

**ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ РЕБРИСТОЙ
КОМПОЗИТНОЙ ПЛАСТИНЫ**

Белубекян Э.В., Геворкян Г.З., Дарбинян А.З., Амирджанян А.А.

Ключевые слова: поперечный изгиб, температура, композиционный материал, упругое ребро, полубесконечная пластина-полоса.

Belubekyan E.V., Gevorgyan G.Z., Darbinyan A.Z., Amirjanyan H.A.
Thermoelasticity Problem for a Semi-Infinite Ribbed Composite Plate

Keywords: transverse bending, temperature, composite material, elastic rib, semi-infinite plate-strip.

A study was conducted on the bending of a semi-infinite orthotropic composite plate, hinged along its long sides and reinforced along its free side with an elastic rib, under the action of a uniformly distributed in the longitudinal direction normal load in the presence of a stationary temperature field of a given type. Assuming that the bending caused by the temperature field is opposite to the bending caused by a uniformly distributed normal load, it was found that uniform load can, with a certain degree of accuracy, compensated the temperature-induced bending only on part of the plate. It was shown that to completely neutralize the influence of temperature on plate bending, it is necessary to apply bending moments of appropriate magnitudes to the hinged sides and to the rib.

Բեռնակրկայան Է.Վ., Գևորգյան Գ.Զ., Դարբինյան Ա.Զ., Ամիրջանյան Ա. Ա.
Չերմաստաճակայան խնդիր կողով ուժեղացված կիսասանվերջ կոմպոզիտ սալի համար

Հիմնաբաներ՝ ընդլայնական ծռում, ջերմաստիճան, կոմպոզիտային նյութ, առաձգական կող, կիսասանվերջ սալ-շերտ:

Ուսումնասիրվել է կիսասանվերջ օրթոտրոպ կոմպոզիտային սալի ծռումը, որը ազատ հենված է իր երկար կողմերի երկայնքով և ազատ կողմի երկայնքով ուժեղացված է առաձգական կողով, երկայնական ուղղությամբ հավասարաչափ բաշխված նորմալ բեռի ազդեցության տակ տրված տիպի ստացիոնար ջերմաստիճանային դաշտի առկայության դեպքում: Ենթադրելով, որ ջերմաստիճանային դաշտի առաջացրած ծռումը հակառակ է հավասարաչափ բաշխված նորմալ բեռի առաջացրած ծռմանը, պարզվել է, որ հավասարաչափ բեռի կիրառմամբ ջերմաստիճանից առաջացած ծռումը կարող է որոշակի ճշգրտությամբ չեղարկվել միայն սալի մի մասի համար: Ցույց է տրվել, որ ջերմաստիճանի ազդեցությունը սալի ծռման վրա լիովին չեզոքացնելու համար անհրաժեշտ է համապատասխան մեծությունների ծող մոմենտներ կիրառել ազատ հենված կողմերին և կողին:

Проведено исследование изгиба шарнирно опертой по длинным сторонам полубесконечной ортотропной пластины из композиционного материала, усиленной по свободной стороне упругим ребром, под действием равномерной распределенной в продольном направлении нормальной нагрузки при наличии стационарного температурного поля заданного типа. Предполагая, что изгиб, обусловленный температурным полем, происходит противоположно изгибу от действия нормальной равномерно распределенной нормальной нагрузки, выяснено, что температурный изгиб, с определенной степенью точности, можно компенсировать равномерной нагрузкой лишь на части пластины. Показано, что для полной нейтрализации влияния температуры на изгиб пластины необходимо на шарнирно-опертых сторонах и к ребру приложить изгибающие моменты соответствующих величин.

Введение. Композитные пластины, усиленные ребрами жесткости, отличающиеся небольшим весом при высокой прочности, являются широко распространенными конструкционными элементами в промышленности, особенно в авиастроении и судостроении. В связи с этим совершенно не удивительно, что исследованию прочностных и деформативных свойств таких пластин при изгибе, при наличии температурного или электромагнитного поля, их несущей способности и устойчивости при обтекании газом или жидкостью посвящено очень большое число работ. Отметим лишь некоторые из последних работ [1-11].

В настоящей работе определяется напряженно-деформированное состояние полубесконечной прямоугольной композитной пластинки, усиленной на краю ребром жесткости, при одновременном действии поперечной нагрузки и температурного поля. Произведен численный анализ полученных результатов. Проведено исследование возможности компенсации прогиба, вызванного температурным полем, равномерно распределенной нагрузкой.

