < 1). \quad (18)$$

3. Численный анализ.

Проведен численный анализ поставленной задачи. Предварительно подобраны такие порядки аппроксимации, при которых построенные графики не отличаются от графиков, построенных при больших порядках аппроксимации. Для функции $\varphi_1(x)$ таковым является $n = 6$, для функции же $\varphi(x)$ этот порядок зависит от толщины слоя H и с увеличением последнего изменяется от $n = 10$ до $n = 30$ и более.

Расчеты были проведены при $n = 6$ для первой функции и $n = 20$ для второй.

Будут представлены следующие функции и величины:

1) $\varphi_1(x)$ ($-1 < x < 1$) - регулярная часть контактных напряжений под полосой,

2) $\varphi_r(x) = \frac{\varphi \left(\frac{1+b-x}{-1+b-x} \right)}{(x-b+1)}$ ($b < x < b+4$) - регулярная часть реактивных напряжений в зоне заделки,

3) $K_1 = \frac{\varphi_1(1)}{\sqrt{2}}$ - коэффициент концентрации напряжений на конце зоны

контакта,

4) $K_2 = \varphi(-1)$ - коэффициент концентрации напряжений в конце зоны заделки,

5) Δ - жесткое смещение полосы,

6) $R_0 = 2 \int_b^{\infty} \tau_2(x) dx$ - результирующая реактивных напряжений в зонах заделки

на верхней грани,

7) $R_{\infty} = - \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{yz}(x, H) dx$ - результирующая реактивных напряжений на

нижней грани.

Изменяемыми параметрами будут толщина слоя H и расстояние между полосой и зоной сцепления $d = b - 1$. Для внешней нагрузки принято $T = 2$.

На рис. 2 представлены графики распределения функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_r(x)$ для различных значений толщины слоя H , когда $d = 1$. На рисунке пунктирной линией представлена также регулярная часть аналитического решения (11), соответствующего случаю полупространства ($H = \infty$). Кривые от синего к оранжевому соответствуют значениям $H = 2, 2.5, 4, 20$. Близость оранжевой кривой к пунктирной указывает на то, что при $d = 1$ для $H > 20$ слой можно считать полупространством.

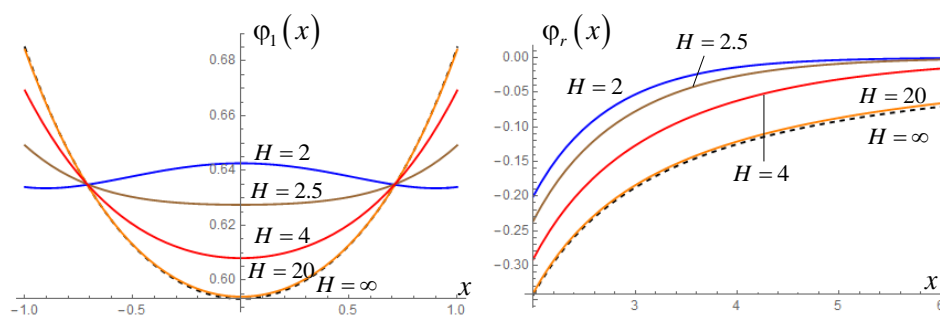


Рис.2 Зависимость регулярных частей контактных напряжений от толщины слоя

На рис. 3 представлены те же функции для различных значений длины свободной поверхности d , когда толщина слоя $H = 6$. Кривые от коричневого к оранжевому соответствуют значениям $d = 0.2, 0.3, 1, 2$.

