

**ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО СЛОЯ С  
МЕЖФАЗНЫМИ ДЕФЕКТАМИ**

**В.Н. Акопян, А.А. Амирджанян, С.К.Саакян**

**Ключевые слова:** динамическая смешанная задача, штамп, межфазные дефекты, стационарные колебания

**Накobyan V.N., Amirjanyan A.A., Sahakyan S.K.  
Forced Oscillations of a Piecewise-Homogeneous Layer with Interphase Defects**

**Keywords:** dynamic mixed boundary value problem, stamp, interphase defects, vibrations

The article discusses forced shear vibrations of a piecewise homogeneous layer obtained by joining two heterogenous layers with interphase defects such as tunnel cracks, completely or partially bonded strip thin absolutely rigid inclusions. The layer is deformed by an absolutely rigid stamp with a flat base, acting on the boundary plane of one of the layers under the influence of a concentrated load periodically changing over time. In the general case, discontinuous solutions of the equations of motion of elasticity theory under antiplane deformation are constructed for a composite two-component layer with interphase defects. These solutions are used to write a governing system of singular integral equations for the problem. As an example, a case with only one inclusion and one inclusion partially detached from the matrix is considered.

**Հակոբյան Վ.Ն., Ամիրջանյան Հ.Ա., Սահակյան Ս.Կ.**

**Միջֆազային դեֆեկտներով կտոր առ կտոր համասեռ շերտի ստիպողական տատանումները**

**Հիմնաբառեր:** դինամիկ խառը խնդիր, միջֆազային դեֆեկտներ, ներդրակ, ստացիոնար տատանումներ

Դիտարկված է երկու տարբեր շերտերի միացումից ստացված կտոր առ կտոր համասեռ շերտի հակահարթ ստիպողական տատանումները, երբ այն պարունակում է թունելային ճաքերի, լրիվ կամ մասնակի ամրակցված բարակ բացարձակ կոշտ ներդրակների տիպի դեֆեկտներ և դեֆորմացվում է շերտերից մեկի մակերևույթին տեղաբաշխված և ժամանակի ընթացքում պարբերաբար փոփոխվող կենտրոնացված բեռների ազդեցության տակ գտնվող հարթ հիմքով բացարձակ կոշտ դրոշմի օգնությամբ: Ընդհանուր դեպքում կառուցված է միջֆազային դեֆեկտներ պարունակող և հակահարթ դեֆորմացիայի պայմաններում գտնվող երկկոմպոնենտ շերտի համար առաձգականության տեսության շարժման հավասարումների խզվող լուծումները, որոնց հիման վրա ստացված է խնդրի դրոշմի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգը: Որպես օրինակ դիտարկված է այն դեպքը, երբ բաղադրյալ շերտը պարունակում է մեկական լրիվ և մասնակի ամրակցված ներդրակ:

Рассмотрены сдвиговые вынужденные колебания кусочно-однородного слоя, полученного при помощи соединения двух разнородных слоев, с межфазными дефектами типа тоннельных трещин, полностью или частично сцепленных полосовых тонких абсолютно жёстких включений и деформируемого абсолютно жёстким штампом с плоским основанием, действующим на граничной плоскости одного из слоев под воздействием периодически изменяющейся во времени сосредоточенной нагрузки. В общем случае построены разрывные решения уравнений движения теории упругости при антиплоской деформации для составного двухкомпонентного слоя с межфазными дефектами, на основе которых написана определяющая система сингулярных интегральных уравнений поставленной задачи. В качестве примера рассмотрен случай, когда имеется только два включения, одно из которых полностью сцеплено с матрицей, а второе сцеплено с ней лишь по одной грани.

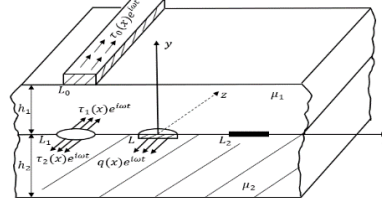
## Введение

Изучение взаимовлияния концентраторов напряжений различных типов, одновременно находящихся в однородных и составных упругих телах, как в статической, так и в динамической постановках, всегда были и остаются одной из весьма актуальных проблем контактных и смешанных задач механики деформируемого твёрдого тела.

Изучению задач о вынужденных стационарных колебаниях многослойных систем с межфазными дефектами типа трещин и абсолютно жёстких включений посвящено достаточно много работ. Разработаны и предложены эффективные методы решения динамических задач для слоистых сред с межфазными дефектами [1-4], поставлен и решен ряд актуальных и интересных задач в этом направлении. С другой стороны, мало работ, изучающих закономерности взаимовлияния обычных или межфазных концентраторов напряжений различных типов, одновременно находящихся в слоистых структурах, которые весьма актуальны с точки зрения сейсмологии, сейсмостойчивого строительства, сейсморазведки и дефектоскопии. В этом направлении отметим работы [5-9], где приведены решения задач о вынужденных сдвиговых колебаниях штампа на границе кусочно-однородного полупространства с межфазными дефектами типа трещин, абсолютно жёстких, полностью или частично сцеплённых, включений и изучены вопросы их взаимовлияния.