Постановка задачи. Рассматривается полубесконечная прямоугольная пластинка в прямоугольной системе координат $Oxyz$, занимающая область $\{0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq b, -h/2 \leq z \leq h/2\}$. Пластина шарнирно оперта по продольным, полубесконечным, кромкам $y=0, b$, а на кромке $x=0$ подкреплена ребром жесткости. Ребро имеет прямоугольное сечение размерами $\kappa h_1 \times h_1$ ($\kappa \leq 1, h < h_1$) и упругие модули E_r, G_r (фиг.1).

Пластина изготовлена из монослоев ортотропного композиционного материала, поочередно уложенных под углами $\pm\varphi$ к оси абсцисс, и имеет толщину h . Монослой имеет модули упругости E_1, E_2 , коэффициенты Пуассона ν_1, ν_2 , коэффициенты линейного расширения $\alpha_{1t}^0, \alpha_{2t}^0$ и модуль сдвига G , при этом, как известно [12-14], для ортотропного материала имеет место условие симметрии упругих постоянных $E_1\nu_2 = E_2\nu_1$.

Упругие характеристики пластинки B_{ik} ($i, k = 1, 2, 6$) и коэффициенты температурного расширения α_{1t}, α_{2t} в направлениях Ox, Oy определяются через соответствующие упругие характеристики монослоя по формулам [12-14]:

$$B_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2} \left[\cos^4 \varphi + 2(\nu_2 + 2(1 - \nu_1\nu_2)G_*) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + E_{2*} \sin^4 \varphi \right]$$

$$B_{22} = \frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2} \left[\sin^4 \varphi + 2(\nu_2 + 2(1 - \nu_1\nu_2)G_*) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + E_{2*} \cos^4 \varphi \right]$$

$$B_{12} = \frac{E_1}{1 - \nu_1\nu_2} \left\{ \nu_2 + \left[1 + E_{2*} - 2\nu_2 - 4(1 - \nu_1\nu_2)G_* \right] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \right\}$$

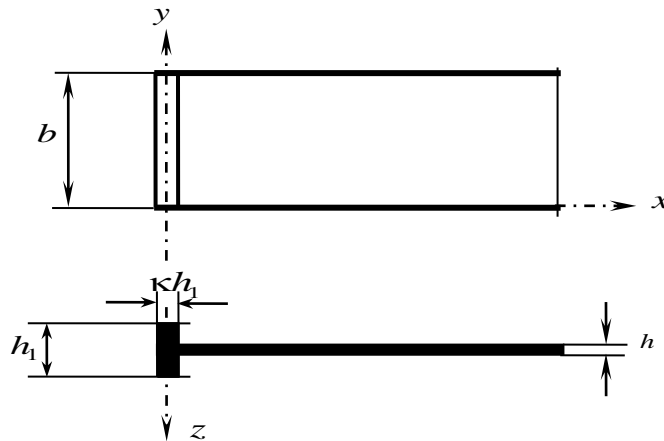
$$\begin{aligned}
B_{66} &= \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2} \left[G_* (1-\nu_1\nu_2) + [1 + E_{2*} - 2\nu_2 - 4(1-\nu_1\nu_2)G_*] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \right] \\
\alpha_{1t} &= \alpha_{1t}^0 \cos^2 \varphi + \alpha_{2t}^0 \sin^2 \varphi, \\
\alpha_{2t} &= \alpha_{1t}^0 \sin^2 \varphi + \alpha_{2t}^0 \cos^2 \varphi
\end{aligned} \tag{1}$$

где

$$E_{2*} = \frac{E_2}{E_1}; \quad G_* = \frac{G}{E_1}.$$

Предполагается, что пластинка находится под действием поперечной нагрузки $q(y)$ в направлении оси Oz , при наличии стационарного температурного поля $T^*(x, y, z) = T_{cp} + T(x, y, z)$, где T_{cp} температура окружающей среды.

Ставится задача определения напряженно-деформированного состояния пластинки под воздействием двух разнородных внешних факторов: силового и теплового. Выяснить, возможно ли действие одного фактора компенсировать действием второго фактора.



Фиг.1 Схематическая иллюстрация пластинки

Основные уравнения и решение задачи. Скомпонованную из ортотропных монослоев пластинку также можно считать ортотропной, для которой уравнение изгиба пластинки при наличии температурного поля имеет вид [12,13]

$$\begin{aligned}
D_{11} \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} + \\
+ \frac{\partial^2 R_e^{(1)}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R_e^{(2)}(x, y)}{\partial y^2} = q(y)
\end{aligned} \tag{2}$$

