

**ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕМАТИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ
УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ АСИМПТОТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ**

Гукасян А.А.

Ключевые слова: упругая пластинка, асимптотический метод, обобщенные координаты, колебательное движение, кинематические величины.

Ghukasyan A.A.

Investigation of the Kinematics of Rotational Motion of an Elastic Plate by the Asymptotic Method

Keywords: elastic plate, asymptotic method, generalized coordinates, oscillatory motion, kinematic quantities.

Abstract: The kinematics of rotational motion of an elastic plate, one side of which is rigidly fixed to the axis of rotation, and the others are free, is investigated. Within the framework of the main hypotheses on which the mathematical models and theory of thin plates are based, the kinematics of rotational motion of an elastic plate depending on the deflection of the median plane are determined by the asymptotic method of separation of motions. An estimate is given for additional quantities due to the elastic compliance of the plate. The results of the study can be applied in problems of dynamics and control of oscillatory motion of mechanical systems, the designs of which contain elastic plates of high rigidity.

Դուկասյան Ա.Ա.

**Առաձգական սալի պտտական շարժման կինեմատիկայի
ուսումնասիրումը ասիմպտոտիկ մեթոդով**

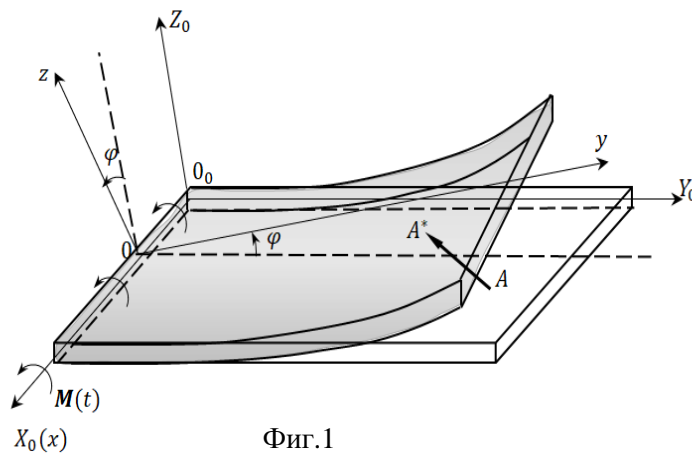
Հիմնաբառեր՝ առաձգական սալ, ասիմպտոտիկ մեթոդ, ընդհանրացված կոորդինատներ, տատանողական շարժում, կինեմատիկական մեծություններ:

Ուսումնասիրվում է առաձգական սալի պտտական շարժման կինեմատիկան, որի մեկ կողմը կոշտ ամրացված է պտտման առանցքին, իսկ մյուսները ազատ են: Բարակ սալերի մաթեմատիկական մոդելների և տեսության հիմքում ընկած հիմնարար վարկածների շրջանակներում, ասիմպտոտիկ մեթոդով որոշվում է առաձգական սալի պտտական շարժման կինեմատիկական մեծությունները կախված սալի միջին հարթության կետերի առաձգական շեղումից: Ներկայացվում է սալի առաձգականությամբ պայմանավորված լրացուցիչ կինեմատիկական մեծությունների գնահատականները: Ուսումնասիրության արդյունքները կարող են կիրառվել մեխանիկական համակարգերի տատանողական շարժման դինամիկայի և դեկավարման խնդիրներում, որոնց կառուցվածքները պարունակում են բարձր կոշտության առաձգական սալեր:

Исследуется кинематика вращательного движения упругой пластинки, одна сторона которой жестко закреплена к оси вращения, а другие свободны. В рамках основных гипотез, на которых основаны математические модели и теория тонких пластин, кинематика вращательного движения упругой пластинки в зависимости от прогиба срединной плоскости, определены асимптотическим методом разделения движений. Дана оценка дополнительных величин обусловленных упругой податливостью пластинки. Результаты исследования могут быть применены в задачах динамики и управления колебательным движением механических систем, конструкции которых содержат упругие пластинки большой жесткости.