### 1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Пусть кусочно-однородный упругий слой из двух разнородных слоев с модулями сдвига  $\mu_1, \mu_2$  и толщиной  $h_1, h_2$  соответственно, отнесённый к декартовой системе координат  $Oxyz$ , на плоскости стыка слоёв, совпадающей с плоскостью  $y=0$ , содержит магистральную межфазную трещину, занимающую область  $\{y=0; x \in L_1; -\infty < z < \infty\}$ , абсолютно жёсткое включение, занимающее область  $\{y=0; x \in L_2; -\infty < z < \infty\}$  и магистральную межфазную трещину, занимающую область  $\{y=0; x \in L; -\infty < z < \infty\}$ , к одному из берегов которой припаяно абсолютно жёсткое тонкое остроугольное полосовое включение. Будем полагать, что свободная поверхность второго слоя жёстко закреплена, а двухкомпонентный слой деформируется под воздействием периодически изменяющихся во времени касательных напряжений интенсивности  $\tau_0(x)e^{i\omega t}$  и  $q(x)e^{i\omega t}$ , приложенных к абсолютно жёсткому полосовому штампу с плоским основанием, прикрепленному к свободной поверхности первого слоя по области  $\{y=h_1; x \in L_0; -\infty < z < \infty\}$ , и к частично оторванному от матрицы полосовому включению соответственно. Будем считать также, что к берегам межфазной трещины также приложены равные, противоположно направленные касательные напряжения интенсивности  $\tau_1(x)e^{i\omega t}$  ( $j=1,2$ ) (Фиг. 1).



Фиг. 1

Как обычно, нужно определить закономерности взаимовлияния межфазных дефектов и штампа, т.е. изменения контактных напряжений, действующих под штампом и включениями, и раскрытия трещины, а также коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины в зависимости от физико-механических и геометрических характеристик задачи, а также частоты вынужденных колебаний.

Снабдив характерные величины слоев соответственно индексами 1 и 2, поставленную задачу в базовой плоскости  $Oxy$  можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{aligned}
 \tau_{yz}^{(1)}(x, h_1, t) &= 0 & (x \notin L_0) \\
 W_1(x, 0, t) &= W_2(x, 0, t) & (x \notin L_1 \cap L_2 \cap L) \\
 \tau_{yz}^{(1)}(x, 0, t) &= \tau_{yz}^{(2)}(x, 0, t) & (x \notin L_1 \cap L_2 \cap L) \\
 W_2(x, -h_2, t) &= 0 & (-\infty < x < \infty) \\
 W_1(x, h_1, t) &= \text{const} e^{i\omega t} & (x \in L_0) \\
 \tau_{yz}^{(j)}(x, 0, t) &= \tau_1(x) e^{i\omega t} & (x \in L_1; j=1,2) \\
 \tau_{yz}^{(1)}(x, 0, t) &= 0 & (x \in L) \\
 W_1(x, 0, t) &= W_2(x, 0, t) = \text{const} e^{i\omega t} & (x \in L_2) \\
 W_2(x, 0, t) &= \text{const} e^{i\omega t} & (x \in L)
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь  $W_j(x, y, t)$  ( $j=1,2$ ) – соответственно смещения точек первого и второго слоев по направлению оси  $Oz$ , удовлетворяющие, каждое в области своего определения, уравнению

$$\frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_j}{\partial y^2} = \frac{1}{(c_2^{(j)})^2} \frac{\partial^2 W_j}{\partial t^2} \tag{1.2}$$

где  $c_2^{(j)}$  ( $j=1,2$ ) – скорости распространения сдвиговых волн в слоях, а  $\tau_{yz}^{(j)}(x, y, t)$  ( $j=1,2$ ) – касательные напряжения, действующие в слоях и связанные со смещениями известными формулами:

$$\tau_{yz}^{(j)}(x, y, t) = \mu_j \frac{\partial W_j(x, y)}{\partial y} \quad (j=1,2) \quad (1.3)$$

Как и в работе [1], по формуле  $f(x, y, t) = f(x, y)e^{i\omega t}$  перейдём к амплитудам искомым величин. Тогда амплитуды функций смещений будут удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_j}{\partial y^2} = -\left(\frac{\omega}{c_2^{(j)}}\right)^2 W_j(x, y) \quad (j=1,2). \quad (1.4)$$

Решения уравнений (1.4) представим в виде интегралов Фурье

$$W_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A_1(\lambda) \operatorname{sh}(\chi_1(\lambda)y) + B_1(\lambda) \operatorname{ch}(\chi_1(\lambda)y)] e^{-i\lambda x} d\lambda; \quad (1.5)$$

$$W_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A_2(\lambda) \operatorname{sh}(\chi_2(\lambda)y) + B_2(\lambda) \operatorname{ch}(\chi_2(\lambda)y)] e^{-i\lambda x} d\lambda,$$

где  $\chi_j(s) = \sqrt{s^2 - k_j^2}$  ( $k_j = \omega / c_2^j$ ,  $j=1,2$ ), а  $A_j(s)$  и  $B_j(s)$  ( $j=1,2$ ) — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. При этом выбраны те ветви функций  $\chi_j(s)$  ( $j=1,2$ ) [2], которые обеспечивают затухание колебаний на бесконечности, т.е. на бесконечности ведут себя как  $|s|$  [10]. Амплитуды напряжений выражены формулами:

$$\tau_{yz}^{(j)}(x, y) = \frac{\mu_j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A_j(\lambda) \operatorname{ch}(\chi_j(\lambda)y) + B_j(\lambda) \operatorname{sh}(\chi_j(\lambda)y)] \chi_j(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda \quad (1.6)$$

