ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 79, №1-2, 2026 Механика
УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2026.79.1-2-5

СОСТАВНОЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО С ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ ЭЛЕКТРОДОМ НА ПОВЕРХНОСТИ ПРИСОЕДИНЕНИЯ ДВУХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ

Агаян К.Л., Закарян В.Г.

Ключевые слова: пьезоэлектрик, поверхностная волна, электрод, потенциал, волновое число.

Aghayan K.L., Zakaryan V.G.

A Composite Piezoelectric Space Weakened with Semi-Infinite Electrode on Joint Surface of Two Half-Spaces

Keywords: piezoelectric, surface wave, electrode, potential, wave number.

A solution to the problem for excitation and propagation of shear surface waves localized along the interphase between two piezoelectric half-spaces is constructed. Formulas for determination of the distribution of surface wave amplitudes, conditioned by the presence of a semi-infinite electrode in the form of a thin metal or adhesive conductive layer are derived.

Աղայան Կ.Լ, Զաքարյան Վ.Գ.

Բաղադրյալ պիեզոէլեկտրիկ տարածությունը երկու կիսատարածությունների միացման մակերևույթում տեղադրված կիսաանվերջ էլեկտրոդի առկայությամբ

Հիմնաբառեր. պիեզոէլեկտրիկ, մակերևույթային ալիք, էլեկտրոդ, պոտենցիալ, ալիքային թիվ:

Կառուցված է, երկու պիեզոէլեկտրական կիսատարածություններից կազմված տարածությունում նյութերի բաժանման հարթությունում մակերևույթային էլեկտրաառաձգական ալիքների գրգռման և տարածման խնդրի լուծումը Ֆուրյեի ինտեգրալների տեսքով: Ստացվել են վերջավոր տեսքի բանաձևեր, որոնցով որոշվում են մակերևույթային, անդրադարձվող և անցնող ալիքների ամպլիտուդների բաշխումները, պայմանավորված մետաղական կամ առանձին բարակ սալի տեսքով կիսաանվերջ էլեկտրահաղորդիչ էլեկտրոդով:

Построено решение задачи возбуждения и распространения сдвиговых поверхностных волн, локализованных по границе раздела двух пьезоэлектрических полупространств. Получены формулы в конечном виде, определяющие распределение амплитуд поверхностных волн, обусловленное наличием полубесконечного электрода в виде тонкого металлического или клеевого электропроводящего слоя.

1. Введение.

Вопросу возбуждения и распространения сдвиговых поверхностных волн по граничной поверхности неоднородных пьезоэлектрических конструкций, посвящены многочисленные работы. Это, с одной стороны, связано с более растущим спросом на современные электромеханические структуры, различные составные электропроводящие элементы и детали, с другой стороны, - с чисто теоретическими вопросами о возможности устранения или возбуждения поверхностной волны на контактных поверхностях составных электромеханических конструкций. В этих работах, в довольно общих постановках, исследованы закономерности и особенности распространения и дифракции волновых процесов в однородных и составных диэлектрических средах, обладающих свойством пьезоэффекта или взаимодействия упругих и электрических полей. В этих исследованиях особое место занимают работы, в которых рассматриваются задачи распространения и дифракции волновых полей в составных пьезоэлектрических конструкциях. Пьезоэффект и конструктивные (механические или электрические) неоднородности могут существенно влиять на распределение общего волнового поля в кусочно-однородных деформированных твердых телах.

Не вникая в подробности, коротко остановимся на некоторых работах, тесно связанных с рассматриваемой здесь задачей. В первую очередь, отметим книгу [1], в которой впервые было обнаружено существование поверхностных волн в пьезоэлектрическом полупространстве, а также [2-4], посвященных исследованию и разработке основных вопросов, возникающих в указанной области.

В работе [5] получены условия существования и некоторые особенности распространения электроупругих поверхностных волн на границе двух пьезоэлектрических полупространств, склеенных тонким электропроводящим слоем. В работах [6-15] изучаются волновые процесы, связанные, в основном, с появлением и распространением поверхностных сдвиговых волн в пьезоупругих средах. Исследуются контактные и смешанные задачи для составных пьезоэлектрических пространств, полупространств и слоев, содержащих концентраторы напряжений в виде трещин, включений и электродов разных длин. Предполагается, что на разделяющих поверхностях осуществляются различные смешанные механические и электрические условия, обусловленные наличием на контактных поверхностях тонких металлических слоев, трещин, заземленных электродов бесконечной, полубесконечной или конечной длины.

2. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений.

Рассмотрим, обладающее пьезоэффектом, составное упругое пространство в декартовой системе координат $Oxyz$. Пространство состоит из двух, соединенных между собой, пьезоэлектрических полупространств, занимающих соответственно области $\Omega_1\left(|x|<\infty, y>0, |z|<\infty\right)$ и $\Omega_2\left(|x|<\infty, y<0, |z|<\infty\right)$. Главная ось этих пьезоэлектрических полупространств (кристалл $6mm$ гексакональной симметрии) параллельна оси Oz. На контактной плоскости $y=0$, отделяющей полупространства, приклеен полубесконечный электрод в виде тонкого металлического или клеевого электропроводящего слоя. Предполагается, что электрод невесомый, абсолютно гибкий и идеально проводящий, так что механическим взаимодействием электрода с полупространствами пренебрегается.

