

**ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА СВЕРХЗВУКОВЫЕ ФЛАТТЕРНЫЕ
КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ, ПОМЕЩЕННОЙ В
ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ**

Микилян М.А., Сагоян Р.О., Ваданян И.А.

Ключевые слова: нелинейный флаттер, температурное поле, магнитное поле, сверхзвуковой поток газа, зависимость амплитуда-скорость

Mikilyan M.A., Sagoyan R.O., Vardanyan I.A.

Influence of Magnetic Field on Supersonic Flutter Oscillations of a Rectangular Plate Placed in a Temperature Field

KeyWords: nonlinear flutter, temperature field, magnetic field, supersonic gas flow, amplitude-velocity relationship

The nature of nonlinear oscillations of an isotropic rectangular plate in a supersonic gas flow in the presence of both thermal and magnetic fields is studied. The study was carried out taking into account two types of nonlinearity: aerodynamic (quadratic and cubic) and geometric (cubic). It was established that due to aerodynamic nonlinearity, the relation $A(v)$ (where A is the amplitude of nonlinear oscillations, v is the parameter characterizing the velocity of the flowing gas) is a multivalued function in certain ranges of velocity v . This fact is depicted in the graphs presented in the text in the form of different branches. In these figures, the lower branches are most likely unstable. The existence of such ranges of variation of v is shown, where flutter-type oscillations cannot be excited. The combined effect of thermal and magnetic fields on the behavior of nonlinear oscillations is studied.

Միկիլյան Մ.Ա., Սաղոյան Ռ.Օ., Վարդանյան Ի.Ա.

Մագնիսական դաշտի ազդեցությունը ջերմային դաշտում գտնվող ուղղանկյուն սալի գերձայնային տատանումների վրա

Հիմնաբառեր` ոչ գծային ֆլատեր, ջերմային դաշտ, մագնիսական դաշտ, գազի գերձայնային հոսանք, ամպլիտուդա-արագություն կապ

Ուսումնասիրվում է իզոտրոպ ուղղանկյուն սալի ոչ գծային տատանումների վարքը գազի գերձայնային հոսքում՝ ջերմային և մագնիսական դաշտերի առկայության դեպքում: Ուսումնասիրությունը կատարվել է՝ հաշվի առնելով ոչ գծայնության երկու տեսակները՝ աերոդինամիկական (քառակուսային և խորանարդային) և երկրաչափական (խորանարդային): Հաստատվել է, որ աերոդինամիկ ոչ գծայնության (հատկապես դրա քառակուսային մասի) պատճառով $A(v)$ կապը (որտեղ A -ն ոչ գծային տատանումների ամպլիտուդն է, v -ն՝ շրջհոսող գազի անչափ արագությունը բնութագրող պարամետրը) v արագության որոշակի միջակայքերում բազմաթեք ֆունկցիա է: Այս փաստը պատկերված է տեքստում ներկայացված գրաֆիկներում տարբեր ճյուղերի տեսքով: Այս նկարներում ստորին ճյուղերը, ամենայն հավանականությամբ, անկայուն են: Յուրեւ ե տրվում v -ի փոփոխման այնպիսի միջակայքերի գոյությունը, որտեղ ֆլատերային չմարող տատանումներ չեն կարող գրգռվել: Ուսումնասիրվում է ջերմային և մագնիսական դաշտերի համատեղ ազդեցությունը ոչ գծային տատանումների վարքի վրա:

В статье исследуется характер нелинейных колебаний изотропной прямоугольной пластины в сверхзвуковом газовом потоке при наличии температурного и магнитного полей. Исследование проводилось с учетом двух типов нелинейности: аэродинамической (квадратичной и кубической) и геометрической (кубической). Установлено, что вследствие аэродинамической нелинейности соотношение $A(v)$ (где A - амплитуда нелинейных колебаний, v - параметр, характеризующий скорость потока газа) является многозначной функцией в определенных интервалах изменения скорости. Этот факт в виде различных ветвей изображен на графиках, приведенных в тексте. На этих рисунках нижние ветви, по всей вероятности, неустойчивы. Показано существование таких интервалов изменения скорости потока, где не могут быть возбуждены колебания флаттерного типа. Изучено комбинированное влияние температурного и магнитного полей на поведение нелинейных колебаний.

Введение. Представленная задача была поставлена академиком НАН РА, доктором физико-математических наук, профессором Г.Е.Багдасаряном. Статья является продолжением работ [25,26], поэтому здесь воспользуемся некоторыми их результатами.

Панельный флаттер - потеря устойчивости и интенсивные колебания панелей обшивок летательных аппаратов, возбуждающихся при взаимодействии с потоком воздуха при больших скоростях полета. Флаттер явился причиной многих авиакатастроф. Поэтому его изучение представляет собой одно из приоритетных направлений механики. При математическом моделировании обтекания твердого тела газовым потоком обычно предполагается, что обтекаемая поверхность не деформируется. Если изгибная жесткость обтекаемого тела невелика, от этого предположения необходимо отказаться и рассматривать совместные колебания тела и газового потока.

Среди задач математического моделирования флаттера выделяют широкий класс задач - задачи панельного флаттера, при формулировке которых обтекаемое тело можно рассматривать как пластинку или пологую оболочку [13,18,19].

Сверхзвуковой флаттер характерен для элементов обшивки и несущих поверхностей малого удлинения. Его возникновение - это переход от затухающих колебаний к колебаниям с возрастающей амплитудой, который естественно трактовать как потерю устойчивости [4,13,23]. При анализе устойчивости в линейной постановке удастся определить границу устойчивого режима обтекания, т.е. критическое значение скорости набегающего потока [2,3,24].