$$(j=1,2)$$

Прежде чем перейти к решению граничной задачи (1.1), построим разрывные решения уравнений теории упругости для двухкомпонентного слоя с межфазными дефектами. С этой целью введём в рассмотрение функции амплитуд скачков напряжений  $T(x)$ , разности смещений на дефектах  $W(x)$  и контактных напряжений под штампом  $\tau(x)$ :

$$\begin{aligned}
\tau_{yz}^{(1)}(x, h_1) &= \tau(x) & (x \in L_0); \\
W_1(x, 0) - W_2(x, 0) = W(x) &= \begin{cases} W_*(x) & (x \in L) \\ W_{**}(x) & (x \in L_1) \end{cases}; \\
\tau_{yz}^{(1)}(x, 0) - \tau_{yz}^{(2)}(x, 0) = T(x) &= \begin{cases} T_*(x) & (x \in L) \\ T_{**}(x) & (x \in L_2) \end{cases},
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Решим вспомогательную граничную задачу, состоящую из первых четырех условий задачи (1.1), записанных в амплитудах, и условий (1.7). Используя соотношения (1.5) - (1.6), удовлетворим условиям вспомогательной граничной задачи и выразим коэффициенты  $A_j(s)$  и  $B_j(s)$  ( $j=1,2$ ) через трансформанты Фурье  $\bar{W}(s)$ ,  $\bar{\tau}(s)$  и  $\bar{T}(s)$  функций  $W(x)$ ,  $\tau(x)$  и  $T(x)$ . Получим:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\mu\chi_2}{\mu_1\chi_1} \frac{\bar{\tau}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} + \frac{\text{sh}(\chi_1 h_1) \text{th}(\chi_2 h_2) \bar{T}(\lambda)}{\mu_1 \Delta(\lambda)} - \frac{\mu\chi_2 \bar{W}(\lambda) \text{sh}(\chi_1 h_1)}{\Delta(\lambda)}; \\
A_2 &= \frac{\bar{\tau}(\lambda)}{\mu_1 \Delta(\lambda)} - \frac{\bar{T}(\lambda) \text{ch}(\chi_1 h_1)}{\mu_1 \Delta(\lambda)} - \frac{\chi_1 \bar{W}(\lambda) \text{sh}(\chi_1 h_1)}{\Delta(\lambda)}; \\
B_1 &= \frac{\bar{\tau}(\lambda) \text{th}(\chi_2 h_2)}{\mu_1 \Delta(\lambda)} - \frac{\bar{T}(\lambda) \text{ch}(\chi_1 h_1) \text{th}(\chi_2 h_2)}{\mu_1 \Delta(\lambda)} + \frac{\mu\chi_2 \text{ch}(\chi_1 h_1) \bar{W}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}; \\
B_2 &= \frac{\bar{\tau}(\lambda) \text{th}(\chi_2 h_2)}{\mu_1 \Delta(\lambda)} - \frac{\bar{T}(\lambda) \text{ch}(\chi_1 h_1) \text{th}(\chi_2 h_2)}{\mu_1 \Delta(\lambda)} - \frac{\chi_1 \text{sh}(\chi_1 h_1) \text{th}(\chi_2 h_2) \bar{W}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \\
\Delta(\lambda) &= [\mu\chi_2 \text{ch}(\chi_1 h_1) + \chi_1 \text{th}(\chi_2 h_2) \text{sh}(\chi_1 h_1)] \quad (\mu = \mu_2 / \mu_1)
\end{aligned} \tag{1.8}$$

При помощи полученных значений коэффициентов  $A_j(s), B_j(s)$  ( $j=1,2$ ) вычислим значения функций  $W_1'(x, h_1)$ ,  $W_j'(x, 0)$  и  $\tau_{yz}^{(j)}(x, 0)$  ( $j=1,2$ ). Подставляя полученные значения в (1.5), (1.6) и, учитывая, что [11]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sign } \lambda e^{i\lambda x} dx = \frac{2i}{x}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} dx = \delta(x),$$

где  $\delta(x)$  – известная функция Дирака, найдем:

$$\begin{aligned}
W_1'(x, h_1) &= \frac{1}{\pi\mu_1} \int_{L_0} \frac{\tau(s) ds}{s-x} + \int_{L_0} K_{11}(s-x) \tau(s) ds + \int_{L \cap L_1} K_{12}(s-x) W'(s) ds + \\
&+ \int_{L \cap L_2} K_{13}(s-x) T(s) ds;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{yz}^{(1)}(x, 0) &= \int_{L_0} K_{21}(s-x)\tau(s)ds + \frac{\mu_2}{\pi(1+\mu)} \int_{L \cap L_1} \frac{W'(s)ds}{s-x} + \\
&+ \int_{L \cap L_1} K_{22}(s-x)W'(s)ds + \frac{T(x)}{1+\mu} + \int_{L \cap L_2} K_{23}(s-x)T(s)ds; \\
W_2'(x, 0) &= \int_{L_0} K_{3,1}(s-x)\tau(s)ds - \frac{1}{1+\mu}W'(x) + \int_{L \cap L_1} K_{3,2}(s-x)W'(s)ds - \\
&- \frac{1}{\pi\mu_1(1+\mu)} \int_{L \cap L_2} \frac{T(s)ds}{s-x} + \int_{L \cap L_2} K_{3,3}(s-x)T(s)ds; \\
W_1'(x, 0) &= W'(x) + W_2'(x, 0); \tau_{yz}^{(2)}(x, 0) = T(x) + \tau_{yz}^{(1)}(x, 0)
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Здесь