Введем некоторые обозначения, связанные с электромеханическими параметрами пьезоэлектрических полупространств, отличающиеся индексом $j=1,2$. $k_j=\omega/c_j$ – волновое число, $c_j=\sqrt{\mu_j\left(1+\chi_j\right)/\rho_j}$ – фазовая скорость распространения сдвиговой упругой волны, μ_j, ρ_j – модуль сдвига и плотность, $\chi_j=e_j^2/\mu_j\varepsilon_j$ – коэффициент электромеханической связи, $e_j=e_{15}^{(j)}$, $\varepsilon_j=\varepsilon_{11}^{(j)}$ – диэлектрические и пьезоэлектрические постоянные соответствующих полупространств [1,5].

В пьезоэлектрическом полупространстве Ω_1 распространяется заданная сдвиговая плоская упругая волна антиплоской деформации (SH - волна) с сопутствующим потенциалом электрического поля, падающая из бесконечности под углом $\beta(0<\beta<\pi/2)$ к плоскости xz и поляризованная вдоль оси симметрии $w_\infty(x,y)e^{-i\omega t}$ и $\varphi_\infty(x,y)e^{-i\omega t}$ где:

$$w_\infty(x,y)=A_0e^{ipx-iqy},\ \bar{\varphi}_\infty(x,y)=(e_1/\varepsilon_1)w_\infty(x,y),\ p=k_1\cos\beta;\ q=k_1\sin\beta \qquad (2.1)$$

апмлитуды упругого перемещения и электрического потенциала падающих волн.

В (2.1) A_0 – постоянная, ω – частота колебаний падающей волны, t – время.

Рассматривается задача определения, обусловленного наличием в контактной зоне полубесконечного электрода, дифрагированного электроупругого волнового поля в составном пространстве, состоящем из Ω_1 и Ω_2, при дифракции сдвиговой электроупругой плоской волны (2.1).

При этом, основное внимание будет уделено на поверхностные волны, возникающие на контактной поверхности.

Для определения амплитуд упругого перемещения $w_j(x,y)$ и электрического потенциала $\varphi_j(x,y)$ в соответствующих полупространствах имеем уравнения [1,2]:

$$\begin{aligned}
&\Delta w_j(x,y)+k_j^2w_j(x,y)=0, && (x,y)\in\Omega_j\\
&\Delta\varphi_j(x,y)+k_j^2\,e_j/\varepsilon_j\,w_j(x,y)=0, && (x,y)\in\Omega_j
\end{aligned} \qquad (2.2)$$

где

$$e_j=e_{15}^{(j)},\quad \varepsilon_j=\varepsilon_{11}^{(j)},\ k_j=\omega/c_j,\ c_j=\sqrt{\mu_j(1+\chi_j)/\rho_j},\quad \chi_j=e_j^2/\mu_j\varepsilon_j \qquad (2.3)$$

По постановке задачи решения уравнений (2.2) должны удовлетворять следующим контактным – граничным условиям на плоскости $y=0$ (непрерывность электроупругого поля):

$$\begin{aligned}
&w_1(x,+0)=w_2(x,-0), && |x|<\infty\\
&\sigma_{yz}^{(1)}(x,+0)=\sigma_{yz}^{(2)}(x,-0), && |x|<\infty\\
&\varphi_1(x,+0)-\varphi_2(x,-0)=f_-(x), && |x|<\infty\\
&D_{y1}(x,+0)-D_{y2}(x,-0)=g_+(x), && |x|<\infty
\end{aligned} \qquad (2.4)$$

Выше, $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ – оператор Лапласа; $f_-(x)$ – значение электрического потенциала при $x<0$, при $x>0$ $f_-(x)=0$; $g_+(x)$ – неизвестный скачок электрической индукции при $x>0$, при $x<0$ $g_+(x)=0$,

$$D_y(x,y)=e_{15}\frac{\partial w}{\partial y}+\varepsilon_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial y} \qquad (2.5)$$

на полубесконечном электроде $(0,\infty)$.

Решение задачи должно удовлетворять еще и условиям уходящей волны [16].

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению краевой задачи (2.2) – (2.4).

3. Решение задачи (2.2) – (2.4) и вывод определяющего уравнения.

Введем функции

$$W_1(x,y)=w_1(x,y)-w_\infty(x,y);\quad \Phi_1(x,y)=\varphi_1(x,y)-\varphi_\infty(x,y) \tag{3.1}$$

где $w_\infty(x,y)$ и $\varphi_\infty(x,y)$ даются формулами в (2.1).

Подставим (3.1) в (2.2) и применим преобразование Фурье (ПФ) по переменной x к полученным уравнениям и к граничным условиям (2.4). В итоге придем к следующей краевой задаче

$$\begin{gathered}\frac{d^2\bar{W}_1}{dy^2}-\gamma_1^2\bar{W}_1(\sigma,y)=0;\ \frac{d^2\bar{\Phi}_1}{dy^2}-\sigma^2\bar{\Phi}_1(\sigma,y)+\frac{e_1}{\varepsilon_1}k^2\bar{W}_1(\sigma,y)=0,\ \ y>0,\\ \frac{d^2\bar{W}_2}{dy^2}-\gamma_2^2\bar{W}_2(\sigma,y)=0;\ \frac{d^2\bar{\varphi}_2}{dy^2}-\sigma^2\bar{\varphi}_2(\sigma,y)+k_2^2\frac{e_2}{\varepsilon_2}\bar{w}_2(\sigma,y)=0,\ \ y<0,\end{gathered} \tag{3.2}$$