Введение. Исследования кинематики движения упругой пластинки являются актуальными, поскольку они находят широкие применения во многих отраслях современной техники [1-3]. Колебательные процессы пластинки во время движения

механических систем существенно влияют на качество выполняемых работ. Результаты исследования колебательного движения дадут возможность, при проектировании систем управления, учитывать те дополнительные воздействия, которые обусловлены упругостью. Ниже рассматривается изотропная прямоугольная пластинка $(a \times b)$, одна сторона которой жестко закреплена, а другие свободны. Пластинка, постоянной толщины h , характеризуется цилиндрической жесткостью на изгиб D и плотностью ρ . Колебательное движение происходит в вертикальной плоскости $Y_0O_0Z_0$ (Фиг.1) и



Фиг.1

оно осуществляется вращательным моментом сил $\mathbf{M}(t)$, приложенным к оси вращения O_0X_0 . Координатная плоскость $X_0O_0Y_0$ совпадает со срединной плоскостью пластинки.

Обобщенную координату движения пластинки обозначим через $\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – угол между плоскостью $X_0O_0Y_0$ и плоскостью, проходящей через неподвижную прямую O_0X_0 и являющейся касательной к срединной поверхности деформируемой пластинки в любой точке оси O_0X_0 . Исследование проводится на основе гипотез, предложенных Кирхгофом [4,5]. В [6] приведено подробное описание упругой модели пластинки и результаты исследования кинематики вращательного движения прямоугольной пластинки методом классической механики [7,8].

1.Обобщенные координаты, определяющие положение точек упругой пластинки. Следуя работам [9,10], приведем общие формулы, определяющие положение точек пространственного упругого тела

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}), \mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)^T, \quad (1.1)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T, \mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$$

где компонентами вектора $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ являются все параметры, определяющие положение абсолютно твердого тела в пространстве, а компонентами вектора $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ - все параметры, которые обусловлены упругостью тела. В частности $\alpha_j (j = 1, 2, \dots, n)$ могут быть координатами точки (полюса) в пространстве, углы Эйлера, определяющие положение тела относительно подвижной системы координат, или другими параметрами, зависящими от указанных величин. В качестве параметра $u_k(x, y, z, t) (k = 1, 2, \dots, m)$ - могут быть компоненты вектора упругих смещений точек тела.

Кинематика движений упругих тел исследуется на основе соотношения (1.1), где $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{u})$ - заданная вектор-функция от вектора аргументов. Параметры $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, u_1, u_2, \dots, u_m)$ в количестве $(n + m)$ назовем обобщенными координатами точек упругого тела (число точек упругого тела стремится к бесконечности).

Предполагается, что координаты $u_k(x, y, z, t) (k = 1, 2, \dots, m)$ малы, а характерная величина жесткости тела велика, то есть

$$u_k(x, y, z, t) \sim \varepsilon, C \sim \varepsilon^{-1} (k = 1, 2, \dots, m), \quad (1.2)$$

$$\dot{u}_k(x, y, z, t) \sim \varepsilon, u'_k(x, y, z, t) \sim \varepsilon, t \sim 1 (k = 1, 2, \dots, m) \quad (1.3)$$

где $\varepsilon \ll 1$ - малый параметр (частные производные по x, y, z обозначены штрихом, а по t - точкой).

Заметим, что движение упругого тела происходит на конечном интервале времени, а в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ упругое тело становится абсолютно твердым. Предположение (1.2), (1.3) позволяют исследовать кинематику движений упругих тел асимптотическим методом малого параметра [11, 12].

Формула Тейлора для (1.1) относительно $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ с точностью до ε^2 является

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{a}, 0) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{a}, 0)}{\partial u_k} u_k(x, y, z) + o(\varepsilon^2) \quad (1.4)$$

Представим (1.4) в виде

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{f}^*(\mathbf{a}, \mathbf{u}), \quad (1.5)$$

$$\text{где } \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}, 0), \mathbf{f}^*(\mathbf{a}, \mathbf{u}) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{a}, 0)}{\partial u_k} u_k(x, y, z), \mathbf{f}^*(\mathbf{a}, 0) \equiv 0$$

Из (1.4) и (1.5) следует, что в рамках линейной модели, поведение упругого тела можно описать в пределах абсолютно жесткой модели, путем введения дополнительных величин $\mathbf{f}^*(\mathbf{a}, \mathbf{u})$, обусловленных упругостью тела.