$$K_{11}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\lambda \operatorname{ch}(\chi_1(\lambda)h_1) [\mu\chi_2 \operatorname{th}(\chi_1(\lambda)h_1) + \chi_1 \operatorname{th}(\chi_2h_2)]}{\mu_1\chi_1\Delta(\lambda)} - 1 \right\} \sin(\lambda x) d\lambda;$$

$$K_{12}(x) = K_{21}(x) = \frac{\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_2 \cos(\lambda x)}{\Delta(\lambda)} d\lambda;$$

$$K_{13}(x) = -K_{31}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda \frac{\operatorname{th}(\chi_2h_2) \sin(\lambda x)}{\mu_1\Delta(\lambda)} d\lambda;$$

$$K_{22}(x) = \frac{\mu_2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\chi_1\chi_2 \operatorname{sh}(\chi_1h_1)}{\lambda\Delta(\lambda)} - \frac{1}{(1+\mu)} \right\} \sin(\lambda x) d\lambda;$$

$$K_{2,3}(x) = -K_{3,2}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \frac{\chi_1(\lambda) \operatorname{sh}(\chi_1h_1) \operatorname{th}(\chi_2h_2)}{\Delta(\lambda)} - \frac{1}{1+\mu} \right] \cos(\lambda x) d\lambda;$$

$$K_{3,3}(x) = -\frac{1}{\pi\mu_1} \int_0^{\infty} \left[ \frac{\lambda \operatorname{ch}(\chi_1h_1)}{\Delta(\lambda) \operatorname{cth}(\chi_2h_2)} - \frac{1}{(1+\mu)} \right] \sin(\lambda x) d\lambda.$$

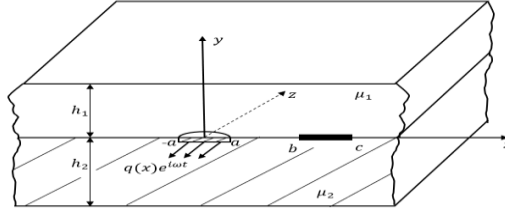
Далее, используя полученные формулы и удовлетворяя последним пяти условиям (1.1), предварительно перейдя в них к амплитудам и дифференцируя первое и последние два из них по  $x$ , придём к системе определяющих сингулярных интегральных уравнений для определения неизвестных скачков напряжений на полностью сцеплённых включениях, дислокации смещений на частично сцеплённых включениях и трещине, а также контактных напряжений под штампом:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi\mu_1} \int_{L_0} \frac{\tau(s)ds}{s-x} + \int_{L_0} K_{11}(s-x)\tau(s)ds + \int_{L \cap L_1} K_{12}(s-x)W'(s)ds + \\
& + \int_{L \cap L_2} K_{13}(s-x)T(s)ds = 0 \quad (x \in L_0); \\
& \frac{\mu_2}{\pi(1+\mu)} \int_{L \cap L_1} \frac{W'(s)ds}{s-x} + \int_{L_0} K_{21}(s-x)\tau(s)ds + \int_{L \cap L_1} K_{22}(s-x)W'(s)ds + \\
& + \int_{L \cap L_2} K_{23}(s-x)T(s)ds = \tau_1(x) \quad (x \in L_1); \\
& \frac{T_*(x)}{1+\mu} + \int_{L_0} K_{21}(s-x)\tau(s)ds + \frac{\mu_2}{\pi(1+\mu)} \int_{L \cap L_1} \frac{W'(s)ds}{s-x} + \\
& + \int_{L \cap L_1} K_{22}(s-x)W'(s)ds + \int_{L \cap L_2} K_{23}(s-x)T(s)ds = 0; \quad (x \in L) \\
& - \frac{1}{1+\mu} W'_*(x) - \frac{1}{\pi\mu_1(1+\mu)} \int_{L \cap L_2} \frac{T(s)ds}{s-x} + \int_{L_0} K_{3,1}(s-x)\tau(s)ds + \\
& + \int_{L \cap L_1} K_{3,2}(s-x)W'(s)ds + \int_{L \cap L_2} K_{3,3}(s-x)T(s)ds = 0 \quad (x \in L); \\
& - \frac{1}{\pi\mu_1(1+\mu)} \int_{L \cap L_2} \frac{T(s)ds}{s-x} + \int_{L_0} K_{3,1}(s-x)\tau(s)ds + \\
& + \int_{L \cap L_1} K_{3,2}(s-x)W'(s)ds + \int_{L \cap L_2} K_{3,3}(s-x)T(s)ds = 0; \quad (x \in L_2)
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Полученную систему мы должны рассматривать при условиях равновесия штампа и включений, а также при условии непрерывности смещений в концевых точках трещины:

$$\begin{aligned}
& \int_L T_*(x)dx = -\int_L q(x)dx = -T_0; \quad \int_{L_2} T_{**}(x)dx = 0; \quad \int_L W'(x)dx = 0; \\
& \int_{L_1} W'(x)dx = 0; \quad \int_{L_0} \tau(x)dx = \int_{L_0} \tau_0(x)dx = Q_0.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

В качестве примера рассмотрим частный случай поставленной задачи, когда отсутствуют межфазная трещина и штамп на поверхности кусочно-однородного слоя (Фиг. 2).