Следует отметить, что флаттер панели может возникать на плоских или изогнутых панелях. Разные факторы могут по-разному влиять на характер границы флаттера. Эти факторы могут быть структурными или геометрическими, термодинамическими, магнитными, аэродинамическими, возникающими из характеристик потока, появляющимися в уравнениях состояния [5,9,12].

Устойчивость изотропных пластин постоянной толщины в сверхзвуковом потоке газа широко изучена [2-4,8,9,27], в то же время, насколько известно авторам, задача аэротермоупругой устойчивости панелей в переменном по толщине температурном поле была рассмотрена лишь в незначительной степени [5-7,21]. Нужно отметить, что вопросам аэро-магнито-упругой устойчивости посвящено очень малое количество работ [14,15,17,28]. В частности, в настоящей работе исследуется характер нелинейных колебаний изотропной прямоугольной пластинки в сверхзвуковом газовом потоке при наличии температурного и магнитного полей. Используя основные принципы теорий аэро-термо-упругости и аэро-магнито-упругости изотропных тел [11,20,22], теории гибких пластин [30,31], теории магнитоупругости и линейного закона изменения по толщине пластины температурного поля [5,6], получены нелинейные уравнения колебаний и соответствующие граничные условия. Показано, что коэффициенты

этих аэро-термо-магнито-упругих определяющих уравнений зависят от температуры и параметра магнитного поля, и, следовательно, характер флаттерных колебаний пластинки зависит от совместного влияния этих явлений. Это явление обусловлено тем, что под воздействием температурного поля в невозмущенном состоянии пластинка выпучивается из-за неоднородности температурного поля по ее толщине. Показано также, что приложенное магнитное поле оказывает существенное влияние на характер флаттерных колебаний рассматриваемой системы.

Формулировка задачи. Рассмотрим тонкую изотропную прямоугольную пластинку постоянной толщины h , находящуюся в стационарном температурном поле T и в продольном магнитном поле с вектором напряженности $\vec{H}_0(H_{01}, 0, 0)$. Декартова система координат (x_1, x_2, x_3) выбрана так, чтобы срединная плоскость пластины совпадала с координатной плоскостью (x_1, x_2) . Сверхзвуковой поток газа с невозмущенной скоростью U направлен вдоль оси Ox_1 , с одной стороны панели, как показано на рис. 1.

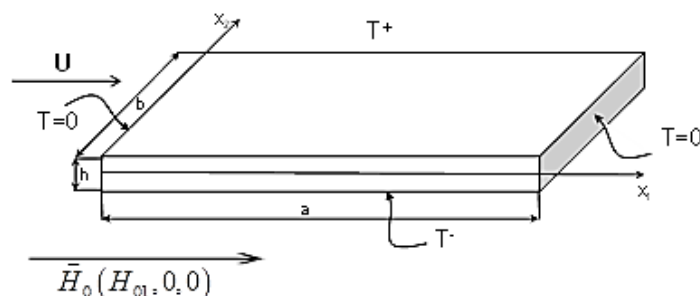


Рис.1. Геометрическая интерпретация задачи.

Принимается, что пластинка в направлении, перпендикулярном к скорости обтекающего потока, достаточно длинная и однородно закреплена по длинным сторонам. В этом случае срединная поверхность изогнутой пластинки будет близка к цилиндрической. Поэтому, направляя ось Ox_2 вдоль длинной стороны, считаем, что все величины (как возмущенного, так и невозмущенного состояний) не зависят от координаты x_2 .

Основные предположения. Для исследования аэро-термо-магнито-упругой устойчивости панели используются следующие предположения:

- гипотеза Кирхгофа о недеформируемой нормали [30,31];
- основные положения теории гибких пластин [30,31];
- при расчете аэродинамического давления используется модифицированная формула поршневой теории [1,2,12]:

$$p = -\alpha p_{\infty} \lambda^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \left(\frac{v_3}{a_{\infty}} \right) + \frac{5-\alpha+3\lambda^2}{4(1+\lambda^2)^2} \left(\frac{v_3}{a_{\infty}} \right)^2 + \frac{(2\alpha+3)\lambda^4 + (10-\alpha^2)\lambda^2 + \alpha^2 - 2\alpha + 9}{12(1+\lambda^2)^3 \sqrt{1+\lambda^2}} \left(\frac{v_3}{a_{\infty}} \right)^3 + \dots \right\}, \quad (1)$$

где p - давление газа на поверхность пластинки, $a_{\infty}^2 = \alpha p_{\infty} \rho_{\infty}^{-1}$ - скорость звука в невозмущенном газе, p_{∞} и ρ_{∞} - давление и плотность газа в невозмущенном состоянии, α - показатель политропы газа, V_3 - нормальная составляющая скорости точек поверхности пластинки,

$$\lambda^2 = \frac{V_A^2}{a_{\infty}^2}, \quad V_A^2 = \frac{B_{01}^2}{\rho_{\infty} \mu_0},$$

V_A - величина, численно равная скорости распространения альфвеновских электромагнитных волн, $B_{01} = \mu_0 \mu_r H_{01}$, μ_r - относительная магнитная проницаемость, μ_0 ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$) - магнитная постоянная;

г) линейный закон температурного поля по толщине пластины [6,13]:

$$T(x_1, x_2, x_3) = T_0(x_1, x_2) + x_3 \Theta(x_1, x_2); \quad (2)$$

д) гипотеза Неймана об отсутствии касательных напряжений [31].

Под действием неоднородного по толщине стационарного температурного поля ($\Theta \neq 0$) происходит выпучивание пластинки (с прогибом $w_T(x_1)$) и, вследствие этого, появляется аэроупругое давление, которое, согласно предположению (в), определяется формулой (1). В линейном приближении для указанного давления получается выражение $\alpha p_{\infty} \sqrt{1+\lambda^2} a_{\infty}^{-1} dw_T / dx_1$.