Отметим, что компоненты вектора перемещений точек прямоугольной пластинки, на основе гипотез, предложенных Кирхгофом [4,5], являются функциями прогиба ($u_3(x, y, t)$) срединной плоскости пластинки, то есть

$$u_1 = -z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial x}, \quad u_2 = -z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y}, \quad u_3 = u_3(x, y, t) \quad (1.6)$$

Формулы (1.1), (1.4) и (1.5), определяющие положение точек упругой пластинки (Фиг.1), являются [6]

$$f_1(\varphi, \mathbf{u}) = x - z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial x},$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\varphi, \mathbf{u}) \quad f_2(\varphi, \mathbf{u}) = \left(y - z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \right) \cos \varphi - (z + u_3(x, y, t)) \sin \varphi \quad (1.7)$$

$$f_3(\varphi, \mathbf{u}) = \left(y - z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \right) \sin \varphi + (z + u_3(x, y, t)) \cos \varphi$$

Здесь

$$f_1(\varphi, 0) = x, \quad f_2(\varphi, 0) = y \cos \varphi - z \sin \varphi, \quad f_3(\varphi, 0) = y \sin \varphi + z \cos \varphi$$

$$f_1^*(\varphi, \mathbf{u}) = -z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial x}$$

$$f_2^*(\varphi, \mathbf{u}) = -z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \cos \varphi - u_3(x, y, t) \sin \varphi \quad (1.8)$$

$$f_3^*(\varphi, \mathbf{u}) = -z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \sin \varphi + u_3(x, y, t) \cos \varphi$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\varphi) + \mathbf{f}^*(\varphi, \mathbf{u}) \quad (1.9)$$

Для точек срединной плоскости ($z = 0$), имеем

$$f_1(\varphi, \mathbf{u}) = x \quad f_1(\varphi, 0) = x$$

$$f_2(\varphi, \mathbf{u}) = y \cos \varphi - u_3(x, y, t) \sin \varphi, \quad f_2(\varphi, 0) = y \cos \varphi - z \sin \varphi,$$

$$f_3(\varphi, \mathbf{u}) = y \sin \varphi + u_3(x, y, t) \cos \varphi \quad f_3(\varphi, 0) = y \sin \varphi + z \cos \varphi$$

$$f_1^*(\varphi, \mathbf{u}) = 0, \quad f_2^*(\varphi, \mathbf{u}) = -u_3(x, y, t) \sin \varphi, \quad f_3^*(\varphi, \mathbf{u}) = u_3(x, y, t) \cos \varphi$$

Обобщенные координаты, определяющие положение точек упругой пластинки в каждый момент времени, являются:

$$\left(\varphi, u_1(x, y, z, t), u_2(x, y, z, t), u_3(x, y, t) \right).$$

2. Скорость движения упругой пластинки. Определим скорость движения точек упругой пластинки асимптотическим методом разделения движений. Общие

асимптотические формулы [9], определяющие скорость движения точек упругого тела, для рассматриваемой модели пластинки имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\varphi})\dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})\dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})\dot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_1(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}) + \mathbf{v}_2(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})\end{aligned}\quad (2.1)$$

где $\mathbf{v}_1(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}) = \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\varphi})\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ определяет скорость движения абсолютно твердой пластинки, $\mathbf{v}_2(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})\dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})\dot{\mathbf{u}}$ - дополнительный вектор скорости, обусловленный упругостью пластинки, а $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi, 0, 0)^T$. Заметим, что $\mathbf{v}_2(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}, 0, 0) \equiv 0$.