Фиг. 2

Считаем, что на плоскости слоев имеется одно частично сцеплённое межфазное включение, занимающее область  $L = (-a, a)$ , и одно полностью сцеплённое межфазное включение, занимающее область  $L_2 = (b, c)$ . В указанном случае система (1.10) принимает вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{T_*(x)}{1+\mu} + \frac{\mu_2}{\pi(1+\mu)} \int_{-a}^a \frac{W'_*(s) ds}{s-x} + \int_{-a}^a K_{22}(s-x) W'_*(s) ds + \\
& + \int_{-a}^a K_{23}(s-x) T_*(s) ds + \int_b^c K_{23}(s-x) T_{**}(s) ds = \tau_1(x); \quad (-a < x < a) \\
& - \frac{1}{1+\mu} W'_*(x) - \frac{1}{\pi\mu_1(1+\mu)} \int_{-a}^a \frac{T_*(s) ds}{s-x} - \frac{1}{\pi\mu_1(1+\mu)} \int_b^c \frac{T_{**}(s) ds}{s-x} + \\
& + \int_{-a}^a K_{3,2}(s-x) W'_*(s) ds + \int_{-a}^a K_{3,3}(s-x) T_*(s) ds + \int_b^c K_{3,3}(s-x) T_{**}(s) ds = 0 \\
& - \frac{1}{\pi\mu_1(1+\mu)} \int_{-a}^a \frac{T_*(s) ds}{s-x} - \frac{1}{\pi\mu_1(1+\mu)} \int_b^c \frac{T_{**}(s) ds}{s-x} + \int_{-a}^a K_{3,2}(s-x) W'_*(s) ds + \\
& + \int_{-a}^a K_{3,3}(s-x) T_*(s) ds + \int_b^c K_{3,3}(s-x) T_{**}(s) ds = 0; \quad (b < x < c)
\end{aligned} \tag{1.12}$$

а условия (1.11) - вид:

$$\int_{-a}^a T_*(x) dx = -T_0; \quad \int_b^c T_{**}(x) dx = 0; \quad \int_{-a}^a W'(x) dx = 0; \tag{1.13}$$

Чтобы решить полученную систему определяющих уравнений (1.12) приведём её к каноническому виду. Для этого умножим первое уравнение (1.12) на  $\pm\sqrt{\mu}/\mu_2$  и суммируем со вторым уравнением. В итоге, введя новые безразмерные искомые функции по формулам

$$\Phi_1(x) = T_{**}(x)/\mu_2; \quad \Phi_j(x) = W'(x) + (-1)^j \sqrt{\mu} T_*(x)/\mu_2 \quad (j = 2, 3) \tag{1.14}$$

придём к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:



$$\int_{-1}^1 \psi_1(x) dx = 0; \quad \int_{-1}^1 \psi_j(x) dx = T_j^* \quad (j = 2, 3) \quad (1.18)$$

где

$$\psi_1(x) = \varphi_1(px + q); \quad \psi_j(x) = \varphi_j(ax);$$

$$T_j^* = (-1)^{j+1} \sqrt{\mu} T_0 / (a\mu_2); \quad (j = 2, 3)$$

$$Q_{11}(\tau, t) = pR_{11}(p(\tau - t)); \quad Q_{1i}(\tau, t) = aR_{1i}(a\tau - pt - q); \quad (i = 2, 3)$$

$$Q_{j1}(s, x) = pR_{j1}(p\tau + q - at); \quad Q_{ji}(s, x) = aR_{ji}(a(\tau - t)) \quad (i, j = 2, 3)$$

Нетрудно установить, что в точках  $\pm 1$  функция  $\psi_1(t)$  имеет корневую особенность, а функции  $\psi_j(t)$  ( $j = 2, 3$ ) – иные степенные особенности и их можно представить в следующих видах:

$$\psi_1(t) = \frac{\psi_1^*(t)}{\sqrt{1-t^2}}; \quad \psi_2(t) = \frac{\psi_2^*(t)}{(1+t)^\gamma(1-t)^{1-\gamma}}; \quad \psi_3(t) = \frac{\psi_3^*(t)}{(1+t)^{1-\gamma}(1-t)^\gamma}. \quad (1.19)$$

При этом

$$\gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{\mu}}{1-\mu} \quad \text{при } (\mu < 1), \quad \gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{\mu}}{\mu-1} \quad \text{при } (\mu > 1), \quad \text{а}$$

$\psi_j^*(x)$  – непрерывные функции, ограниченные в замкнутом интервале  $[-1, 1]$ .

Подставляя выражения функций  $\psi_j(x)$  ( $j = 1-3$ ) из (1.19) в систему (1.17) и условия (1.18), используя квадратурные формулы, приведённые в [12], по стандартной процедуре, придём к системе из  $3n$  алгебраических уравнений относительно значений  $\psi_j^*(t)$  ( $j = 1-3$ ) в точках коллокации  $\xi_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ). После чего при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа нетрудно восстановить функции  $\psi_j(t)$  ( $j = 1-3$ ) и определить все необходимые величины, характеризующие напряжённо-деформированное состояние в слоях. Таковыми являются раскрытие трещины, контактные напряжения под включениями и коэффициенты разрушающих напряжений в концевых точках трещины.