На основе приведенных уравнений и соответствующих условий на кромках $x_1 = 0$ и $x_1 = a$ пластинки (граничные условия приводятся в ходе изложения) исследуется устойчивость указанного выпученного (невозмущенного) состояния, под действием температурного поля и давления обтекающего сверхзвукового потока газа.

Для определения характеристик невозмущенного состояния, кроме уже принятых предположений, принимаются также следующие:

а) деформации невозмущенного состояния настолько малы, что можно воспользоваться линейной теорией аэро-термо-магнито-упругости;

б) на лицевых поверхностях пластинки ($x_3 = \pm h/2$) происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона-Рихмана (на поверхностях сохраняется постоянная температура со значениями T^+ и T^- соответственно), а боковые поверхности ($x_1 = 0$ и $x_1 = a$) теплоизолированы.

На основе принятых предположений найдено следующее нелинейное дифференциальное уравнение аэро-термо-магнито-упругости:

$$\begin{aligned}
D \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} - N_1^T \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - N_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{d^2 w_T}{dx_1^2} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\rho h \varepsilon + \frac{\alpha p_\infty \sqrt{1+\lambda^2}}{a_\infty} \right) \frac{\partial w}{\partial t} + \\
+ \alpha p_\infty M \sqrt{1+\lambda^2} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \alpha p_\infty M^2 \frac{\alpha + 1 + (\alpha + 4)\lambda^2 + 3\lambda^4}{4(1+\lambda^2)^2} \left[2 \frac{dw_T}{dx_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] \frac{\partial w}{\partial x_1} + \\
+ \alpha p_\infty M^3 \sqrt{1+\lambda^2} \frac{\alpha + 1 + (\alpha + 1)(\alpha + 3)\lambda^2 + (\alpha^2 - 3\alpha + 11)\lambda^4 + (2\alpha + 3)\lambda^6}{12(1+\lambda^2)^4} \times \\
\times \left[3 \frac{dw_T}{dx_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 = 0
\end{aligned} \tag{3}$$

где $M = U a_\infty^{-1}$ - число Маха в невозмущенном потоке газа, $w(x_1, x_2, t)$ - прогиб пластинки, $D = Eh^3 / 12(1-\mu^2)$, E модуль упругости, ρ - плотность, μ - коэффициент Пуассона материала пластинки, ε - линейный коэффициент затухания. Нужно отметить, что уравнение (3) получено предполагая, что $\frac{v_3}{a_\infty} = \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) a_\infty^{-1}$.

Решения уравнения (3) должны удовлетворять условиям закрепления краев пластинки $x_1 = 0$ и $x_1 = a$. Будет рассмотрен случай, когда края пластинки шарнирно оперты и неподвижны вдоль оси Ox_1 .

В (3) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
N_1^T = - \frac{Eh}{1-\mu} \alpha T_0, \\
N_1 = \frac{Eh}{2a(1-\mu^2)} \int_0^a \left(2 \frac{dw_T}{dx_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 \right) dx_1
\end{aligned} \tag{4}$$

где α коэффициент температурного расширения.

Решения уравнения (3) должны удовлетворять следующим условиям:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \quad x_1 = a, \quad (5)$$

которые представляют собой условия шарнирного опирания краев пластинки.

В работе [25] определено температурное поле и выпучивание пластинки в следующем виде

$$T = T_0(x_1) + x_3 \Theta(x_1), \quad (6)$$

$$T_0 = \frac{T^+ + T^-}{2}, \quad \Theta = \frac{k(T^+ - T^-)}{kh - 2\eta}.$$

а прогиб w_T определен методом Бубнова-Галеркина и имеет следующее выражение:

$$w_T(x_1) = -R\Theta \left\{ \frac{1}{2} x_1(x_1 - a) + \frac{a^2 K \nu \sqrt{1 + \lambda^2}}{36 + (K \nu \sqrt{1 + \lambda^2})^2} \left[\frac{3\sqrt{1 + \lambda^2}}{8\pi} K \nu \sin \frac{\pi x_1}{a} + \frac{9}{16\pi} \sin \frac{2\pi x_1}{a} \right] \right\}. \quad (7)$$

В (6) и (7) η - коэффициент теплопроводности, k - коэффициент теплопередачи, а K , ν описаны ниже, формулой (10).

Метод решения. Полученную нелинейную задачу (3)–(5) решаем приближенно, представляя решение в виде [10]

$$w(x_1, t) = \sum_{i=1}^N f_i(t) \sin \lambda_i x_1, \quad \left(\lambda_i = \frac{i\pi}{a} \right), \quad (8)$$

где $f_i(t)$ являются функциями времени t , которые необходимо определить.

Представление (8) удовлетворяет граничным условиям, перечисленным в уравнении (5). Подставляя формулу (8) в уравнение (3) и используя метод Бубнова-Галеркина, получается нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $f_i(t)$.