Матрица $\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha})$ (2.1), согласно (1.9), имеет вид

$$\mathbf{F}_1(\boldsymbol{\varphi}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -y \sin \varphi - z \cos \varphi & 0 & 0 \\ y \cos \varphi - z \sin \varphi & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad (2.2)$$

Компонентами вектора скорости (2.1) движения абсолютно твердой пластинки являются

$$\mathbf{v}_1(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}) = \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\varphi})\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -y \sin \varphi - z \cos \varphi & 0 & 0 \\ y \cos \varphi - z \sin \varphi & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\quad (2.3)$$

$$v_{1,1} = 0, v_{1,2} = -y\dot{\varphi} \sin \varphi - z\dot{\varphi} \cos \varphi, v_{1,3} = y\dot{\varphi} \cos \varphi - z\dot{\varphi} \sin \varphi\quad (2.4)$$

Определим элементы матрицы $\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})$ (2.1) согласно (1.9)

$$\frac{\partial f_1^*(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})}{\partial \varphi} = 0, \frac{\partial f_2^*(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})}{\partial \varphi} = z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \sin \varphi - u_3(x, y, t) \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial f_3^*(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})}{\partial \varphi} = -z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \cos \varphi - u_3(x, y, t) \sin \varphi$$

$$\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \sin \varphi - u_3(x, y, t) \cos \varphi & 0 & 0 \\ -z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \cos \varphi - u_3(x, y, t) \sin \varphi & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad (2.5)$$

Первое слагаемое вектора скорости $\mathbf{v}_2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$ определяется следующим образом

$$\mathbf{v}_2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})\dot{\boldsymbol{\varphi}} \quad (2.6)$$

Компонентами первого слагаемого вектора скорости $\mathbf{v}_2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$ являются

$$(\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})\dot{\boldsymbol{\varphi}})_1 = 0, (\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})\dot{\boldsymbol{\varphi}})_2 = z\dot{\boldsymbol{\varphi}} \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \sin \varphi - \dot{\boldsymbol{\varphi}} u_3(x, y, t) \cos \varphi \quad (2.7)$$

$$(\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})\dot{\boldsymbol{\varphi}})_3 = -z\dot{\boldsymbol{\varphi}} \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \cos \varphi - \dot{\boldsymbol{\varphi}} u_3(x, y, t) \sin \varphi$$

Для определения второго слагаемого вектора скорости определим элементы матрицы $\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})$ (2.1) согласно (1.8)

$$\frac{\partial f_1^*(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})}{\partial u_1} = -1, \frac{\partial f_1^*(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})}{\partial u_2} = \frac{\partial f_1^*(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})}{\partial u_3} = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial f_2^*(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})}{\partial u_1} = 0, \frac{\partial f_2^*(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})}{\partial u_2} = -\cos \varphi, \frac{\partial f_2^*(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})}{\partial u_3} = -\sin \varphi,$$

$$\frac{\partial f_3^*(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})}{\partial u_1} = 0, \frac{\partial f_3^*(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})}{\partial u_2} = -\sin \varphi, \frac{\partial f_3^*(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})}{\partial u_3} = \cos \varphi$$

$$\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Второе слагаемое вектора скорости $\mathbf{v}_2(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$ движения упругой пластинки определим из выражения

$$\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})\dot{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial t} \\ -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \\ \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})\dot{\mathbf{u}})_1 = -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial t} \quad (2.10)$$

$$(\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})\dot{\mathbf{u}})_2 = -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \cos \varphi - \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi$$

$$(\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u})\dot{\mathbf{u}})_3 = -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \sin \varphi + \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi$$

Итак, компонентами вектора скорости $\mathbf{v}_2(\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$, обусловленными упругостью пластинки, являются суммы соответствующих компонентов (2.7) и (2.10)

$$\begin{aligned}
 v_{2,1} &= -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial t} \\
 v_{2,2} &= z \dot{\varphi} \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \sin \varphi - \dot{\varphi} u_3(x, y, t) \cos \varphi - z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \cos \varphi - \\
 &\quad - \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi \\
 v_{2,3} &= -z \dot{\varphi} \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \cos \varphi - \dot{\varphi} u_3(x, y, t) \sin \varphi - z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \sin \varphi + \\
 &\quad + \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Выражения (2.11) совпадают с аналогичными выражениями, которые были получены согласно формуле $\boldsymbol{\Gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(x, y, z, t) + \boldsymbol{\Gamma} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}(x, y, z, t))$ [6,9].