$$\bar{W}_1(\sigma,+0)+\bar{w}_\infty(\sigma,+0)=\bar{w}_2(\sigma,-0) \tag{3.3}$$

$$\bar{\Phi}_1(\sigma,+0)+\bar{\varphi}_\infty(\sigma,+0)=\bar{\varphi}_2(\sigma,-0)=0 \tag{3.4}$$

$$\left.\left(e_1\frac{d\bar{w}_1}{dy}-\varepsilon_1\frac{d\bar{\varphi}_1}{dy}\right)\right|_{y=+0}-\left.\left(e_2\frac{d\bar{w}_2}{dy}-\varepsilon_2\frac{d\bar{\varphi}_2}{dy}\right)\right|_{y=-0}=\bar{G}_+(\sigma) \tag{3.5}$$

$$\left.\left[\mu_1\frac{d\bar{w}_1}{dy}+e_1\frac{d\bar{\varphi}_1}{dy}\right]\right|_{y=+0}=\left.\left[\mu_2\frac{d\bar{w}_2}{dy}+e_2\frac{d\bar{\varphi}_2}{dy}\right]\right|_{y=-0} \tag{3.6}$$

В (3.1) – (3.6)

$$\gamma_j(\sigma)=\sqrt{\sigma^2-k_j^2},\quad \bar{f}(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\sigma x}dx$$

$$\bar{w}_\infty(\sigma,y)=2\pi A_0e^{iqy}\delta(\sigma+p);\quad \bar{\varphi}_\infty(\sigma,y)=2\pi A_0(e_1/\varepsilon_1)e^{iqy}\delta(\sigma+p),$$

а $\delta(\sigma)$ - дельта функция Дирака.

Общее решение системы (3.2), представляющее уходящие волны, ищем в виде:

$$\begin{gathered}\bar{w}_1(\sigma,y)=A_1e^{-\gamma_1y}+\bar{w}_\infty(\sigma,y),\quad y>0\\ \bar{\varphi}_1(\sigma,y)=B_1e^{-|\sigma|y}+(e_1/\varepsilon_1)\bar{W}_1(\sigma,y)+\bar{\varphi}_\infty(x,y),\quad y>0\end{gathered} \tag{3.7}$$

$$\begin{gathered}\bar{w}_2(\sigma,y)=A_2e^{\sqrt{\gamma_2}y},\quad y<0\\ \bar{\varphi}_2(\sigma,y)=B_2e^{|\sigma|y}+(e_2/\varepsilon_2)\bar{w}_2(\sigma,y),\quad y<0\end{gathered} \tag{3.8}$$

где $A_i,\ B_i\ (i=1,2)$, подлежащие определению, постоянные интегрирования.

Теперь, при помощи (3.7) и (3.8), удовлетворяя условиям (3.3) – (3.5), для $A_i,\ B_i\ \left(i=1,2\right)$ получим:

$$A_1 = A_2 - \bar{w}_\infty\left(\sigma,0\right), \qquad B_1 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}B_2 + \frac{1}{\varepsilon_1|\sigma|}\bar{G}_+\left(\sigma\right)$$

$$A_2 = -\frac{1}{e_1+e_2}\frac{1}{|\sigma|}\bar{G}_+\left(\sigma\right) + \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{e_1+e_2}\bar{F}_-\left(\sigma\right) \tag{3.9}$$

$$B_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1\left(e_1+e_2\right)}\frac{\bar{G}_+\left(\sigma\right)}{|\sigma|} + \frac{e_1\varepsilon_2 - e_2\varepsilon_1}{\varepsilon_2\left(e_1+e_2\right)}\bar{F}_-\left(\sigma\right)$$

где

$$\bar{G}^+\left(\sigma\right) = \int_{-\infty}^{\infty} g_+\left(x\right)e^{i\sigma x}dx; \quad \bar{F}_-\left(\sigma\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f_-\left(x\right)e^{i\sigma x}dx \tag{3.10}$$

Удовлетворяя, при помощи (3.7) – (3.9), граничному условию (3.6), приходим к следующему функциональному уравнению (краевая задача типа Римана) на действительной оси, относительно неизвестных функции $\bar{F}_-\left(\sigma\right)$ и $\bar{G}_+\left(\sigma\right)$:

$$|\sigma|^{-1}\bar{G}_+\left(\sigma\right) + \bar{K}\left(\sigma\right)\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)\bar{F}_-\left(\sigma\right) = A_0^{(1)}\left(e_1+e_2\right)\delta\left(\sigma+p\right) \tag{3.11}$$