где: $w = w(x, y)$ - прогиб пластинки, $D_{ik} = \frac{B_{ik} h^3}{12}$, $(i, k = 1, 2, 6)$ - цилиндрические жесткости пластинки, $R_e^{(i)}(x, y)$ $(i = 1, 2)$, представляющие собой моменты, обусловленные температурным полем, определяются по формулам:

$$\begin{aligned} R_e^{(1)}(x, y) &= (B_{11}\alpha_{1t} + B_{12}\alpha_{2t}) \int_{-h/2}^{h/2} zT(x, y, z) dz \\ R_e^{(2)}(x, y) &= (B_{22}\alpha_{2t} + B_{12}\alpha_{1t}) \int_{-h/2}^{h/2} zT(x, y, z) dz \end{aligned} \quad (3)$$

Изгибающие и крутящий моменты, а также поперечные силы внутри пластинки определяются по формулам:

$$\begin{aligned} M_x &= -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - R_e^{(1)}(x, y) \\ M_y &= -D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - R_e^{(2)}(x, y) \\ M_{xy} &= -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ Q_x &= -D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial R_e^{(1)}(x, y)}{\partial y} \\ Q_y &= -D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial R_e^{(2)}(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь принимается, что изменение температуры $T(x, y, z)$ по толщине пластины следует линейному закону и сохраняет постоянное значение на плоскостях, параллельных поверхностям пластинки. Предполагается, что верхняя поверхность прямоугольной пластины имеет температуру выше T_{cp} на величину T_0 , нижняя – ниже на ту же величину, т.е., с учетом направления оси Oz вниз, будем иметь $T(x, y, z) = -2zT_0/h$. Выбор такого температурного поля обусловлен тем, что изгиб пластины от температурных напряжений будет происходить вверх и, тем самым, противодействовать действию поперечной нагрузки $q(y)$. Для температурных моментов $R_e^{(i)}(x, y)$ $(i = 1, 2)$ будем иметь:

$$R_e^{(1)}(x, y) = -(B_{11}\alpha_{1t} + B_{12}\alpha_{2t})T_0 \frac{h^2}{6},$$

$$R_e^{(2)}(x, y) = -(B_{22}\alpha_{2t} + B_{12}\alpha_{1t})T_0 \frac{h^2}{6}$$
(5)

Граничные условия на краях пластинки:

- шарнирного опирания на кромках $y = 0, y = b$

$$w = 0, \quad M_y = 0$$

- упругого сопряжения на кромке $x = 0$ [7]

$$C \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -M_x \quad E_r J_r \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \kappa h_1 q = -Q_x$$

запишутся в виде

$$w = 0, \quad D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + R_e^{(2)} = 0 \quad \text{при } y = 0, y = b$$
(6)

$$C \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + R_e^{(1)}$$
(7)

$$E_r J_r \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \kappa h_1 q = D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$$
(8)

Здесь: $C = G_r \kappa h_1^4 \gamma$ – жесткость ребра при кручении, $J_r = \kappa h_1^4 / 12$ – момент

$$\text{инерции ребра, } \gamma = \kappa^2 \left[\frac{1}{3} - \frac{64\kappa}{\pi^5} \sum_{n=1,3,5} \frac{1}{n^5} \text{th} \frac{\pi n}{2\kappa} \right].$$

Перейдем к безразмерным величинам. Все линейные величины, т.е. имеющие размерность длины, будем считать разделенными на ширину полубесконечной пластины b , а величины, имеющие размерность напряжения, разделенными на один из модулей упругости монослоя E_1 . Далее, всем безразмерным величинам в нижнем индексе будет добавлена звездочка.

Уравнение (2) примет вид:

$$\frac{\partial^4 w_*(x_*, y_*)}{\partial x_*^4} + 2(a_2 + 2a_3) \frac{\partial^4 w_*(x_*, y_*)}{\partial x_*^2 \partial y_*^2} + a_1 \frac{\partial^4 w_*(x_*, y_*)}{\partial y_*^4} = a_4 q_*(y_*)$$
(9)

а граничные условия (6)-(8) – вид:

$$w_* = 0; \quad a_1 \frac{\partial^2 w_*}{\partial y_*^2} + a_2 \frac{\partial^2 w_*}{\partial x_*^2} - \frac{2}{h_*} \left(a_1 \frac{\alpha_{2t}}{\alpha_{1t}} + a_2 \right) \alpha_{1t} T_0 = 0$$
(10)

$$\kappa \gamma \frac{G_r h_{1*}^2}{E_1} a_4 \frac{\partial^3 w_*}{\partial x_* \partial y_*^2} - \frac{\partial^2 w_*}{\partial x_*^2} - a_2 \frac{\partial^2 w_*}{\partial y_*^2} = -\frac{2}{h_*} \left(1 + a_2 \frac{\alpha_{2t}}{\alpha_{1t}} \right) \alpha_{1t} T_0$$
(11)