Приведём формулы для определения коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины. Для этого используем второе из соотношений (1.9) при ( $|x| > a$ ). Далее, учитывая, что вне трещины и включений  $W(x) = T(x) \equiv 0$ , сформулируем это соотношение на интервале  $(-1, 1)$  при помощи функций  $\psi_j(t)$ . Тогда, для определения безразмерных разрушающих напряжений вне дефектов получим формулу:

$$\tau_*(t) = \frac{\tau_{yz}^{(1)}(at, 0)}{\mu_2} = \frac{\tau_{yz}^{(2)}(at, 0)}{\mu_2} = \frac{1}{2\pi(1+\mu)} \int_{-1}^1 \frac{[\psi_2(\tau) + \psi_3(\tau)] d\tau}{\tau - t} + F(t) \quad (1.20)$$

где ограниченная в конечных точках интервала  $(-1, 1)$  функция  $F(t)$  определяется следующей формулой:

$$F(t) = \frac{1}{\mu_2} \int_{-1}^1 K_{2,3}(p\tau + q - at) \psi_1(\tau) d\tau + \frac{1}{2\mu_2} \int_{-1}^1 K_{22}(a(\tau - t)) [\psi_2(\tau) + \psi_3(\tau)] ds + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \int_{-1}^1 K_{23}(a(\tau - t)) [\psi_2(\tau) - \psi_3(\tau)] d\tau.$$

Подставляя выражения функций  $\psi_2(t)$  и  $\psi_3(t)$  из (1.9) в (1.20) и учитывая соотношение [13]

$$\int_a^b \frac{(x-a)^{\alpha-1} (b-x)^{-\alpha}}{x-y} dx = \frac{\pi}{(b-y) \sin \pi\alpha} \left| \frac{a-y}{b-y} \right|^{\alpha-1};$$

$$(0 < \text{Re} \alpha < 1; y < a < b; a < b < y)$$

безразмерные напряжения  $\tau_*(x)$  представим в виде:

$$\tau_*(t) = \frac{\text{sgn}(t)}{2(1+\mu) \sin \pi\gamma} \left\{ \frac{\psi_2^*(\pm 1)}{|1+t|^\gamma |1-t|^{1-\gamma}} + \frac{\psi_3^*(\pm 1)}{|1+t|^{1-\gamma} |1-t|^\gamma} \right\} + F_*(t),$$

где  $F_*(t)$  — ограниченная функция на обоих концах трещины.

С другой стороны, в случае  $\mu < 1$ , так как  $\gamma < 1/2$ , то особенность функции  $\tau_*(\eta)$  в точке  $x=a(t=1)$  определяется первым слагаемым, а в точке  $x=-a(t=-1)$  вторым слагаемым. И наоборот, в случае  $\mu > 1$ . Следовательно, амплитуды комплексных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в конечных точках трещины в случае  $\mu < 1$  будут даваться формулами:

$$K_{III}^*(a) = \frac{K_{III}^{(1)}(a) + iK_{III}^{(2)}(a)}{\mu_2} = \sqrt{2\pi} \lim_{t \rightarrow 1+0} |t-1|^{1-\gamma} \tau_*(t) = \frac{2^{-\gamma-1} \sqrt{\pi} \psi_2^*(1)}{(1+\mu) \sin \pi\gamma};$$

$$K_{III}^*(-a) = \frac{K_{III}^{(1)}(-a) + iK_{III}^{(2)}(-a)}{\mu_2} = \sqrt{2\pi} \lim_{t \rightarrow -1-0} |t+1|^{1-\gamma} \tau_*(t) = -\frac{2^{-\gamma-1} \sqrt{\pi} \psi_3^*(-1)}{(1+\mu) \sin \pi\gamma}.$$

Тогда для комплексных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений имеем:

$$K_{III}(c, t) = K_{III}^*(c) e^{i\omega t} = |K_{III}^*(c)| e^{i(\omega t - \delta)} \left( \delta = -\arctg(K_{III}^{(2)} / K_{III}^{(1)}; c = \mp a) \right).$$

Аналогичным образом можно определить коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений и в случае  $\mu > 1$ .

Амплитуды безразмерного раскрытия трещины определим по формуле:

$$W_*(t) = W(at) / a = \frac{1}{2} \int_{-1}^t [\psi_2(\xi) + \psi_3(\xi)] d\xi.$$

Приведем также формулу для определения безразмерных контактных напряжений, действующих под включением, припаянным к одному из берегов трещины,  $T_*(x)$ . Учитывая, что  $\tau_{yz}^{(1)}(x, 0) = 0$ , когда  $(-a < x < a)$ , в указанном интервале будем иметь  $T_*(x) = -\tau_{yz}^{(2)}(x, 0)$ , записав которое на интервале  $(-1, 1)$  при помощи функций  $\psi_j(t)$  ( $j = 2, 3$ ), для определения безразмерных контактных напряжений получим формулу:

$$\tau(t) = \frac{\tau_{yz}^{(2)}(at, 0)}{\mu_2} = -\frac{T_*(at, 0)}{\mu_2} = -\frac{\psi_2(t) - \psi_3(t)}{2\sqrt{\mu}} \quad (-1 < t < 1)$$

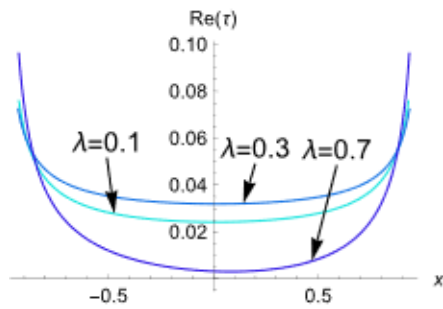
Отметим также, что безразмерные контактные напряжения, действующие на длинных сторонах полностью сцепленного с матрицей включения можно определить при помощи второй формулы (1.9), записав её на интервале  $(-1, 1)$  при помощи функций  $\psi_j(t)$  ( $j = 1-3$ ).