где

$$\bar{K}\left(\sigma\right) = \bar{K}_f\left(\sigma\right)/\bar{K}_g\left(\sigma\right)$$

$$\bar{K}_g\left(\sigma\right) = \mu_1^*\left[\gamma_1\left(\sigma\right) - \tilde{\chi}_1|\sigma|\right] + \mu_2^*\left[\gamma_2\left(\sigma\right) - \tilde{\chi}_2|\sigma|\right] \tag{3.12}$$

$$\bar{K}_f\left(\sigma\right) = \mu_1^*\left[\gamma_1\left(\sigma\right) - \tilde{\chi}_1^*|\sigma|\right] + \mu_2^*\left[\gamma_2\left(\sigma\right) - \tilde{\chi}_2^*|\sigma|\right] \tag{3.13}$$

$$A_0^{(1)} = 4\pi i A_0\mu_1^* q\left[\bar{K}_g\left(-p\right)\right]^{-1}; \quad \mu_j^* = \mu_j\left(1+\chi_j\right)$$

$$\chi_j = e_j^2/\mu_j\varepsilon_j; \quad \tilde{\chi}_j = \chi_j/\left(1+\chi_j\right); \quad \tilde{\chi}_j^* = r_j\tilde{\chi}_j; \quad \left(j=1,2\right) \tag{3.14}$$

$$r_1 = r/e_1\varepsilon_2; \quad r_2 = r/e_2\varepsilon_1; \quad r = \left(e_1\varepsilon_2 - e_2\varepsilon_1\right)^2/\varepsilon_1\varepsilon_2\left(e_1+e_2\right)$$

Таким образом, решение поставленной задачи, при общей неоднородности, свелось к решению функционального уравнения (3.11) относительно неизвестных функций $\bar{G}_+\left(\sigma\right)$ и $\bar{F}_-\left(\sigma\right)$. Имея эти функции, при помощи формул (3.7)-(3.9), можно определить дифракционное электроупругое волновое поле в полупространствах Ω_1 и Ω_2.

4. Решение определяющего уравнения (3.11).

Обращаясь к решению функционального уравнения (3.11), заметим следующее. Построение аналитического решения для (3.11), методом факторизации, как нам кажется, практически невозможно. Это связано с тем обстоятельством, что в выражении $\bar{K}(\sigma)$ функции $\gamma_1(\sigma)$, $\gamma_2(\sigma)$ и $|\sigma|$ входят с довольно сложными сочетаниями параметров задачи.

В некоторых частных случаях, например, при $r=0\ (e_1\varepsilon_2 = e_2\varepsilon_1)$, удается, при помощи обобщенных функций, построить решение для (3.11). Но полученное решение очень сложно и практически непригодно для исследования волнового поля без дополнительных упрощений полученных формул.

Исходя из сказанного, решение (3.11) построим в предположении, что $k_1 = k_2$, что не означает однородность пространства. Например, в частично - неоднородном случае, когда имеет место равенство:

$$\frac{\mu_1 + e_1^2/\varepsilon_1}{\rho_1} = \frac{\mu_2 + e_2^2/\varepsilon_2}{\rho_2}$$

условие $k_1 = k_2$ удовлетворяется точно.

Тогда вместо (3.11) получается следующее уравнение:

$$|\sigma|^{-1}\bar{G}_+(\sigma) + \bar{\mathrm{K}}_0(\sigma)(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\bar{F}_-(\sigma) = -A_0^{(1)}(e_1+e_2)\delta(\sigma+p) \tag{4.1}$$

$$\bar{\mathrm{K}}_0^*(\sigma) = \frac{(1+\chi_0^*)\left[\gamma_0(\sigma) - \chi_{02}|\sigma|\right]}{(1+\chi_0)\left[\gamma_0(\sigma) - \chi_{01}|\sigma|\right]} \tag{4.2}$$

где

$$\gamma_0 = \sqrt{\sigma^2 - k_0^2}; \quad \chi_{01} = \chi_0/(1+\chi_0); \quad \chi_{02} = \chi_0^*/(1+\chi_0^*)$$

$$\chi_0 = \frac{\mu_1\chi_1 + \mu_2\chi_2}{\mu_1+\mu_2}; \quad \tilde{\chi}_0 = \frac{\mu_1\tilde{\chi}_1 + \mu_2\tilde{\chi}_2}{\mu_1+\mu_2} \tag{4.3}$$

$$\chi_0^* = \frac{\mu_1\chi_1 r_1 + \mu_2\chi_2 r_2}{\mu_1+\mu_2}; \quad \tilde{\chi}_0^* = \frac{\mu_1\tilde{\chi}_1 r_1 + \mu_2\tilde{\chi}_2 r_2}{\mu_1+\mu_2}$$

а χ_j, $\tilde{\chi}_j$ и $r_j\ (j=1,2)$ даются формулами (3.14), а k_0 - число, связанное с k_1 и k_2 определенным образом.

Решение уравнения (4.1) построим методом факторизации [16]. Относительно функции $\gamma_0(\sigma)$ принимаются следующие предположения.

Считается, что в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ действительная ось обходит точку ветвления функции $\gamma_0(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - k_0^2}$ $\sigma = -k_0$ сверху, а $\sigma = k_0$ - снизу, т.е. принимается, что $\sqrt{\sigma^2 - k_0^2} > 0$ при $|\sigma| > k$ и $\sqrt{\sigma^2 - k_0^2} = -i\sqrt{k_0^2 - \sigma^2}$ при $|\sigma| < k$ [16,17]. Принимается также, что $\gamma_0(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_0^2} \to |\sigma|$ при $|\sigma| \to \infty$, которым обеспечивается условие уходящей волны.