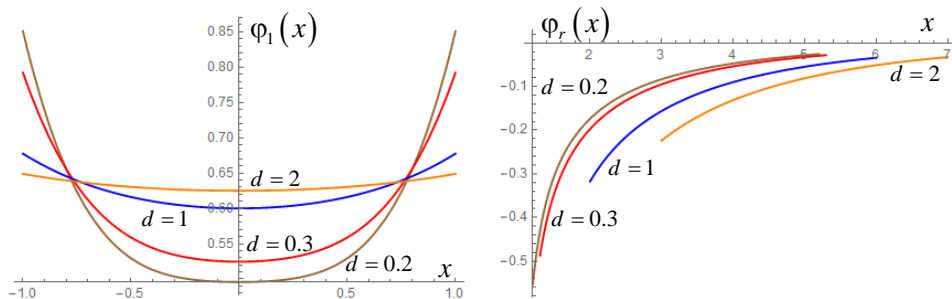


Рис.3 Зависимость регулярных частей контактных напряжений от d .

На рис.4-7 представлены кривые зависимости коэффициентов концентрации напряжений K_1 и K_2 , жесткого смещения Δ и результирующей реактивных напряжений R_0 (сплошные линии) и R_∞ (пунктирные линии) от толщины слоя H при различных значениях $d = 1, 2, 4$.

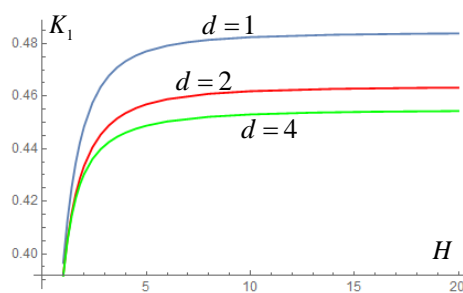


Рис. 4 Зависимость $K_1(H)$

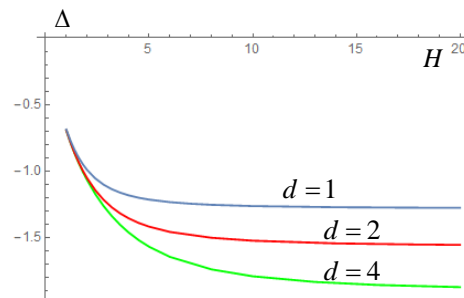


Рис. 5 Зависимость $\Delta(H)$

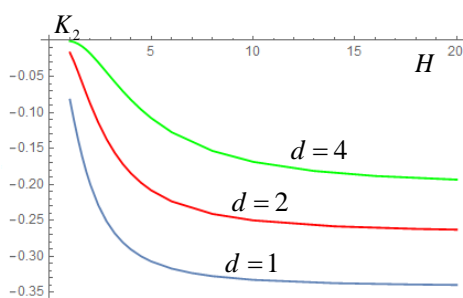


Рис. 6 Зависимость $K_2(H)$

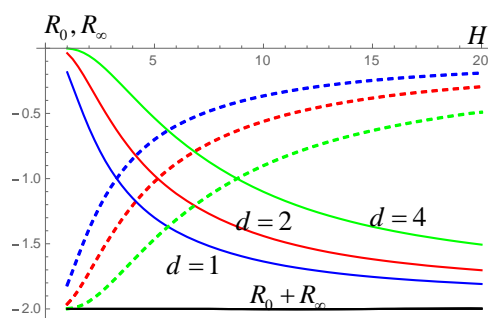


Рис. 7 Зависимости $R_0(H)$ и $R_\infty(H)$

Схождение кривых на рис. 4 и рис.5 объясняется тем, что при существенно малых значениях толщины слоя его напряженно-деформированное состояние локализуется под полосой и практически не реагирует на наличие заделки на конечном расстоянии от полосы. Этим же объясняется и стремление к нулю коэффициента K_2 и результирующей R_0 , а также увеличение по модулю результирующей R_∞ на рис.6 и рис.7. С увеличением толщины слоя все эти величины, кроме R_∞ , по модулю растут, стремясь к определенным пределам, соответствующим аналитическому решению (11). Наиболее медленное стремление к предельному значению наблюдается у результирующих R_0 и R_∞ , первая из которых стремится к черной линии на рис. 7, представляющей суммарную реакцию слоя и равной, по модулю, приложенной к полосе нагрузке, вторая же, очевидно, стремится к нулю.