Окончательное выражение компонентов скорости движения упругой пластинки в вертикальной плоскости (Фиг.1), определяется объединением соответствующих компонентов выражений (2.4) и (2.11).

$$\begin{aligned}
 v_1 &= -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial t} \\
 v_2 &= -y \dot{\varphi} \sin \varphi - z \dot{\varphi} \cos \varphi + z \dot{\varphi} \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \sin \varphi - \dot{\varphi} u_3(x, y, t) \cos \varphi - \\
 &\quad - z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \cos \varphi - \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi \\
 v_3 &= y \dot{\varphi} \cos \varphi - z \dot{\varphi} \sin \varphi - z \dot{\varphi} \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \cos \varphi - \dot{\varphi} u_3(x, y, t) \sin \varphi - \\
 &\quad - z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \sin \varphi + \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Компоненты скорости движения точек срединной плоскости пластинки определяются согласно (2.12) при $z = 0$.

3. Ускорение движения упругой пластинки асимптотическим методом. В качестве приложения полученных общих выражений для ускорения движений

упругого тела [9], определим ускорение движений упругой пластинки в вертикальной плоскости $Y_0O_0Z_0$ (Фиг.1).

Приведем обобщенные формулы, определяющие ускорение движений произвольного упругого тела в пространстве [9]

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}} = & \frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}) \ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{d}{dt} \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}) \ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \\ & + \frac{d}{dt} \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}) \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}) \ddot{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (3.1)$$

или

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}) + \mathbf{w}_2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}) \quad (3.2)$$

$$\mathbf{w}_1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}) = \frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha}) \ddot{\boldsymbol{\alpha}} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_2(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}) = & \frac{d}{dt} \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}) \ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \\ & + \frac{d}{dt} \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}) \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}) \ddot{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для определения ускорения движений $\mathbf{w}_1(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \ddot{\boldsymbol{\alpha}})$ пластинки с абсолютно твердой модели по формуле (3.3) определим элементы матрицы $\frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\boldsymbol{\alpha})$.

Для рассматриваемого случая, согласно (1.9), имеем

$$\frac{\partial^2 f_1(\varphi, 0)}{\partial \varphi^2} \dot{\varphi} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_2(\varphi, 0)}{\partial \varphi^2} \dot{\varphi} = (-y \cos \varphi + z \sin \varphi) \dot{\varphi}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial^2 f_3(\varphi, 0)}{\partial \varphi^2} \dot{\varphi} = (-y \sin \varphi - z \cos \varphi) \dot{\varphi}$$

то есть первое слагаемое в (3.3), является

$$\frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\varphi) \dot{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (-y \cos \varphi + z \sin \varphi) \dot{\varphi} & 0 & 0 \\ (-y \sin \varphi - z \cos \varphi) \dot{\varphi} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

со следующими компонентами

$$\left(\frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\varphi) \dot{\varphi} \right)_1 = 0, \quad \left(\frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\varphi) \dot{\varphi} \right)_2 = (-y \cos \varphi + z \sin \varphi) \dot{\varphi}^2, \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\varphi) \dot{\varphi} \right)_3 = (-y \sin \varphi - z \cos \varphi) \dot{\varphi}^2$$

Второе слагаемое выражения (3.3) для рассматриваемого случая имеет вид

$$\mathbf{F}_1(\varphi)\ddot{\boldsymbol{\phi}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -y \sin \varphi - z \cos \varphi & 0 & 0 \\ y \cos \varphi - z \sin \varphi & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_1(\varphi)\ddot{\boldsymbol{\phi}})_1 &= 0, (\mathbf{F}_1(\varphi)\ddot{\boldsymbol{\phi}})_2 = (-y \sin \varphi - z \cos \varphi)\ddot{\phi}, \\ (\mathbf{F}_1(\varphi)\ddot{\boldsymbol{\phi}})_3 &= (y \cos \varphi - z \sin \varphi)\ddot{\phi} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Из (3.3), (3.7) и (3.8), имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}_1(\varphi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}))_1 &= 0 \\ (\mathbf{w}_1(\varphi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}))_2 &= (-y \sin \varphi - z \cos \varphi)\ddot{\phi} + (-y \cos \varphi + z \sin \varphi)\dot{\phi}^2 \\ (\mathbf{w}_1(\varphi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}))_3 &= (y \cos \varphi - z \sin \varphi)\ddot{\phi} + (-y \sin \varphi - z \cos \varphi)\dot{\phi}^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Соотношения (3.9), определяющие компоненты вектора ускорения $\mathbf{w}_1(\varphi, \dot{\phi}, \ddot{\phi})$ вращательного движения абсолютно твердой пластинки, совпадают с выражениями, которые были определены методами классической механики по формуле [6,9]