В работе будем использовать биномиальное приближение [2,31]:

$$w = f_1(t) \sin \lambda_1 x + f_2(t) \sin \lambda_2 x.$$

Подставляя решение в указанном виде в уравнение (3) и применяя известный метод ортогонализации, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Затем с помощью безразмерных функций $x_i = f_i(t)/h$ выводится нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{d\tau^2} + \chi \frac{dy_1}{d\tau} + (1 - \bar{T}) y_1 - \frac{2}{3} K \bar{v} y_2 + \alpha_{11}^\lambda y_1^2 + \alpha_{12}^\lambda y_2^2 + y_2 [\beta_{11}^\lambda y_1^2 + \beta_{12}^\lambda y_2^2] + \\ + 3y_1 [y_1^2 + \gamma y_2^2] + \bar{\Theta} [\delta_{11}^{\lambda, \Theta} y_1 + \delta_{12}^{\lambda, \Theta} y_2 + (\alpha_{11}^{\lambda, \Theta} + \alpha_{11}^\Theta) y_1^2 + \\ + (\alpha_{12}^{\lambda, \Theta} + \alpha_{12}^\Theta) y_2^2 + (\alpha_{13}^{\lambda, \Theta} + \alpha_{13}^\Theta) y_1 y_2] = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_2}{d\tau^2} + \chi \frac{dy_2}{d\tau} + \frac{2}{3} K \bar{v} y_1 + \gamma (\gamma - \bar{T}) y_2 + \alpha_{21}^\lambda y_1 y_2 + y_1 [\beta_{21}^\lambda y_1^2 + \beta_{22}^\lambda y_2^2] + \\ + 3\gamma y_1 [y_1^2 + \gamma y_2^2] + \bar{\Theta} [\delta_{21}^{\lambda, \Theta} y_1 + \delta_{22}^{\lambda, \Theta} y_2 + (\alpha_{21}^{\lambda, \Theta} + \alpha_{21}^\Theta) y_1^2 + \\ + (\alpha_{22}^{\lambda, \Theta} + \alpha_{22}^\Theta) y_2^2 + (\alpha_{23}^{\lambda, \Theta} + \alpha_{23}^\Theta) y_1 y_2] = 0, \end{aligned}$$

где, вместе с безразмерным временем $\tau = \Omega_1 t$, введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{T} = RT_0 \left(\frac{a}{h} \right)^2 \left(\frac{12}{\pi^2} \right), \quad \bar{\Theta} = R \Theta h \left(\frac{a}{h} \right)^2 \frac{1}{36 + K^2 \bar{v}^2}, \\ R = \alpha (1 + \mu), \\ K = \frac{4 \mathfrak{a} p_\infty}{\rho \omega_1^2 h^2}, \quad \bar{v} = M \sqrt{1 + \lambda^2} \frac{h}{a}, \\ \omega_i = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left(\frac{i\pi}{a} \right)^2 \quad (i = 1, 2), \quad \gamma = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \chi = \frac{1}{\omega_1} \left(\varepsilon + \frac{a_\infty \rho_\infty \sqrt{1 + \lambda^2}}{\rho h} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

коэффициенты, учитывающие только магнито-аэро-динамическое влияние:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^\lambda = \frac{A}{12}, \quad \alpha_{12}^\lambda = \frac{7A}{15}, \quad \alpha_{21}^\lambda = \frac{2A}{15}, \\ \beta_{11}^\lambda = \beta_{21}^\lambda = \frac{B}{30}, \quad \beta_{12}^\lambda = -\frac{6B}{35}, \quad \beta_{22}^\lambda = \frac{22B}{105}, \end{aligned} \quad (11)$$

коэффициенты, учитывающие только термо-аэро-динамическое влияние:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^\Theta = \frac{9C}{8}, \quad \alpha_{12}^\Theta = \frac{3C}{2}, \quad \alpha_{13}^\Theta = \alpha_{21}^\Theta = -\frac{27}{2\pi} K \bar{v}, \\ \alpha_{22}^\Theta = -\frac{81}{\pi} K \bar{v}, \quad \alpha_{23}^\Theta = 3C, \end{aligned} \quad (12)$$

коэффициенты, учитывающие совокупное магнито-термо-аэро-динамическое влияние:

$$\begin{aligned}
\delta_{11}^{\lambda, \Theta} &= \frac{9A}{4}, \quad \delta_{12}^{\lambda, \Theta} = -\frac{21A}{40}K\bar{v}, \quad \delta_{21}^{\lambda, \Theta} = -\frac{3A}{40}K\bar{v}, \quad \delta_{22}^{\lambda, \Theta} = \frac{(180 + K^2\bar{v}^2)A}{80}, \\
\alpha_{11}^{\lambda, \Theta} &= -\frac{3B}{160}K\bar{v}, \quad \alpha_{12}^{\lambda, \Theta} = \frac{81B}{280}K\bar{v}, \quad \alpha_{13}^{\lambda, \Theta} = \frac{(180 + K^2\bar{v}^2)B}{160}, \\
\alpha_{21}^{\lambda, \Theta} &= \frac{(900 + K^2\bar{v}^2)B}{640}K\bar{v}, \quad \alpha_{22}^{\lambda, \Theta} = \frac{(630 + K^2\bar{v}^2)B}{210}K\bar{v}, \quad \alpha_{23}^{\lambda, \Theta} = -\frac{33B}{140}K\bar{v}.
\end{aligned}
\tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1 + \varkappa + 3\lambda^2}{(1 + \lambda^2)^2} K\bar{v}^2, \quad C = \frac{1152 + (32 - 3\pi^2)K^2\bar{v}^2}{\pi^3}, \\
B &= \frac{\pi(\varkappa + 1 + (\varkappa + 1)(\varkappa + 3)\lambda^2 + (\varkappa^2 - 3\varkappa + 11)\lambda^4 + (2\varkappa + 3)\lambda^6)}{(1 + \lambda^2)^5} K\bar{v}^3.
\end{aligned}
\tag{14}$$

В приведенных выше уравнениях и обозначениях χ , v , λ , \bar{T} , $\bar{\Theta}$ - параметры, характеризующие процесс затухания, скорость потока, магнитное и температурное поле соответственно.