Представим функцию $\bar{K}_0(\sigma)$ из (4.2) в виде

$$\bar{\mathrm{K}}_0^*(\sigma)=\left(\bar{K}_{00}(\sigma)\bar{K}_{11}(\sigma)\right)\big/\bar{K}_{12}(\sigma) \tag{4.4}$$

$$\bar{K}_{00}(\sigma)=\frac{(\sigma-\sigma_{n2})(\sigma+\sigma_{n2})}{(\sigma-\sigma_{n1})(\sigma+\sigma_{n1})};\qquad \bar{K}_{1j}(\sigma)=\frac{\sqrt{\sigma^2-k_0^2}+\chi_{0j}|\sigma|}{(1+\chi_{0j})\sqrt{\sigma^2-k_0^2}} \tag{4.5}$$

$$\sigma_{n1}=\frac{k_0}{\sqrt{1-\chi_{01}^2}}=k_0\frac{1+\chi_{01}}{\sqrt{1+2\chi_{01}}}>k_0;\ \sigma_{n2}=\frac{k_0}{\sqrt{1-\chi_{02}^2}}=k_0\frac{1+\chi_{02}}{\sqrt{1+2\chi_{02}}}>k_0 \tag{4.6}$$

Здесь σ_{n1} и σ_{n2} волновые числа хорошо известных бездисперсионных сдвиговых поверхностных электроупругих волн Блюстейна – Гуляева [1,12], локализованных возле граничной поверхности $y=0$. При этом, σ_{n1} соответствует граничной полуплоскости $(y=0,\ x>0)$, где расположен электрод, а σ_{n2} - полуплоскости $(y=0,\ x<0)$, где осуществляется полный электромеханический контакт между Ω_1 и Ω_2.

Очевидно, что $\sigma_{n1}>\sigma_{n2}>k_0$, из чего следует следующая связь между скоростями соответствующих поверхностных волн $\omega/\sigma_{n1}<\omega/\sigma_{n2}<c$, где c - скорость распространения электроупругой волны в пьезоэлектрике.

Функция $\bar{K}_{00}(\sigma)$ из (4.5) допускает простую факторизацию в виде [17]:

$$\bar{K}_{00}(\sigma)=\bar{K}_{00}^+(\sigma)\bar{K}_{00}^-(\sigma);\ \ \bar{K}_{00}^+(\sigma)=\frac{\sigma+\sigma_{n2}}{\sigma+\sigma_{n1}};\ \ \bar{K}_{00}^-(\sigma)=\frac{\sigma-\sigma_{n2}}{\sigma-\sigma_{n1}} \tag{4.7}$$

Факторизация (4.3) следует из очевидного утверждения, что $\bar{K}_0^+(\alpha)=$ $=(\alpha+\sigma_{n2})/(\alpha+\sigma_{n1})$, как функция компексного переменного $\alpha=\sigma+i\tau$, является аналитическим продолжением функции $\bar{K}_0^+(\sigma)$ в полуплоскость $\mathrm{Im}\alpha>0$, а функция $\bar{K}_0^-(\alpha)=(\alpha-\sigma_{n2})/(\alpha-\sigma_{n1})$ соответственно в полуплоскость $\mathrm{Im}\alpha<0$. Обеспечивая условие уходящей волны, в комплексной плоскости $\alpha=\sigma+i\tau$ принимается, что действительная ось обходит точки $\sigma=-\sigma_{n1};-\sigma_{n2};-k_0$ сверху, а точки $\sigma=k_0;\sigma_{n2};\sigma_{n1}$ - снизу, где точки $\sigma=\pm k_0$ являются точками ветвления функции $\gamma(\alpha)=\sqrt{\alpha^2-k_0^2}$.

Для функции $\bar{K}_{1j}(\sigma)$, при больших $|\sigma|$, из (4.5) получена приближенная факторизация в следующем виде:

$$\bar{K}_{1j}(\sigma)=\bar{K}_{1j}^+(\sigma)\bar{K}_{1j}^-(\sigma);\quad \bar{K}_{1j}^\pm(\sigma)=\frac{\sqrt{\sigma\pm k_0}\pm i\sqrt{\chi_{0i}}\,(\sigma\pm i0)^{1/2}}{\left(1\pm i\sqrt{\chi_{0i}}\right)\sqrt{\sigma\pm k_0}} \tag{4.8}$$

Теперь, имея факторизационные формулы (4.7) и (4.8), по известной процедуре [17,18], для решения функционального уравнения (4.1) получим

$$\bar{G}_{+}(\sigma)=\frac{Q(-p)}{2\pi i}\frac{\mu_1^*}{\mu_{01}}\frac{\bar{K}_{00}^{+}(\sigma)\bar{K}_{11}^{+}(\sigma)}{\bar{K}_{12}^{+}(\sigma)}\frac{(\sigma+i0)^{1/2}}{(\sigma+p+i0)} \tag{4.9}$$

$$\bar{F}_{-}(\sigma)=-\frac{Q(-p)\mu_1^*}{(1+\chi_{01})(\varepsilon_1+\varepsilon_0)\mu_{02}}\frac{\bar{K}_{12}^{-}(\sigma)}{\bar{K}_{00}^{-}(\sigma)\bar{K}_{11}^{-}(\sigma)(\sigma-i0)^{1/2}}\frac{1}{(\sigma+p-i0)} \tag{4.10}$$

$$Q(-p)=4\pi i A_0\frac{(e_1+e_2)}{(\sigma_{n1}+p)(\sigma_{n2}-p)}\sqrt{\frac{1+\chi_{01}}{1+\chi_{02}}}\frac{\sqrt{k_0+p}-i\chi_{01}\sqrt{p}}{\left[\sqrt{k_0-p}-\chi_{02}\sqrt{p}\right]^{-1}} \tag{4.11}$$