$$\mathbf{w}_1 = \boldsymbol{\Gamma} \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}\omega^2) + \boldsymbol{\Gamma} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}),$$

По формулам (3.1), (3.4) определим ускорение $\mathbf{w}_2(\varphi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}})$ движения пластинки, обусловленное упругостью.

Слагаемые $\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u})\ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \frac{d}{dt}\mathbf{F}_2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u})\dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u})\ddot{\mathbf{u}}, \frac{d}{dt}\mathbf{F}_3(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u})\dot{\mathbf{u}}$, входящие в (3.1)

и (3.4), для рассматриваемой модели упругой пластинки будут

$$\mathbf{F}_2(\varphi, \mathbf{u})\ddot{\boldsymbol{\phi}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \sin \varphi - u_3(x, y, t) \cos \varphi & 0 & 0 \\ -z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \cos \varphi - u_3(x, y, t) \sin \varphi & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_2(\varphi, \mathbf{u})\ddot{\boldsymbol{\phi}})_1 &= 0 \\ (\mathbf{F}_2(\varphi, \mathbf{u})\ddot{\boldsymbol{\phi}})_2 &= \left(z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \sin \varphi - u_3(x, y, t) \cos \varphi \right) \ddot{\phi} \\ (\mathbf{F}_2(\varphi, \mathbf{u})\ddot{\boldsymbol{\phi}})_3 &= \left(-z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \cos \varphi - u_3(x, y, t) \sin \varphi \right) \ddot{\phi} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathbf{F}_2(\varphi, \mathbf{u}) \dot{\boldsymbol{\phi}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \sin \varphi + z \dot{\phi} \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \cos \varphi - & 0 & 0 \\ -\frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi + \dot{\phi} u_3(x, y, t) \sin \varphi & 0 & 0 \\ -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \cos \varphi + z \dot{\phi} \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial y} \sin \varphi - & 0 & 0 \\ -\frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi - \dot{\phi} u_3(x, y, t) \cos \varphi & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\left(\frac{d}{dt} \mathbf{F}_2(\varphi, \mathbf{u}) \dot{\boldsymbol{\phi}} \right)_1 &= 0, \\
\left(\frac{d}{dt} \mathbf{F}_2(\varphi, \mathbf{u}) \dot{\boldsymbol{\phi}} \right)_2 &= \left(z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \sin \varphi - \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi \right) \dot{\phi} + \\
&\quad + \left(z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi + u_3(x, y, t) \sin \varphi \right) \dot{\phi}^2, \\
\left(\frac{d}{dt} \mathbf{F}_2(\varphi, \mathbf{u}) \dot{\boldsymbol{\phi}} \right)_3 &= \left(-z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \cos \varphi - \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin^{-1} \varphi \right) \dot{\phi} + \\
&\quad + \left(z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi - u_3(x, y, t) \cos \varphi \right) \dot{\phi}^2, \tag{3.11}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_3(\varphi, \mathbf{u}) \ddot{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial t^2} \\ -z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t^2} \\ \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial t^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{F}_3(\varphi, \mathbf{u})\ddot{\mathbf{u}})_1 &= -z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial t^2}, \\
(\mathbf{F}_3(\varphi, \mathbf{u})\ddot{\mathbf{u}})_2 &= -z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t^2} \cos \varphi - \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial t^2} \sin \varphi \\
(\mathbf{F}_3(\varphi, \mathbf{u})\ddot{\mathbf{u}})_3 &= -z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t^2} \sin \varphi + \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial t^2} \cos \varphi \\
\frac{d}{dt} \mathbf{F}_3(\varphi, \mathbf{u})\dot{\mathbf{u}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\varphi} \sin \varphi & -\dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 & \dot{\varphi} \cos \varphi & -\dot{\varphi} \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial t} \\ -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \\ \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt} \mathbf{F}_3(\varphi, \mathbf{u})\dot{\mathbf{u}} \right)_1 &= 0 \\
\left(\frac{d}{dt} \mathbf{F}_3(\varphi, \mathbf{u})\dot{\mathbf{u}} \right)_2 &= z \dot{\varphi} \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \sin \varphi - \dot{\varphi} \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi \\
\left(\frac{d}{dt} \mathbf{F}_3(\varphi, \mathbf{u})\dot{\mathbf{u}} \right)_3 &= -z \dot{\varphi} \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \cos \varphi - \dot{\varphi} \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Компоненты вектора ускорения движений пластинки, обусловленные упругостью, определяются согласно (3.10) – (3.13) и имеют вид