Соответствующая задача устойчивости рассматриваемой магнито-аэро-термоупругой системы в первом приближении получается из решений системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (9), зависящих от скорости потока v , температуры (\bar{T} , $\bar{\Theta}$) и магнитного поля (λ). В работе [25] детально рассмотрена эта линейная задача, построены области устойчивости и исследовано влияние магнитного поля на эти области.

Флаттерные нелинейные колебания. Зависимость амплитуда-скорость. Начнём изучение нелинейной системы (9), которая содержит члены с квадратичными нелинейностями, которые характеризуют асимметрию нелинейности, присущую проблемам устойчивости гибких оболочек. Будем искать приближенное периодическое решение уравнений (9) в следующей форме [15]

$$\begin{aligned}
z_1 &= C_1 + A_1 \cos \theta\tau + B_1 \sin \theta\tau + \dots \\
z_2 &= C_2 + A_2 \cos \theta\tau + B_2 \sin \theta\tau + \dots
\end{aligned}
\tag{15}$$

где A_i , B_i , C_i и θ ($i = 1, 2$) неизвестные постоянные. Точками обозначены члены с высшими гармониками.

Подставляя (15) в (9) и приравнявая к нулю коэффициенты при свободных членах, $\cos \theta\tau$ и $\sin \theta\tau$, и пренебрегая членами с высшими гармониками, аналогично [10], получим систему нелинейных алгебраических уравнений. Далее, выражая B_1, C_1 и

B_2, C_2 через A_1 и A_2 , получим следующую систему, определяющую характеристики амплитуд колебаний рассматриваемой магнито-аэроупругой системы A_1 и A_2 в зависимости от параметров θ, ν и λ :

$$\begin{aligned}
& A_1(1 - \bar{T} - \theta^2) - \frac{2}{3} K \bar{\nu} A_2 + \bar{\Theta}(\delta_{11}^{(\lambda, \theta)} A_1 + \delta_{12}^{(\lambda, \theta)} A_2) + \\
& + 2\alpha_{11}^\lambda A_1 C_1 + 2\bar{\Theta}(\alpha_{11}^\theta + \alpha_{11}^{(\lambda, \theta)}) A_1 C_1 + 2\alpha_{12}^\lambda A_2 C_2 + 2\bar{\Theta}(\alpha_{12}^\theta + \alpha_{12}^{(\lambda, \theta)}) A_2 C_2 + \\
& + \frac{3}{4} A_2 (\beta_{11}^\lambda A_1^2 + \beta_{12}^\lambda A_2^2) + \frac{9}{4} A_1 (A_1^2 + \gamma A_2^2) + \bar{\Theta}(\alpha_{13}^\theta + \alpha_{13}^{(\lambda, \theta)}) (A_1 C_2 + A_2 C_1) = 0, \\
& A_1(\gamma(\gamma - \bar{T}) - \theta^2) + \frac{2}{3} K \bar{\nu} A_2 + \bar{\Theta}(\delta_{21}^{(\lambda, \theta)} A_1 + \delta_{22}^{(\lambda, \theta)} A_2) + 2\alpha_{21}^\lambda (A_1 C_2 + A_2 C_1) + \\
& + 2\bar{\Theta}[(\alpha_{21}^\theta + \alpha_{21}^{(\lambda, \theta)}) A_1 C_1 + (\alpha_{22}^\theta + \alpha_{22}^{(\lambda, \theta)}) A_2 C_2] + \tag{16} \\
& + \frac{3}{4} A_1 (\beta_{21}^\lambda A_1^2 + \beta_{22}^\lambda A_2^2) + \frac{9}{4} \gamma A_2 (A_1^2 + \gamma A_2^2) + \bar{\Theta}(\alpha_{23}^\theta + \alpha_{23}^{(\lambda, \theta)}) (A_1 C_2 + A_2 C_1) = 0
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
C_1 &= -\frac{1}{2\Delta} [M_1 \Delta_2 - M_1 \Delta_4] \\
C_2 &= -\frac{1}{2\Delta} [M_2 \Delta_1 - M_1 \Delta_3] \tag{17}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
M_1 &= \alpha_{11}^\lambda A_1^2 + \alpha_{12}^\lambda A_2^2 + \bar{\Theta}[(\alpha_{11}^\theta + \alpha_{11}^{(\lambda, \theta)}) A_1^2 + (\alpha_{12}^\theta + \alpha_{12}^{(\lambda, \theta)}) A_2^2 + (\alpha_{13}^\theta + \alpha_{13}^{(\lambda, \theta)}) A_1 A_2] \\
M_2 &= \alpha_{21}^\lambda A_1 A_2 + \bar{\Theta}[(\alpha_{21}^\theta + \alpha_{21}^{(\lambda, \theta)}) A_1^2 + (\alpha_{22}^\theta + \alpha_{22}^{(\lambda, \theta)}) A_2^2 + (\alpha_{23}^\theta + \alpha_{23}^{(\lambda, \theta)}) A_1 A_2] \\
\Delta_1 &= 1 - \bar{T} + \frac{9}{2} A_1^2 + \frac{3}{2} \gamma A_2^2 + \beta_{11}^\lambda A_1 A_2 + \bar{\Theta} \delta_{11}^{(\lambda, \theta)} \\
\Delta_2 &= \gamma(\gamma - \bar{T}) + \frac{3}{2} \gamma A_1^2 + \frac{9}{2} \gamma^2 A_2^2 + \beta_{22}^\lambda A_1 A_2 + \bar{\Theta} \delta_{22}^{(\lambda, \theta)} \\
\Delta_3 &= \frac{2}{3} K \bar{\nu} + \frac{3}{2} \beta_{21}^\lambda A_1^2 + \frac{1}{2} \beta_{22}^\lambda A_2^2 + 3\gamma A_1 A_2 \\
\Delta_4 &= -\frac{2}{3} K \bar{\nu} + \frac{3}{2} \beta_{12}^\lambda A_2^2 + \frac{1}{2} K \nu^3 \beta_{11}^\lambda A_1^2 + 3\gamma A_1 A_2 \\
\Delta &= \Delta_1 \Delta_2 - \Delta_3 \Delta_4.
\end{aligned}$$

Таким образом, задача определения амплитуды колебаний флаттерных колебаний в зависимости от характеристик магнитного и температурного полей, скорости потока и частоты колебаний сводится к решению нелинейной системы (16).