Отметим, что при получении этих формул, для $\delta(\sigma+p)$ и $|\sigma|$ принимались разложения [20]:

$$\delta(\sigma+p)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{(\sigma+p-i0)}-\frac{1}{(\sigma+p+i0)}\right);|\sigma|=(\sigma-i0)^{1/2}(\sigma+i0)^{1/2} \tag{4.12}$$

Имея $\bar{G}_{+}(\sigma)$ и $\bar{F}_{-}(\sigma)$, при помощи (3.9), определяются значения постоянных $A_i,\ B_i\ (i=1,2)$. Далее из (3.7) и (3.8), после обратного преобразования Фурье, получим окончательные выражения для $w_j(x,y)$ и $\varphi_j(x,y)$, определяющие распределение электроупругого волнового поля в соответствующих подоблостях рассматриваемого составного пьезоэлектрического пространства.

В частности, для упругого перемещения $w_1(x,y)$ в полупространстве $\Omega_1(y>0)$ будем иметь

$$\begin{gathered}w_1(x,y)=\frac{Q_1(-p)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{R}_1^{+}(\sigma)\frac{(\sigma+i0)^{1/2}}{|\sigma|(\sigma+p+i0)}e^{-\gamma_0 y-i\sigma x}d\sigma-\\-\frac{Q_2(-p)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\bar{R}_1^{+}(\sigma)}\frac{e^{-\gamma_0 y-i\sigma x}}{(\sigma-i0)^{1/2}(\sigma+p-i0)}d\sigma+A_0\left(e^{-iqy}-e^{iqy}\right)e^{i\sigma x};\\Q_1(-p)=\frac{Q(-p)}{2\pi i(e_1+e_2)};\quad Q_2(-p)=\frac{Q(-p)\mu_{01}}{2\pi i\mu_{02}(1+\chi_{01})};\\\bar{R}_1^{\pm}(\sigma)=\bar{K}_{00}^{\pm}(\sigma)\bar{K}_{11}^{\pm}(\sigma)/\bar{K}_{12}^{\pm}(\sigma);\qquad (x,y)\in\Omega_1\end{gathered} \tag{4.13}$$

Здесь $Q(-p)$ дается формулой (4.11), а $\bar{K}_{ij}^{\pm}(\sigma)$ - формулами (4.5) и (4.7).

В подынтегральные выражения (4.13) входят довольно сложные, по своей структуре, факторизованные функции. Очевидно, что в подобных случаях, для полного изучения характерных особенностей волнового поля в пьезоэлектрическом полупространстве, следует подробно исследовать интегральные составляющие, входящие в (4.13), и, в итоге, получить аналитические выражения для соответствующих потенциалов, которые более адекватно представляют дифрагированное волновое поле в рассматриваемой области.

Не останавливаясь на вычислительных подробностях, отметим лишь, что исследование интегральных составляющих, входящих в (4.13) (и в подобных случаях в дальнейшем), проведена методом контурного интегрирования, следуя работам [10,12,13,17].

При этом для выбора ветвей двузначной функции $\gamma_0(\alpha)=\sqrt{\alpha^2-k_0^2}$ и $|\alpha|$ в комплексной плоскости $\alpha=\sigma+i\tau$ проведены соответствующие разрезы [10]. В итоге, из (4.13) и аналогичных выражений получены аналитические представления для амплитуд всех компонентов электроупругого волнового поля – упругое перемещение и потенциал электрического поля в Ω_1 и Ω_2.

Эти выражения в полном объеме здесь не приводятся. В основном остановимся на амплитудных компонентах дифрагированных поверхностных, неоднородных и отраженных волн.

Обратимся теперь к (4.13). Обозначим через $w_1^{(\pm)}(x,y)$ суммарную амплитуду, от внешних воздействий, для упругого перемещения в подобластях $\Omega_1^{(+)}(x>0,y>0,|z|<\infty)$ и $\Omega_1^{(-)}(x<0,y>0,|z|<\infty)$ соответственно. Тогда из (4.13) получим:

$$\begin{aligned} w_1^{(+)}(x,y)&=w_{\text{пад}}(x,y)+w_{1\text{отр}}^{(+)}(x,y)+w_{1\text{пов}}^{(+)}(x,y)+W_1^{(+)}(x,y)\\ w_1^{(-)}(x,y)&=w_{\text{пад}}(x,y)+w_{1\text{отр}}^{(-)}(x,y)+w_{1\text{пов}}^{(-)}(x,y)+W_1^{(-)}(x,y)\end{aligned} \tag{4.14}$$