На рис. 8-11 представлены графики зависимости тех же величин от расстояния между полосой и заделкой d .

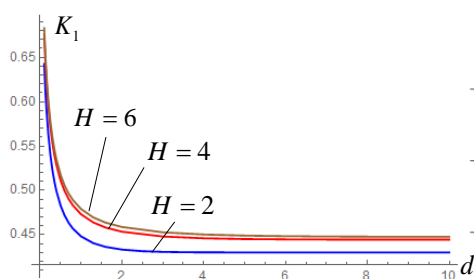


Рис. 8 Зависимость $K_1(d)$

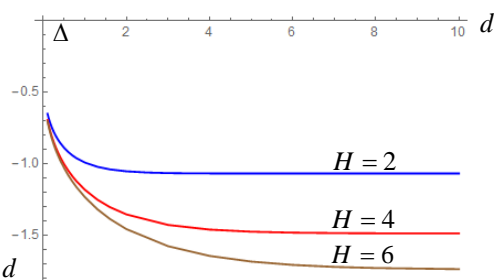


Рис. 9 Зависимость $\Delta(d)$

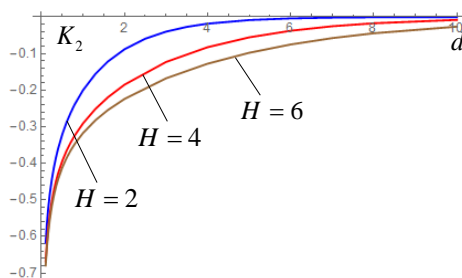


Рис. 10 Зависимость $K_2(d)$

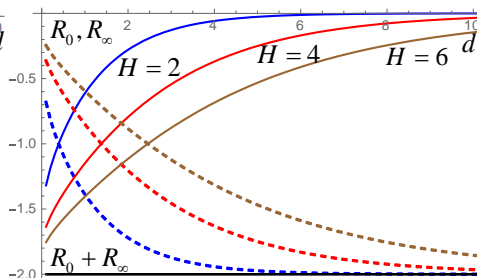
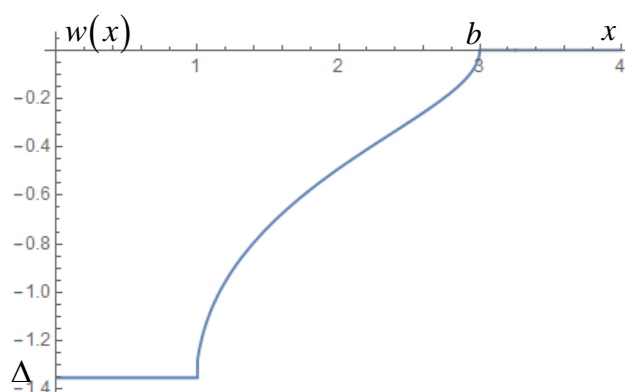


Рис. 11 Зависимости $R_0(d)$ и $R_\infty(d)$

Стремление коэффициентов $K_1(d)$ и $K_2(d)$ к бесконечности разных знаков на рис. 8 и рис. 10 полностью объясняет ситуацию среза, которое имеет место при $d=0$ и при котором контактные напряжения приобретают неинтегрируемую

особенность x^{-1} . Стремление кривых результирующей $R_0(d)$ к нулю, а результирующей $R_\infty(d)$ к -2 при увеличении d объясняется тем, что функцию уравнивания внешней нагрузки берут на себя контактные напряжения, возникающие на нижней грани слоя. На рис.11 это подтверждается тем, что чем меньше толщина слоя, тем быстрее R_0 обращается в ноль.

Рис.12 Картина перемещения $w(x)$.