Учитывая, что задача многопараметровая, как и в работе [10], исследование проводится при разных значениях частоты колебаний. В настоящей работе рассматривается только случай докритических частот $\theta < \theta_{cr}$ и численное исследование проведено для постоянных и переменных температур и исследовано влияние магнитного поля на рассматриваемую зависимость.

Численные расчеты произведены для пластин, построенных из Зеродура при $\alpha = 23.8 \cdot 10^{-6}$ град⁻¹; $k = 1200$ Вт/(м² град); $\lambda = 210$ Вт/(м град); $\mu = 0.34$; $a = 1$ м; $h/a = 1/100$ [29].

При постоянных отрицательных температурах и при отсутствии магнитного поля указанная зависимость исследована в работе [12]. Установлено, что функция $A(v)$ имеет точку минимума и определена при любом значении скорости набегающего потока. При этом показано, что функция $A(v)$ является однозначной в интервале $v \in [0, v_*]$, значение v_* мы назвали нижней критической скоростью и показано, что $v_* < v_{cr}$. Начиная с $v > v_*$ появляется вторая (возможно, неустойчивая) ветвь амплитуды, которая также имеет точку максимума. С увеличением скорости потока, появляется значение \bar{v} такое, что при $v \geq \bar{v}$ появляется возможность возбуждения монотонно убывающих установившихся колебаний. Таким образом, на всей области определения функция $A(v)$ может быть как однозначной, так и многозначной.

Произведенные многочисленные расчеты показывают, что учет магнитного поля качественно изменяет указанную картину и, следовательно, поведение зависимости $A(v)$. А именно, характер рассматриваемой функции принимает монотонный характер, принимает нулевое значение в точке v_* и при выбранных нами геометрических параметрах пластинки, магнитное поле приводит к появлению зон молчания. Зоной молчания назовем тот интервал изменения скорости, в котором не могут быть вызваны флаттерные колебания. На рис.2 показан случай $\lambda = 1$, из которого видно, что если $v \in [0, v_*]$, то функция $A(v)$ монотонно убывает, достигая нулевого значения $A(v_*) = 0$, при этом магнитное поле не оказывает существенного влияния на значения амплитуды и нижней критической скорости. С увеличением скорости набегающего потока появляется конечный интервал изменения скорости $[v_1, v_2]$, где возможно возбудить установившиеся флаттерные колебания. При выбранных геометрических параметрах и параметра магнитного поля зонами молчания являются $[v_*, v_1]$ и $[v_2, \bar{v}]$.

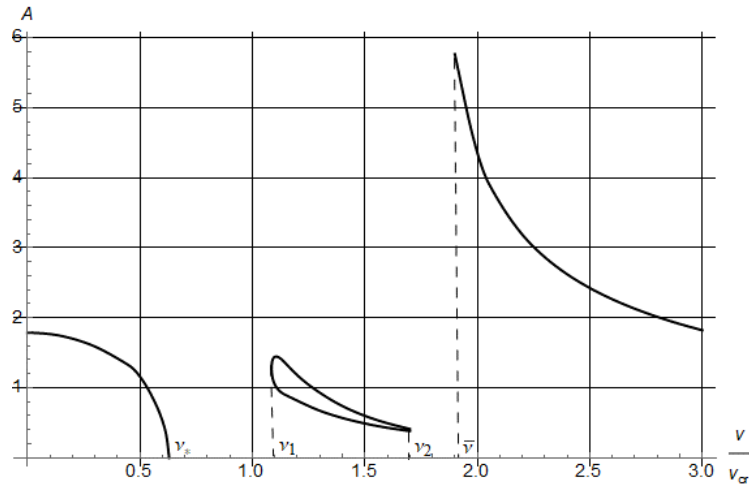


Рис.2. Зависимость амплитуда-скорость в присутствии магнитного поля ($\lambda = 1$) и $T_0 = -50, \bar{\Theta} = 0$

Дальнейшее увеличение значения параметра магнитного поля приводит к следующей картине: $V_2 \rightarrow V_1$, значение \bar{v} увеличивается, и следовательно, увеличивается длина интервала зоны молчания (Рис.3).

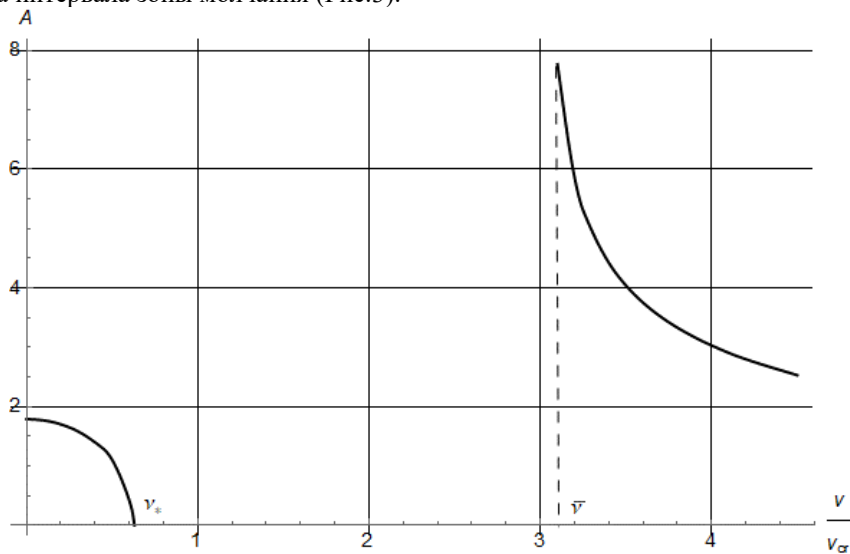


Рис.3. Зависимость амплитуда-скорость в присутствии сравнительно сильного магнитного поля ($\lambda = 2$) и $T_0 = -50, \bar{\Theta} = 0$