$$\frac{\kappa}{12} \frac{E_r h_1^4}{E_1} a_4 \frac{\partial^4 w_*}{\partial y_*^4} - \frac{\partial^3 w_*}{\partial x_*^3} - (a_2 + 4a_3) \frac{\partial^3 w_*}{\partial x_* \partial y_*^2} = \kappa h_1^* a_4 q_* \quad (12)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} \delta &= \nu_2 + 2(1 - \nu_1 \nu_2) G_*; \\ a_1 &= \frac{\operatorname{tg}^4 \varphi + 2\delta \operatorname{tg}^2 \varphi + E_{2*}}{1 + 2\delta \operatorname{tg}^2 \varphi + E_{2*} \operatorname{tg}^4 \varphi}; \quad a_2 = \frac{\nu_2 \sec^4 \varphi + [1 + E_{2*} - 2\delta] \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + 2\delta \operatorname{tg}^2 \varphi + E_{2*} \operatorname{tg}^4 \varphi}; \\ a_3 &= \frac{G_* (1 - \nu_1 \nu_2) \sec^4 \varphi + [1 + E_* - 2\delta] \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + 2\delta \operatorname{tg}^2 \varphi + E_{2*} \operatorname{tg}^4 \varphi}; \quad a_4 = \frac{12(1 - \nu_1 \nu_2)}{h_*^3 \cos^4 \varphi [1 + 2\delta \operatorname{tg}^2 \varphi + E_{2*} \operatorname{tg}^4 \varphi]} \end{aligned} \quad (13)$$

Предположим, что безразмерная функция нагрузки q_* зависит только от y_* , и разложим ее в ряд Фурье:

$$q_* = \sum_1^{\infty} q_k \sin \lambda_k y_*, \quad q_k = 2 \int_0^1 q_* \sin \lambda_k y dy, \quad \lambda_k = \pi k \quad (14)$$

Решение уравнения (9), удовлетворяющее условиям (10), представляется в виде

$$w_*(x_*, y_*) = -\frac{\alpha_{1r} T_0}{2h_*} \left(\frac{\alpha_{2t}}{\alpha_{1t}} + \frac{a_2}{a_1} \right) y_* (1 - y_*) + \frac{a_4}{a_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{\lambda_k^4} \sin \lambda_k y_* + w_{1*}(x_*, y_*), \quad (15)$$

где

$$w_{1*}(x_*, y_*) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_*) \sin \lambda_k y_*; \quad \lambda_k = \pi k \quad (16)$$

является общим решением однородного уравнения, соответствующего (9).

Подстановка (15) в уравнение (9) приводит к следующим отдельным обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно каждой из искомых функций $f_k(x)$

$$f_k^{IV} - 2(a_2 + 2a_3) \lambda_k^2 f_k'' + a_1 \lambda_k^4 f_k = 0 \quad k = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Общее решение дифференциальных уравнений (17) представляется в виде:

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^4 c_{ik} e^{r_i \lambda_k x}. \quad (18)$$

где c_{ik} - постоянные интегрирования, подлежащие определению из граничных условий, а r_i - корни соответствующего характеристического уравнения:

$$r^4 - 2(a_2 + 2a_3)r^2 + a_1 = 0 \quad (19)$$

В зависимости от значений параметров a_i ($i = 1, 2, 3$), представляющих собой комбинации упругих характеристик пластинки (13), корни r_i могут принимать как вещественные, так и комплексные значения, и, соответственно этому, выражение (18) будет иметь различные представления.

1). При $(a_2 + 2a_3)^2 - a_1 < 0$, будем иметь пару комплексно-сопряженных корней:

$r = \pm(\alpha \pm i\beta)$, где

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{a_1} + (a_2 + 2a_3)}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{a_1} - (a_2 + 2a_3)}{2}},$$

Выражение (18), с учетом произвольности постоянных интегрирования c_{ik} , можно представить в виде вещественной функции:

$$f_k(x_*) = c_{1k} e^{-\alpha\lambda_k x_*} \sin \beta\lambda_k x_* + c_{2k} e^{-\alpha\lambda_k x_*} \cos \beta\lambda_k x_* \quad (20)$$

2). При $(a_2 + 2a_3)^2 - a_1 > 0$, будем иметь 4 действительных корня, попарно отличающихся знаком: $r_{1,2} = \pm m_1$, $r_{3,4} = \pm m_2$, где

$$m_1 = \sqrt{(a_2 + 2a_3) + \sqrt{(a_2 + 2a_3)^2 - a_1}},$$

$$m_2 = \sqrt{(a_2 + 2a_3) - \sqrt{(a_2 + 2a_3)^2 - a_1}}$$

Для функций $f_k(x)$ будем иметь:

$$f_k(x_*) = c_{1k} e^{-m_1\lambda_k x_*} + c_{2k} e^{-m_2\lambda_k x_*} \quad (21)$$