где

$$w_{\text{пад}}(x,y)=w_\infty(x,y)=A_0e^{ipx-iqy} \tag{4.15}$$

$$w_{1\text{отр}}^{(+)}(x,y)=\left[-A_0+Q_1(-p)\frac{1}{\sqrt{p}}\frac{(1+\chi_{02})(\sigma_{n2}-p)}{(1+\chi_{01})(\sigma_{n1}-p)}\frac{\chi_{01}p-iq}{\chi_{03}p-iq}\right]e^{ipx+iqy} \tag{4.16}$$

$$w_{1\text{отр}}^{(-)}(x,y)=\left[-A_0+Q_2(-p)\frac{1}{\sqrt{p}}\frac{(1+\chi_{01})(\sigma_{n1}-p)}{(1+\chi_{02})(\sigma_{n2}-p)}\frac{\chi_{02}p-iq}{\chi_{01}p-iq}\right]e^{ipx+iqy} \tag{4.17}$$

$$w_{1\text{пов}}^{(+)}(x,y)=-iQ_1(-p)(\sigma_{n1}-\sigma_{n2})e^{-\sqrt{\sigma_{n1}^2-k_1^2}\,y}e^{i\sigma_{n1}x} \tag{4.18}$$

$$w_{1\text{пов}}^{(-)}(x,y)=-iQ_2(-p)(\sigma_{n1}-\sigma_{n2})e^{-\sqrt{\sigma_{n2}^2-k_2^2}\,y}e^{-i\sigma_{n2}x} \tag{4.19}$$

Волновое поле, задаваемое $W_1^{(\pm)}(x,y)$ из (4.14), представляет собой дифрагированные объемные волны, распространяющиеся со скоростью ω/k. Для них получены асимптотические формулы, представляющие волновое поле в дальних зонах, которые здесь не приводятся.

Формулами (4.15) – (4.17) даются амплитудные выражения падающих и отраженных волн в Ω_1, распространяющихся по направлению x_+ (положительное направление оси Ox) со скоростью ω/k.

Формулы (4.18) и (4.19) представляют дифрагированные поверхностные волны, с волновыми числами σ_{n1} и σ_{n2}, распространяющиеся в направлении x_+ и x_- и затухающее при $y \to +\infty$ по закону $\exp\left(-\sqrt{\sigma_{n1}^2 - k_1^2}\,y\right)$ и $\exp\left(-\sqrt{\sigma_{n2}^2 - k_2^2}\,y\right)$.

Для потенциала электрического поля $\varphi_1(x,y)$ в области Ω_1, из (3.7) и (3.9) получим следующее представление:

$$\begin{gathered}\varphi_1(x,y) = \frac{e_1}{\varepsilon_1} w_1(x,y) + \frac{1}{2\pi\varepsilon_1(e_1+e_2)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e_1}{|\sigma|} \bar{G}_+(\sigma) - \right. \\ \left. -(e_1\varepsilon_2 - e_2\varepsilon_1) \bar{F}_-(\sigma) \right] e^{-|\sigma| y} e^{-i\sigma x} d\sigma \end{gathered} \tag{4.20}$$

Потенциал электрического поля, само собой не обладает волновыми свойствами. Однако, как следует из (4.20), $\varphi_1(x,y)$ - сопутствующее упругим перемещениям, имеет аналогичные волновые характеристики, как $w_1(x,y)$. Это связано с применением в задачах определения электроупругого волнового поля в пьезоэлектрической среде уравнений динамической теории упругости и уравнений электродинамики в квазистатическом приближении.

Теперь, если электрическому потенциалу $\varphi_1(x,y)$ присвоить волновые свойства, то мы придем к более полному и наглядному представлению электроупругого волнового поля.

При этом, из идентичности интегрального составляющего (4.20) и $w_1(x,y)$ из (4.13) можем утверждать, что интегральное составляющее из (4.20) возбуждает в Ω_1 еще и волновые компоненты следующих типов:

$\varphi_{11}^{(+)}(x,y) = Q_4(-p) e^{-|p| y} e^{\pm ipx}$ - однородные волны

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{12}^{(+)}(x,y) &= Q_5(-p) e^{-|\sigma_{n1}| y} e^{+i\sigma_{n1} x} \\ \varphi_{13}^{(+)}(x,y) &= Q_6(-p) e^{-|\sigma_{n2}| y} e^{-i\sigma_{n2} x} \end{aligned}\right\} \text{ - поверхностные волны} \tag{4.21}$$

где Q_4, Q_5, Q_6 - постоянные, зависящие от параметров задачи.

Скорость и направление распространения волновых компонентов из (4.21) очевидны и на них не будем останавливаться.

Обращаясь к упругим перемещениям $w_2(x,y)$ в области Ω_2, заметим следующее. Выражение $w_2(x,y)$ совпадет с (4.14) для $w_1(x,y)$, если заменить в нем y

на $-y$, k_1 на k_2 и не учитывать слагаемые с множителем A_0. Так что, для $w_2(x,y)$ в Ω_2 получим выражения, подобные (4.16) – (4.19).

При этом, под $w_{1otr}^{(\pm)}$ следует понимать как приходящая волна.

Аналогичным образом, как в случае $\varphi_1(x,y)$, получим выражения для $w_2(x,y)$.

5. Рассмотрим чисто однородный случай задачи, предполагая, что $\mu_1=\mu_2=\mu_0$; $\rho_1=\rho_2=\rho_0$; $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_0$; $e_1=e_2=e_0$ и, следовательно, $k_1=k_2=k_0$. Т.е. рассмотрим задачу дифрагирования падающей упругой волны $w_\infty^{(0)}(x,y)$ из (2.1) в пьезоэлектрическом однородном пространстве $\Omega_1 \cup \Omega_2$, когда на полуплоскости $\omega_0\left(x>0,\ y=0,\ |z|<\infty\right)$ приклеен электрод с нулевым значением электрического потенциала.