### Численные расчёты

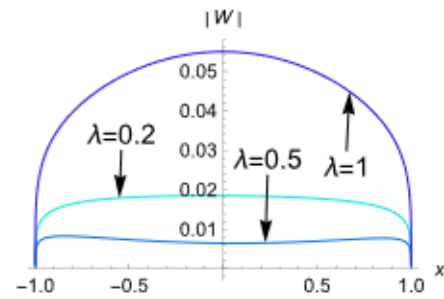
Проведён численный расчёт и изучены закономерности изменения действительных частей амплитуд раскрытия трещины, контактных напряжений под частично оторванным от матрицы включением и коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в зависимости от частоты вынужденных колебаний, от соотношения модулей сдвига слоев и от места расположения полностью сцепленного включения.

Расчёты проводились в случае, когда ширина частично оторванной от матрицы включения равна ширине включения и высоте первого слоя, а высота второго слоя в два раза больше высоты первого слоя, т.е. когда  $a/h_1 = p/h_1 = 1$ ;  $h_2/h_1 = 2$ ,  $q/h_1 = 3$ ;  $c_2^{(1)}/c_2^{(2)} = 2$ . При этом принято  $T_j^* = (-1)^{j+1} 0.1$ ,  $\mu = 2/3$  и изучены закономерности изменения абсолютных величин модулей безразмерных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины, а также раскрытия трещины, действительных частей контактных напряжений под частично оторванным от матрицы включением и скачка напряжений на длинных сторонах полностью сцепленного включения в зависимости от приведённой частоты вынужденных колебаний  $\lambda = h_1\omega/c_2^{(1)}$ .

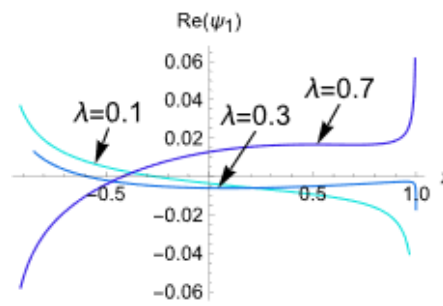
Результаты численных расчётов приведены в виде графиков Фиг.3-5 и таблицы 1



Фиг. 3



Фиг.4



Фиг.5

Таблица 1

$\lambda$	0.2	0.3	0.5	0.7	1
$ K_{III}(1) $	0.01373	0.01527	0.02356	0.00391	0.01412
$ K_{III}(-1) $	0.01426	0.01447	0.02422	0.00533	0.00969

Из них явствует, что при увеличении частоты вынужденных колебаний абсолютная величина амплитуды раскрытия трещины сначала уменьшается, а затем возрастает (Фиг.3). При этом происходит перераспределение действительных частей амплитуд контактных напряжений под частично оторванным включением и скачка контактных напряжений, действующих на длинных сторонах полностью сцеплённого включения. Контактные напряжения под частично оторванным включением в средней части контактной зоны сначала увеличиваются, а затем уменьшаются (Фиг.4). Что же касается действительной части скачка контактных напряжений, действующих под включением, то они при увеличении параметра  $\lambda$  меняют знак (Фиг.5).

В таблице 1 приведены значения модулей амплитуд безразмерных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках частично оторванного включения. Они показывают, что при увеличении частоты вынужден-

ных колебаний коэффициенты интенсивности напряжений на обоих концах трещины сначала увеличиваются, а затем, колеблясь, уменьшаются.

Изучены также изменения указанных выше величин, в зависимости от соотношения  $h = h_2 / h_1$  при тех же значениях характеристик, когда  $\lambda = 0.2$ . Результаты численных расчётов приведены в виде графиков Фиг.6-8 и Таблицы 2.

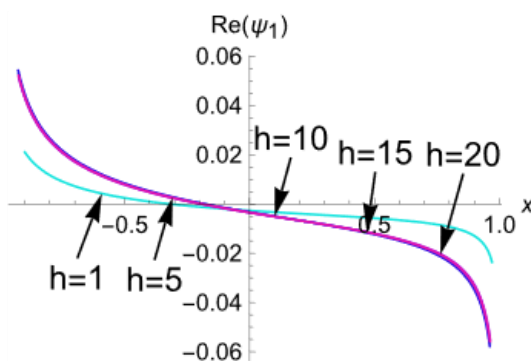
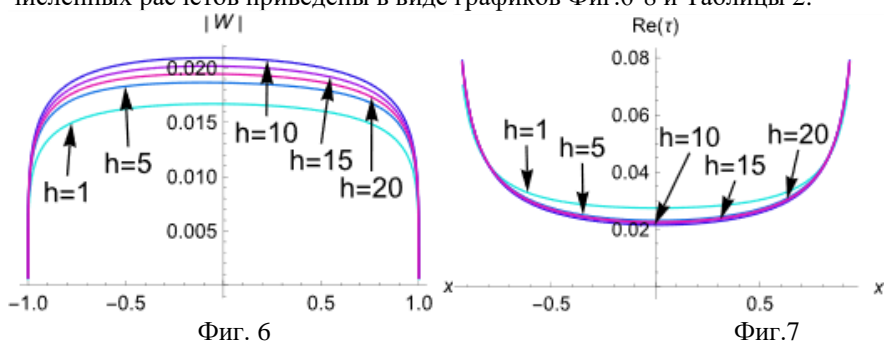