3). При $(a_2 + 2a_3)^2 - a_1 = 0$, будем иметь два, отличающихся знаком, двойных корня: $r_i = \pm m_0$ ($i=1,2,3,4$), где $m_0 = \sqrt{a_2 + 2a_3}$, а функции $f_k(x)$ примут вид:

$$f_k(x_*) = c_{1k} e^{-m_0\lambda_k x_*} + c_{2k} x_* e^{-m_0\lambda_k x_*} \quad (22)$$

Следует отметить, что для обеспечения ограниченности решений при $x_* \rightarrow \infty$ в формулах (20)-(22) оставлены только слагаемые с отрицательным показателем степени.

Постоянные интегрирования c_{1k} и c_{2k} определяются из граничных условий (11) и (12). Подставляя (15) в условия (11) и (12) и используя разложение единицы в ряд Фурье

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \sin \lambda_k y, \quad \eta_k = \frac{2}{\pi k} [1 - (-1)^k],$$

придем к системе уравнений

$$f_k'' + \kappa \gamma \frac{G_r h_{1*}^2}{E_1} a_4 \lambda_k^2 f_k' - a_2 \lambda_k^2 f_k = -\frac{a_2 a_4}{a_1} \frac{q_k}{\lambda_k^2} - \frac{\alpha_{1r} T_0}{h_*} \left(2 + \frac{a_2}{a_1} + (2a_2 + 1) \frac{\alpha_{2r}}{\alpha_{1r}} \right) \eta_k \quad (23)$$

$$f_k''' - (a_2 + 4a_3) \lambda_k^2 f_k' - \frac{\kappa E_r h_{1*}^4}{12 E_1} a_4 \lambda_k^4 f_k = -\kappa h_{1*} a_4 \left(\frac{h_{1*}^3 E_r a_4}{12 E_1 a_1} + 1 \right) q_k$$

При наличии конкретных значений для упругих характеристик материала пластины, для функции $f_k(x)$ выбирается соответствующее представление из (20)-(22), подставляется в систему (23) и принимается $x_* = 0$. Из полученной системы находятся постоянные C_{1k} и C_{2k} .

Следует отметить, что в случае изотропной пластинки для обозначений (13) будем иметь:

$$\delta = 1; \quad a_1 = 1; \quad a_2 = \nu; \quad a_3 = \frac{1-\nu}{2}; \quad a_4 = \frac{12(1-\nu^2)}{h_*^3}, \quad (24)$$

а для дискриминанта биквадратного уравнения (19) получим

$$(a_2 + 2a_3)^2 - a_1 = 0. \quad (25)$$

Следовательно, для изотропной пластины решение уравнения (17) дается формулой (22).

Численный анализ полученных результатов. Численные расчеты проведены для полубесконечной пластины, изготовленной из монослоев композиционного материала на основе волокон Kevlar49, который имеет следующие характеристики [14]:

$$E_1 = 69 \text{ ГПа}, \quad E_2 = 4.52 \text{ ГПа}, \quad G = 2.48 \text{ ГПа}, \quad \nu_2 = 0.41,$$

$$\alpha_{1r}^0 = -5.17 \times 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad \alpha_{2r}^0 = 68.7 \times 10^{-6} \text{ К}^{-1}.$$

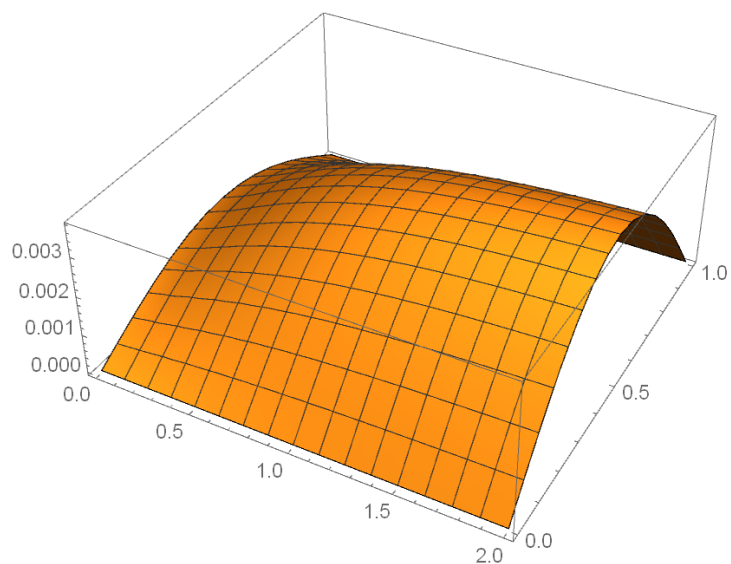
Внешняя нагрузка, которая равномерно распределена по полуоси Ox , по y также принимается распределенной равномерно и равной $q(y) = q_0$.