Сравнивая опять с результатами работы [12], установлено, что при положительных постоянных температурах ($T_0 > 0, \bar{\Theta} = 0$) магнитное поле оказывает только количественное влияние на зависимость амплитуда-скорость.

При $T_0 = 0, \bar{\Theta} \neq 0$ и отсутствии магнитного поля ($\lambda = 0$), градиент температурного поля не оказывает существенного влияния на характер функции $A(v)$ и она аналогична предыдущему случаю. Учет и дальнейшее увеличение параметра магнитного поля приводит к расширению зоны молчания и, следовательно, начиная с определенного значения магнитного поля, можно возбуждать флаттерные колебания только в определенном конечном интервале изменения параметра скорости $v \in [0, v_*]$.

При докритических частотах, близких к критической, исследование приводит к картине, приведенной на рис.4.

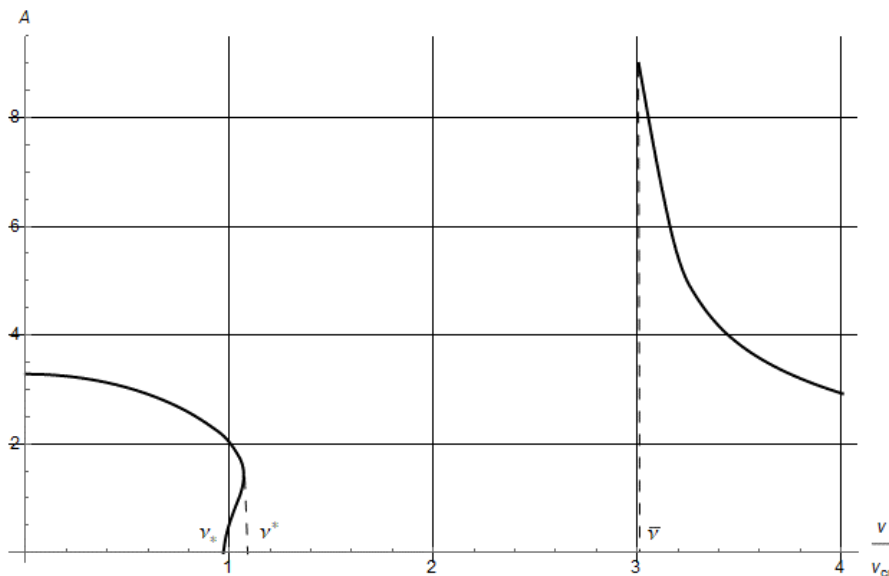


Рис.4. Зависимость амплитуда-скорость в присутствии сравнительно сильного магнитного поля ($\lambda = 2$) и $T_0 = -50, \bar{\Theta} = 0$

Когда $T_0 \neq 0, \bar{\Theta} \neq 0$, то совокупное влияние температурных составляющих приводит к соотношениям, которые уже были описаны.

Выводы. В данной работе показано, что учет магнитного поля приводит как к качественным, так и к количественным изменениям зависимости амплитуда-скорость рассматриваемой аэро-термо-магнито-упругой системы по сравнению с чисто аэроупругой или аэро-термо-упругой задачами.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 25RG-2C167.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ashley H. and Zartarian C. Piston Theory—A New Aerodynamic Tool for the Aeroelastician, *J. Aeronaut. Sci.*, 1956, vol. 23, no. 6, pp. 1109–1118.
2. Bagdasaryan G.Y. An asymptotic method to study magnetoelastic oscillations of rectangular plates. *Mat. methods and phys.-mech. fields*, 1986, N24, p.72-75.
3. Bagdasaryan G.Y. Nonlinear flutter equations for thin plates in a magnetic field. *Interuniversity collection of scientific papers, Mechanics*, Yerevan: YSU Publishing House, 1982, issue 2, p.22-30.
4. Baghdasaryan G., Mikilyan M., Saghoyan R., Cestino E. Frulla G., Marzocca P. Nonlinear LCO “amplitude–frequency” characteristics for plates fluttering at supersonic speeds. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Volume 77, December 2015, Pages 51–60.
5. Baghdasaryan G., Mikilyan M., Vardanyan I., Danoyan E.H., Melikyan K. Influence of boundary conditions on the aero-thermo-elastic stability of a closed cylindrical shell. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1474 (2020) 012008*; doi:10.1088/1742-6596/1474/1/012008
6. Baghdasaryan G., Mikilyan M., Vardanyan I., Melikyan K.V., Marzocca P. Thermoelastic non-linear flutter oscillations of rectangular plate. *Journal of Thermal stresses*, 2021, vol.44(6), pp. 731-754.
7. Baghdasaryan G., Mikilyan M., Vardanyan I., Panteleev A., Severina N.S. Nonlinear flutter response of cylindrical shell in thermal field and supersonic gas flow. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 2020, 927(1), 012022; doi:10.1088/1757-899X/927/1/012022.
8. Baghdasaryan G., Panteleev A.V., Mikilyan M.A. Mathematical Modeling of the Problem of Magneto-Aero-Elastic Stability of Rectangular Plate. *Advances in Theory and Practice of Computational Mechanics*, Springer Singapore, 2022, pp 13–27. https://doi.org/10.1007/978-981-16-8926-0_2
9. Baghdasaryan G.Y., Belubekyan M.V. Vibrations and stability of cylindrical shell in conductive gas flow, magnetic field is being present. 1966, p.120-125.
10. Baghdasaryan G., Mikilyan M. *Effects of Magnetoelastic Interactions in Conductive Plates and Shells*. Springer, 2016, -286p.
11. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Marzocca, P. Supersonic flutter characteristics of dielectric rectangular plate: The effects of magneto-aero-hydrodynamic interactions. *Journal of Fluids and Structures*, 2023, 118, 103856, <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2023.103856>
12. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A. *Magnetoelastic Vibrations and Stability of Magnetically Active Plates and Shells*. Springer, 2024.
13. Bolotin V.V. *Non-conservative problems of the theory of elastic stability*. – Moscow, Fizmatgiz, 1961. -339 p.
14. Borghi C.A., Carraro M.R., and Cristofolini A., “Analysis of Magnetoplasmadynamic Interaction in the Boundary Layer of a Hypersonic Vehicle”, *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 41, No. 4, 2004.
15. Borghi C.A., Carraro M.R., and Cristofolini A., “Magnetohydrodynamics Interaction in