Таблица 2

$h$	1	3	5	10	15
$ K_{III}(1) $	0.01377	0.01380	0.01427	0.01256	0.01306
$ K_{III}(-1) $	0.01408	0.01435	0.01481	0.01313	0.01306

Они показывают, что при увеличении параметра  $h$ , что можно трактовать как увеличение высоты второго слоя  $h_2$ , абсолютная величина амплитуды раскрытия трещины возрастает и, колеблясь, стремится к определённому пределу (Фиг.6). Действительные части контактных напряжений под частично оторванным включением до значения  $h = 5$  в средней части контактной зоны уменьшаются, а по краям возрастают (Фиг.7). Действительные же части скачка контактных напряжений,

действующих под включением, по абсолютной величине возрастают (Фиг.8). Дальнейшее возрастание  $h$  почти не влияет на распределение контактных напряжений и скачка контактных напряжений.

В таблице 2 приведены значения модулей амплитуд безразмерных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках частично оторванного от матрицы включения. Из них явствует, что при возрастании параметра  $h$  модули амплитуд безразмерных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений сначала возрастают, а затем, колеблясь, стремятся к определённому пределу.

### **Заключение**

Исследованы закономерности взаимовлияния различных типов межфазных дефектов, находящихся в кусочно-однородном двухкомпонентном слое с заземлённым одним основанием, находящемся под воздействием периодически изменяющихся во времени нагрузок. Выведена определяющая система сингулярных интегральных уравнений задачи и, в частном случае, когда составной слой содержит одно полностью сцеплённое включение и одно включение, одна из длинных сторон которого оторвана от матрицы, построено решение задачи методом механических квадратур. Приведены простые формулы для определения коэффициентов интенсивности в концевых точках трещины, контактных напряжений и раскрытия трещины. Проведён численный расчёт и изучены закономерности изменения важных механических характеристик задачи в зависимости от физико-механических и геометрических характеристик задачи. Показано, что, когда высота слоя, одно основание которого заземлено, увеличивается, возрастают действительные части контактных напряжений под частично оторванным включением, скачки контактных напряжений, действующих под включением, и абсолютная величина амплитуды раскрытия трещины, стремясь к определённым пределам, соответствующим случаю кусочно-однородного полупространства.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОНКС РА в рамках научного проекта 25RG-2C221.*

### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Бабешко В.А. К проблеме динамического разрушения трещиноватых слоистых тел // ДАН СССР. 1989. Т. 207. № 2. С. 324–327.
2. Бабешко В.А. Среды с неоднородностями (случай совокупности включений и неоднородностей) // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 5–9.
3. Бабешко В.А., Павлова А.В., Ратнер С.В., Вильямс Р.Т. К решению задачи о вибрации упругого тела, содержащего систему внутренних полостей // ДАН. 2002. Т. 382. № 5. С. 625–628.
4. Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 500–507.

5. Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Акопян Л.В. Вынужденные сдвиговые колебания штампа на границе составного полупространства с межфазными дефектами // Известия НАН РА, Механика, т.72, № 2, 2019г, с. 6-23.
6. Hakobyan V.N., Sahakyan A.V., Sargsyan A.H. The plane deformation state of elastic plane with finite rigid inclusion under harmonic loading. // Proceedings of the Twelfth International Conference on Composites or Nano Engineering, ICCE-12 August 1-6, 2005, Spain.
7. Акопян В. Н., Саргсян А.О. Об одной динамической смешанной задаче для составного пространства с трещиной при антиплоской деформации. //В сб статей «Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести», посв. 75 летию академика М. А. Задосяна, Ереван, «Гитутюн» 2006, с. 50-56.
8. Амирджанян А.А., Акопян Л.В. Антиплоская динамическая контактная задача для составного полупространства с межфазной трещиной. // Сб. трудов 9-ой между. конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», октябрь 1-6, 2018, Горис, с 44-48.
9. Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A. and Dashtoyan L.L. Forced shift vibrations of stamp on the border of composite half-space with interfacial partially detached thin inclusions from the matrix //Journal of Physics: Conference Series, 2020, volume 1474 <https://iopscience.iop.org/issue/1742-6596/1474/1>
10. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа.-Н: Мир, 1962г., 279ст.
11. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. //изд-во Наука, Москва 1977г., 288ст.
12. A.V.Sahakyan and H.A.Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012070 doi :10.1088/1742-6596/991/1/012070
13. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integrals and series. Moscow. Nauka. 1981. 738p. (In Russian).

#### **Сведения об авторах:**

**Акопян Ваграм Наслетникович** -доктор физ.-мат. наук., проф., главный научный сотрудник Института механики НАН РА, тел.: (37410) 52-48-90, e-mail: [vhakobyan@sci.am](mailto:vhakobyan@sci.am)

**Амирджанян Арутюн Арменович** – кандидат физ.-мат. наук., ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА, тел.: (37410) 52-48-90, e-mail: [amirjanyan@gmail.com](mailto:amirjanyan@gmail.com)

**Саакян Сона Коляевна** – аспирант Института механики НАН РА, (37410) 52-48-90, e-mail: [sonasahakyan1999@gmail.com](mailto:sonasahakyan1999@gmail.com)

Поступила в редакцию 3 марта 2026 г.