Для геометрических параметров задачи приняты следующие значения:

$$h_* = \frac{h}{b} = 0.05; \quad h_{1*} = \frac{h_1}{b} = 0.1; \quad \kappa = 0.5.$$

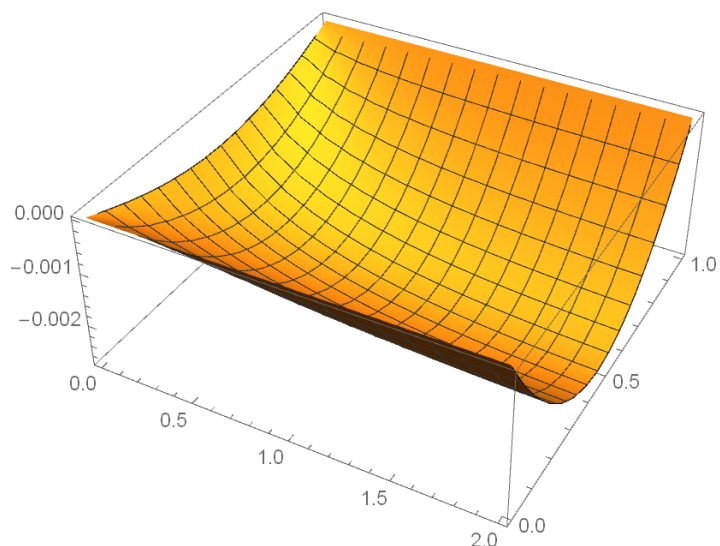
Все иллюстрации относятся к пограничной части полубесконечной пластины, именно к участку $\{0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$, который далее, для простоты, будем называть пластинкой.

На Фиг.2 представлена форма изгиба пластины, составленной намоткой монослоев под углом $\varphi = 0.25\pi$, под действием равномерной нагрузки $q_{0*} = q(y)/E_1 = 10^{-6}$ при отсутствии температурного поля $T_0 = 0^\circ$.



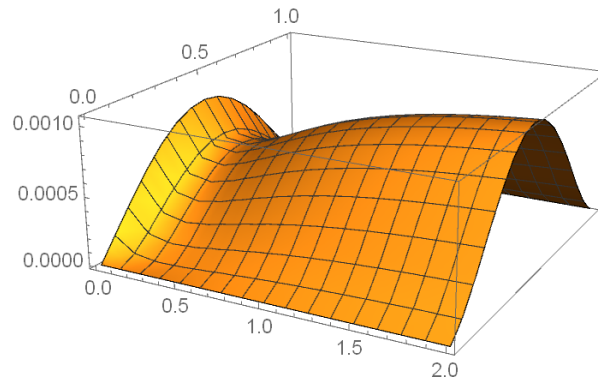
Фиг.2 Прогиб пластинки при $q_{0*} = 10^{-6}$ и $T_0 = 0^\circ$.

На Фиг.3 представлена форма прогиба пластинки под действием только температурного поля $T_0 = 1^\circ$.



Фиг.3 Прогиб пластинки при $q_{0*} = 0$ и $T_0 = 10^\circ$.

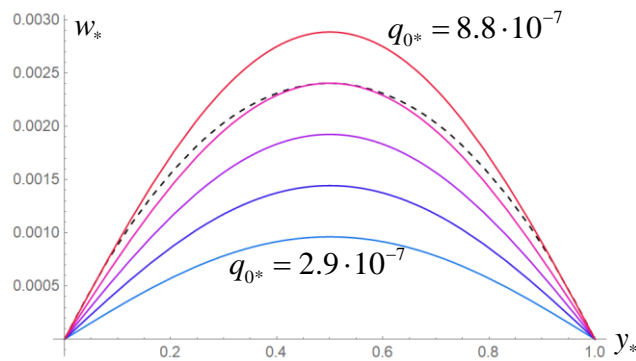
На Фиг.4 представлена форма прогиба пластинки при совместном действии нормальной нагрузки $q_{0*} = 10^{-6}$ и температурного поля $T_0 = 10^\circ$.



Фиг.4 Прогиб пластинки при $q_{0*} = 10^{-6}$ и $T_0 = 10^\circ$.