$$\begin{aligned}
(\mathbf{w}_2(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}))_1 &= -z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial t^2}, \\
(\mathbf{w}_2(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}))_2 &= \left(z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi - u_3(x, y, t) \cos \varphi \right) \ddot{\varphi} + \\
&+ 2 \left(z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \sin \varphi - \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi \right) \dot{\varphi} + \\
&+ \left(z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi + u_3(x, y, t) \sin \varphi \right) \dot{\varphi}^2 - \\
&- z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t^2} \cos \varphi - \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial t^2} \sin \varphi
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{w}_2(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}))_3 &= \left(-z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi - u_3(x, y, t) \sin \varphi \right) \ddot{\varphi} + \\
&+ 2 \left(-z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \cos \varphi - \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi \right) \dot{\varphi} + \\
&+ \left(z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi - u_3(x, y, t) \cos \varphi \right) \dot{\varphi}^2 - \\
&- z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t^2} \sin \varphi + \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial t^2} \cos \varphi
\end{aligned}$$

Все слагаемые, входящие в (3.14), имеют порядок ε ($\varepsilon \ll 1$).

Полный вектор ускорения (3.2) определяется суммой соответствующих компонентов векторов (3.9) и (3.14).

$$\begin{aligned}
(\mathbf{w})_1 &= -z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial t^2}, \\
(\mathbf{w})_2 &= (-y \sin \varphi - z \cos \varphi) \ddot{\varphi} + (-y \cos \varphi + z \sin \varphi) \dot{\varphi}^2 + \\
&+ \left(z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi - u_3(x, y, t) \cos \varphi \right) \ddot{\varphi} + \\
&+ 2 \left(z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \sin \varphi - \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi \right) \dot{\varphi} + \tag{3.15} \\
&+ \left(z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi + u_3(x, y, t) \sin \varphi \right) \dot{\varphi}^2 - \\
&- z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t^2} \cos \varphi - \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial t^2} \sin \varphi, \\
(\mathbf{w})_3 &= (y \cos \varphi - z \sin \varphi) \ddot{\varphi} + (-y \sin \varphi - z \cos \varphi) \dot{\varphi}^2 - \\
&- \left(z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \cos \varphi + u_3(x, y, t) \sin \varphi \right) \ddot{\varphi} + \\
&+ 2 \left(-z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t} \cos \varphi - \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi \right) \dot{\varphi} +
\end{aligned}$$

$$+ \left(z \frac{\partial u_3(x, y, t)}{\partial t} \sin \varphi - u_3(x, y, t) \cos \varphi \right) \dot{\varphi}^2 -$$

$$- z \frac{\partial^3 u_3(x, y, t)}{\partial y \partial t^2} \sin \varphi + \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial t^2} \cos \varphi$$

Сравнение полученных результатов, как для скорости, так и для ускорения движений упругой пластинки показывают эффективность применения, как методов классической механики, так и асимптотических методов разделения движений [6,9].

Компоненты ускорения движения точек срединной плоскости пластинки, определяются согласно (3.15), при $z = 0$.