На рис. 12 представлена картина перемещений отрезка $[0, 4]$ при $d = 2, H = 4$, который, для наглядности, помимо свободной поверхности $[1, b = 1 + d]$, включает также участки полосы $[0, 1]$ и заделки $[b, 4]$. Перемещения рассчитаны согласно описанию после формулы (17) при тех же порядках аппроксимации, что и при решении сингулярных интегральных уравнений. Следует отметить, что все прямые линии на рис.7, рис.11 и рис.12, которые, очевидно, известны, являются результатом численных расчетов, а не заданы как прямые линии.

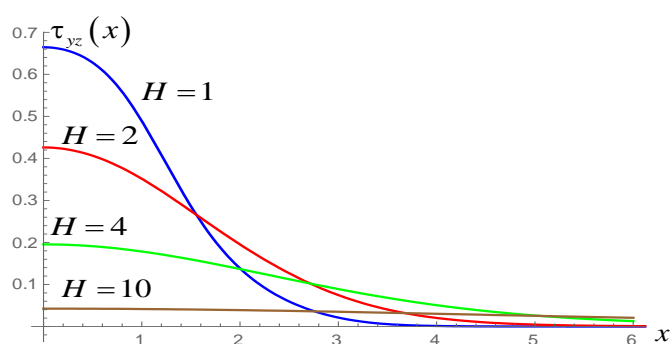


Рис. 13 Распределение реактивных напряжений на нижней грани слоя.

На рис. 13 представлены кривые распределения реактивных напряжений на нижней грани слоя при $d = 2$ и различных значениях $H = 1, 2, 4, 10$.

Заключение. На примере конкретной задачи представлен алгоритм решения сингулярного интегрального уравнения на полубесконечном интервале методом механических квадратур. Эффективность использования этого метода и высокая точность полученных результатов подтверждаются большим числом численных расчетов, иллюстрирующих выполнение всех условий поставленной задачи: условие равновесия штампа (уравнение (10), являющееся одним из уравнений решаемой системы линейных алгебраических уравнений), условие равенства перемещений всех точек под штампом его жесткому смещению Δ (Рис.12, интервал $(0,1)$), обращение в ноль перемещений в зоне заделки (Рис.12, интервал $(3,4)$), равенство результирующей всех реактивных напряжений внешней нагрузке (Рис.7 и Рис.11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ju Ma, Liao-Liang Ke, Yue-Sheng Wang, Electro-mechanical sliding frictional contact of a piezoelectric half-plane under a rigid conducting punch, *Applied Mathematical Modelling*, Volume 38, Issue 23, 2014, Pages 5471-5489.
2. Hakobyan V.N. Stress Concentrators in Continuous Deformable Bodies. Book Series “Advanced Structured Materials”, Eds. Andreas Öchsner, Lucas F. M. da Silva, Holm Altenbach, Vol.181, 2022, Springer Cham, 380 p.
3. Popov V.G., System of cracks under the impact of plane elastic waves. 2022, *Journal of Physics: Conference Series*, **2231** 012004
4. Çömez, İ., Güler, M. A., & El-Borgi, S. (2024). Continuous and discontinuous contact problems of a functionally graded piezoelectric layer resting on a homogeneous piezoelectric half plane. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 31(10), 2130–2143.
5. Kudish II, Sahakyan A, Hakobyan V, Amirjanyan H. Contact problem for an interface crack under action of a moving punch. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2024;0(0). doi:10.1177/10812865241251469
6. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 830 с.
7. Sahakyan A.V., Amirjanyan H.A. Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types // *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. V. 991. Article 012070. doi :10.1088/1742-6596/991/1/012070

Сведения об авторах:

Амирджанян Арутюн Арменович – к.ф.м.н., в.н.с. Института механики НАН РА, тел. (37444) 920-639, e-mail: amirjanyan@gmail.com

Саакян Аветик Вараздатович – д.ф.м.н., зав. отделом Института механики НАН РА, тел. (37494) 579-348, e-mail: avetik.sahakyan@sci.am, avsahakyan@gmail.com

Поступила в редакцию 6 марта 2026г.