- the Shock Layer of a Wedge in a Hypersonic Flow”, IEEE Transaction on Plasma Science, vol. 34, no. 5, October 2006.
16. Chebotaryev N.V., Meyman N.S. Gauss-Hurwitz problem for polynomials and integer-valued functions. Proc. AN SSSR, 1949.
 17. Cristofolini A. et al., “Experimental Investigation on the MHD Interaction around a Sharp Cone in an Ionized Argon Flow”, AIAA-2006-3075, 37th AIAA Plasma dynamics and Lasers Conference, San Francisco, California, June 2006
 18. Dowell. E.H. “Nonlinear oscillations of a fluttering plate.” AIAA Journal, Vol. 4, No. 7, 1966, pp. 1267-1275. DOI: 10.2514/3.3658.
 19. Dowell. E.H. “Nonlinear oscillations of a fluttering plate. II.” AIAA Journal, Vol. 5, No. 10, 1967, pp. 1856-1862. doi:10.2514/3.4316.
 20. Mikilyan M.A. Nature of Supersonic Flutter of Aero-Magneto-Elastic System at Pre-Critical Flowing Speeds. IEEE Aerospace Conference Proceedings, 2024, p.529-537, DOI:10.1109/aero58975.2024.10521224
 21. Mikilyan M.A. Thermoelastic Response of Closed Cylindrical Shells in a Supersonic Gas Flow. Aerospace 2020, 7(8), 103; <https://doi.org/10.3390/aerospace7080103>
 22. Mikilyan M.A., Vardanyan I.A. The effects of magnetic field on supersonic flutter characteristics of dielectric plate: Dependence amplitude-speed. Journal of Fluids and Structures, 2024, vol. 128, 104140, DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2024.104140.
 23. Miles J. W., Supersonic flutter of a cylindrical shell, Journal of Aeronautical Science Vol. 24, No. 2, 1957; Vol. 25, No. 5, 1958, pp.107-118.
 24. Микилян М.А., Амбарцумян А.Г., Варданян И.А. Влияние магнитного поля на критическую скорость сверхзвукового флаттера диэлектрической пластины. Известия НАН РА, Механика, т.77 (2), 2024, стр.47-67, DOI: 10.54503/0002-3051-2024.77.2-47
 25. Микилян М., Тоноян В., Честино Э. Аэро-термо-магнито-упругая устойчивость удлиненной пластинки в сверхзвуковом потоке газа. Известия НАН РА, Механика, т.78 (2), 2025, стр.43-58, DOI: 10.54503/0002-3051-2025.78.2-43
 26. Mikilyan M.A., Tonoyan V.U., Cestino E. Effect of magnetic field on critical speed of aero-thermo-elastic oscillations of high aspect ratio plate. In book: TOPICAL PROBLEMS OF CONTINUUM MECHANICS, Proceedings of IX International Conference, 22-26 September 2025, Tsaghkadzor, Armenia, p.303-308.
 27. Pantelev A.V., Mikilyan M.A., Vardanyan I.A. Stability of a dielectric rectangular plate in a longitudinal magnetic field in the presence of a supersonic flow field. Aerospace Systems, 2023, 6, 605–611. DOI:10.1007/s42401-023-00217-6
 28. Resler, R. L., and Sears, W. R., “The Prospects for Magneto-Aerodynamics,” Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 25, No. 4, 1958, pp. 235-245, 258.
 29. Russell R. Zerodur. OPTI521, 2011.
 30. Vlasov V. Z. The General Theory of Shells, Gostekhizdat, Moscow, 1949.
 31. Volmir S. Non-linear Dynamics of Plates and Shells, Nauka, Moscow, 1972.

Сведения об авторах:

Микилян Марине Александровна – кандидат физ.-мат. наук., доцент, ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА
Phone: (+374 91) 191129; E-mail: mikilyan@sci.am

Варданын Ирэн Арменовна – кандидат физ.-мат. наук., внештатный научный сотрудник Института механики НАН РА
Phone: (+374 55) 344473; E-mail: irena_123@bk.ru

Сагоян Рафаел Оникович – кандидат физ.-мат. наук.
Phone: (+374 93) 248226; E-mail: rafael1984@mail.ru

Поступила в редакцию 15.02.2026