4. Напряженно - деформационное состояние упругой пластинки. Исследование напряженного состояния упругой пластинки основано на гипотезах [6,9], согласно которым компоненты деформации являются

$$\varepsilon_{zz} = 0, \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0; \varepsilon_{yz} = 0, \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} = 0; \varepsilon_{zx} = 0, \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial x^2}, \varepsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y^2}, \varepsilon_{xy} = -2z \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial y}$$

Вычислим нормальные напряжения σ_{xx}, σ_{yy} для однородной и изотропной пластинки согласно закону Гука [4,5]

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left(\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right), \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \left(\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{zz} + \sigma_{xx}) \right), \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \left(\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{2}{E} (1 + \nu) \sigma_{xy}, \varepsilon_{yz} = \frac{2}{E} (1 + \nu) \sigma_{yz}, \varepsilon_{zx} = \frac{2}{E} (1 + \nu) \sigma_{zx}$$

Из первых двух формул (4.2) и на основании третьей гипотезы (гипотеза об отсутствии давления между слоями пластинки), пренебрегая напряжением σ_{zz} по сравнению с напряжениями σ_{xx}, σ_{yy} , получим

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left(\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy} \right), \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \left(\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx} \right) \quad (4.3)$$

Учитывая соотношения (4.1), из (4.3) определим σ_{xx} и σ_{yy}

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_{yy} &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial x^2} \right)\end{aligned}\quad (4.4)$$

Из четвертой формулы (4.2) и (4.1), имеем

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{xy} = -\frac{Ez}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_3(x, y, t)}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0 \quad (4.5)$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Все величины в выражениях (4.4) и (4.5) в каждый момент времени зависят от прогиба $u_3(x, y, t)$ срединной плоскости пластинки.

Заключение. Асимптотическим методом разделения движений исследована кинематика вращательного движения прямоугольной пластинки, одна сторона которой жестко закреплена к оси вращения, а другие свободны. Определены скорость и ускорения движения точек упругой пластинки относительно неподвижной системы координат по общей асимптотической формуле, определяющей кинематику движения трехмерного упругого тела. Дана оценка дополнительных величин, обусловленных упругостью пластинки. Кинематические величины определены в зависимости от прогиба срединной плоскости пластинки и могут быть применены в задачах динамики и управления движением механических систем содержащее упругие пластинки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гукасян А.А. Об управляемом движении упругого космического аппарата. Изв. НАН Армении, «Механика» - 1995, Т.48, № 1, с.55-63.
2. Гукасян А.А., Саркисян С.В. О колебательном движении прямоугольной пластинки. Изв. АН Арм. ССР, «Механика» - 1990, Т.43, № 4, с.13-23.
3. Айрапетян В.В., Гукасян А.А. Об управляемом движении одной модели летательного аппарата с упругими элементами. Изв. НАН Армении, «Механика» - 2000, Т.53, № 1, с.61-68.
4. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. Тех.-Теор. Лит., М.-Л., 1947, 465с.
5. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.; Наука, 1968. 592 с.

6. Гукасян А.А. Кинематический анализ движений упругой пластинки. Journal of Advanced Research in Natural Science 'JARiNS'.-Seattle, USA: Scientific Research Centre "MachineStructure", Amazon KDP, 2025. #22,p.4-14
7. Суслов Г.К. Теоретическая механика. ГОСТЕХИЗДАТ, М.-Л., 1946, 655с.
8. Лурье А.И. Аналитическая механика. Изд. Физ.-Мат. Лит., М. 1961, 824.
9. Гукасян А.А. Движение деформированного твердого тела. Ереван, Изд. НАН РА, Гитутюн, 2024, 190 с.
10. Гукасян А.А. Об одном приложении асимптотического метода. В журнале «Мехатроника, автоматика и робототехника». НИЦ МС, Санкт-Петербург, 2024, № 13, с. 23-27.
11. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. - М.: Наука,1969.- 383с.
12. Черноусько Ф.Л. Динамика систем с упругими элементами большой жесткости. - Известия АН СССР, Механика твердого тела. - 1983,- № 4. - С. 101 - 113.

Сведения об авторе:

Гукасян Артуш Апресович – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, E-mail: ghukasyan10@yandex.com

Поступила в редакцию 9 февраля 2026г.