Существенно малые прогибы на Фиг.4 поднимают вопрос, а можно ли подбором величины равномерного давления q_{0*} обратить в ноль или свести к минимуму прогиб всей пластинки при определенном температурном поле?

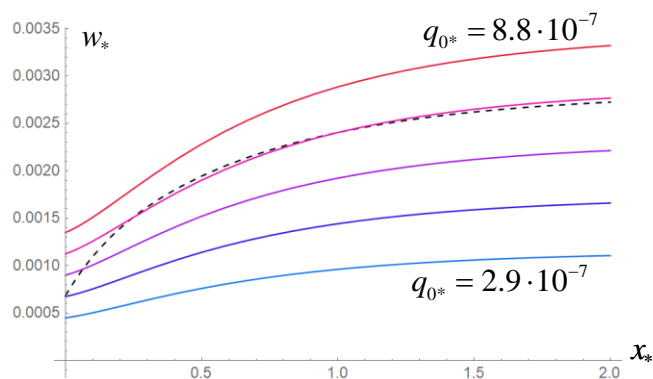
На фиг.5 показаны кривые прогиба пластинки в сечении ($x=1$) при разных значениях нормального давления $q_{0*} = \{2.9, 4.4, 5.9, 7.3, 8.8\} \cdot 10^{-7}$ и $T_0 = 0^\circ$. Пунктирной линией показано зеркальное отражение прогиба при заданном температурном поле, $T_0 = 10^\circ$, $q_{0*} = 0$



Фиг.5. Прогиб пластины в $x = 1$ при разном давлении и $T_0 = 0^\circ$, пунктирной линией показано зеркальное отражение прогиба при $T_0 = 10^\circ$, $q_{0*} = 0$.

Из фиг. 5 замечаем, что к кривой прогиба, обусловленного температурным полем, наиболее близка кривая прогиба при $q_{0*} = 7.3 \cdot 10^{-7}$. Для того, чтобы выяснить

насколько эта близость кривых сохраняется в других поперечных сечениях, были построены кривые прогиба срединной линии пластины по оси Ox при тех же величинах давления и температуры (Фиг. 6).



Фиг.6 Прогиб срединной линии пластины при разной нагрузке q_{0*} и $T_0 = 0^\circ$, пунктирной линией показано зеркальное отражение прогиба при $q_{0*} = 0, T_0 = 10^\circ$.

Из фиг.6 наблюдаем интересную картину. Если для компенсации температурного прогиба на ребре ($x = 0$) необходимо равномерное давление $q_{0*} = 4.4 \cdot 10^{-7}$, то для большей части пластины ($x > 0.3$) необходимо давление $q_{0*} = 7.3 \cdot 10^{-7}$.

Исходя из последних кривых, можно однозначно утверждать, что влияние температурного поля по всей пластинке невозможно компенсировать равномерно распределенной нагрузкой.

Были проведены численные эксперименты по подбору вида распределения нормального давления $q_*(y)$ по поперечному сечению, которое наиболее близко подходит к решению задачи компенсации влияния температурного поля. В результате получено, что распределение $q_*(y)$ стремится к двум парам противоположно направленных сосредоточенных сил у концов $y_* = 0$ и $y_* = 1$, что, в свою очередь, означает, приложение к сторонам пластины $y_* = 0$ и $y_* = 1$ равномерно распределенных по оси Ox изгибающих моментов. Этот факт подтверждается и аналитическим анализом граничных условий (10)-(12), поскольку выбранное постановкой задачи температурное поле оставляет свое влияние только посредством граничных условий.

Действительно, если предположить, что по полубесконечным сторонам пластины приложены моменты M_T , изгибающие пластину вниз, и взять их равными по величине:

$$M_T = \frac{2}{h_*} \left(a_1 \frac{\alpha_{2t}}{\alpha_{1t}} + a_2 \right) \alpha_{1t} T_0, \quad (26)$$

то условие (10) будет выполнено. Далее, выразив $\alpha_{1r}T_0$ через M_T и подставив в (11), получим, что к ребру также надо приложить момент, но уже равный:

$$M_{T^*} = \frac{\alpha_{1r} + a_2\alpha_{2r}}{a_2\alpha_{1r} + a_1\alpha_{2r}} M_T \quad (27)$$

Таким образом, температура будет исключена, уступив свое влияние моментам (26) и (27), и все граничные условия будут удовлетворены.

Следовательно, влияние температурного поля можно компенсировать только приложением изгибающего момента M_T по полубесконечным сторонам пластины и момента M_{T^*} к ребру.

Заключение. Проведено исследование изгиба шарнирно опертой по длинным сторонам полубесконечной ортотропной пластины из композиционного материала, усиленной по свободной стороне упругим ребром, под действием распределенной в поперечном направлении и равномерной в продольном направлении при наличии стационарного температурного поля заданного типа. Предполагая, что изгиб, обусловленный температурным полем, происходит противоположно изгибу от действия нормальной равномерно распределенной нормальной нагрузки, выяснено, что температурный изгиб, с определенной степенью точности, можно компенсировать равномерной нагрузкой лишь на части пластины. Показано, что для полной нейтрализации влияния температуры на изгиб пластины необходимо на шарнирно-опертых сторонах и к ребру приложить изгибающие моменты соответствующих величин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малинин Г.В. Методики расчета ребристых пластин на прочность и устойчивость. Труды МАИ, 2021, №121, DOI: 10.34759/trd-2021-121-08
2. Jože Petrišič, Franc Kosel, Boštjan Bremec, Buckling of plates with strengthenings. Thin-Walled Structures 44 (2006) 334–343. DOI: 10.1016/j.tws.2006.03.002
3. Ahmad Rahbar-Ranji, Elastic buckling analysis of longitudinally stiffened plates with flat-bar stiffeners. Ocean Engineering Volume 58, 15 January 2013, Pages 48-59 DOI: 10.1016/j.oceaneng.2012.09.018.
4. Jeom Kee Paik, Anil Kumar Thayamballi, Buckling strength of steel plating with elastically restrained edges, Thin-Walled Structures, Volume 37, Issue 1, 2000, Pages 27-55, DOI: 10.1016/S0263-8231(00)00009-4.
5. Zou, G., Wang, Y., Xue, Q., & Zhang, C. (2019). Buckling Analysis of Sandwich Plate Systems with Stiffening Ribs: Theoretical, Numerical, and Experimental Approaches. Advances in Civil Engineering, 2019(1). DOI: 10.1155/2019/8737561
6. Guangping Zou, Yuyang Wang, Qichao Xue, Chunwei Zhang Buckling Analysis of Sandwich Plate Systems with Stiffening Ribs: Theoretical, Numerical, and Experimental Approaches. Advances in Civil Engineering Volume 2019, Article ID 8737561, 14 pages, DOI: 10.1155/2019/8737561
7. Белубекян Э.В., Погосян А.Г. Оптимальное проектирование прямоугольной ребристой пластинки из композиционного материала по критерию устойчивости. Изв. НАН РА, Механика, 2007, т. 60, № 1, сс. 38-43.

8. Дарбинян А.З. Задача термоупругости прямоугольной ребристой пластинки при изгибе. Труды II международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», Дилижан, Армения, 4-8 октября 2010, сс. 229-231.
9. Дарбинян А.З. Задача термоупругости для бесконечной пластинки-полосы, усиленной периодической системой ребер. Труды междунар. конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посвящённой 100-летию академика НАН Армении Н.Х.Арутюняна, Ереван, 2012, сс. 220-221
10. Дарбинян А. З., Аракелян Л. П., Вычисление упругих характеристик ребристых пластинок, из композиционных материалов, применяемых при большом перепаде температуры. Наука и образование в Арктическом регионе: мат. междунар. науч.-практ. конф., Мурманск, 4–8 апреля 2016г.: в 2 ч., Ч. 2 / Федер. гос. бюджетное образоват. учреждение высш. проф. образования "Мурм. гос. техн. ун-т". – Мурманск : Изд-во МГТУ, сс. 17-23.
11. Белубекян Э.В., Дарбинян А.З., Саакян А.А. Термоупругая задача изгиба слоистой композитной ребристой пластинки. Доклады НАН РА, 2017, т.117, №1, сс. 44-51.
12. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М., Наука, 1987.
13. В.В.Васильев. Механика из композиционных материалов. М. Машиностроение. 1985. 271 с.
14. Композиционные материалы. Справочник. Под общей редакцией чл.-корр. АН СССР В.В. Васильева. чл.- корр Латв. ССР Ю.М. Тарнопольского. М. Машиностроение. 1990. 510с.

Сведения об авторах:

Белубекян Эрнест Вагаршакович - доктор технических наук, профессор, Тел.: (374 91)431 194, E-mail: ebelubekyan@yahoo.com

Геворгян Гнун Завенович - к.ф.м.н., старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, Тел.: (374 91)807 989, E-mail: gnungev@gmail.com

Дарбинян Артавазд Завенович - к.ф.м.н., старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, Тел.: (374 94)109 694, E-mail: darbinyan_1954@mail.ru

Амирджанян Арутюн Арменович - к.ф.м.н., ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении, Тел.: (374 44)920639, E-mail: amirjanyan@gmail.com

Поступила в редакцию 19 марта 2026г.