Здесь остановимся только на распределении упругих перемещений $w_{01}(x,y)$ и потенциала электрического поля $\varphi_{01}(x,y)$ в области $\Omega_1^{(+)}\left(x>0,\ y>0,\ |z|<\infty\right)$.

Для $w_{01}(x,y)$ получим

$$\begin{aligned} w_{01}(x,y) &= \frac{P_0}{4\pi e_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{\sigma+k_0}\,\bar{K}_{01}^{+}(\sigma)\bar{K}_0^{+}(\sigma)(\sigma+i0)^{1/2}}{|\sigma|(\sigma+p+i0)}e^{-\gamma_0 y}e^{-i\sigma x}d\sigma+ \\ &+\frac{P_0\left(1-\bar{\chi}_0\right)}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\sigma-i0)^{1/2}(\sigma+p-i0)^{-1}}{\sqrt{\sigma-k_0}\,\bar{K}_{01}^{-}(\sigma)\bar{K}_0^{-}(\sigma)}e^{-\gamma_0 y}e^{-i\sigma x}d\sigma+w_\infty^{(0)}(x,y) \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\bar{K}_{01}^{\pm}(\sigma)=\frac{\sqrt{\sigma\pm k_0}}{\sigma\pm\sigma_{n1}};\quad \bar{K}_0^{\pm}(\sigma)=\frac{\sqrt{\sigma\pm k_0}\pm i\sqrt{\bar{\chi}_0}\,(\sigma\pm i0)^{1/2}}{\left(1\pm i\sqrt{\bar{\chi}_0}\right)\sqrt{\sigma\pm k_0}}$$

$$\gamma_0=\sqrt{\sigma^2-k_0^2};\quad P_0=\frac{2A_0 q e_0\sqrt{p}\left(p\sqrt{\bar{\chi}_0}+iq\right)}{\left(1-\bar{\chi}_0^2\right)\left(1+i\sqrt{\bar{\chi}_0}\right)\sqrt{k_0-p}\,(\sigma_{n1}+p)} \tag{5.2}$$

$$\sigma_{n1}=k_0\Big/\sqrt{1-\bar{\chi}_0^2};\quad \bar{\chi}_0=\chi_0/(1+\chi_0);\quad \chi_0=e_0^2/\mu_0\varepsilon_0$$

Из (5.1) для упругих перемещений в области $\Omega_1^{(+)}$ получим:

$$w_{01}(x,y)=\frac{P_0}{2\pi e_0}\frac{q\sqrt{k_0+p}\left(\sqrt{\overline{\chi}_0 p}-i\sqrt{k_0-p}\right)}{p\left(1+i\sqrt{\overline{\chi}_0}\right)\sqrt{k_0+p}\left(\sigma_{n1}+p\right)}e^{iqy+ipx}+$$

$$+\frac{P_0}{4\pi e_0}\frac{\sqrt{k_0+p}\left(\sqrt{\overline{\chi}_0 p}+i\sqrt{k_0-p}\right)}{\sqrt{1+\overline{\chi}_0}\,p\left(\sigma_{n1}+p\right)}e^{-\sqrt{\sigma_{n1}^2-k_0^2}\,y+i\sigma_{n1}x}+w_{\infty}^{(0)}(x,y)+W_{01}^{(+)}(x,y) \tag{5.3}$$

Таким образом, упругое волновое поле, как следует из (5.3), в $\Omega_1^{(+)}$ состоит из следующих волновых компонентов:

- отраженной волны – первое слагаемое в (5.3),
- поверхностной волны Гуляева – Блюстейна – второе слагаемое в (5.3),
- падающей волны $w_{\infty}^{(0)}(x,y)$, а также затухающей объемной волны $W_{01}^{(+)}(x,y)$.

Для потенциала электрического поля, в этом случае, из (4.21) имеем:

$$\varphi_{01}(x,y)=\frac{e_0}{\varepsilon_0}w_{01}(x,y)+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\sigma|}\overline{G}_{+}^{(0)}(\sigma)e^{-|\sigma|y-i\sigma x}d\sigma \tag{5.4}$$

Из (5.4) следует, что потенциал $\varphi_{01}^{(+)}(x,y)$ в области $\Omega_1^{(+)}$ имеет, сопутствующие к выше указанным компонентам, отраженную и поверхностную компоненты. Кроме этого, обусловленные вторым слагаемым в (5.4) волновые компоненты, аналогичные (4.22), в виде:

$\varphi_{01}^{(1)}(x,y)=P_1 e^{-|p|y}e^{ipx}$ - однородная волна,

$\varphi_{01}^{(2)}(x,y)=P_2 e^{-|\sigma_{n1}|y}e^{i\sigma_{n1}x}$ - поверхностная волна (5.5)

где P_1, P_2 - постоянные, зависящие от параметров задачи.

В конце пункта коротко остановимся на распределении скачка электрической индукции $g_{+}^{(0)}(x)$, для которого, из (3.10) и (4.10) имеем:

$$g_{+}^{(0)}(x)=P_0\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_0^{+}(\sigma)(\sigma-i0)^{-1/2}e^{-i\sigma x}d\sigma$$

$$R_0^{+}(\sigma)=\frac{\left(\sqrt{\sigma+k_0}+i\sqrt{\chi_0}\right)(\sigma+i0)^{1/2}}{\sqrt{\sigma+k_0}}\frac{\sigma+k_0}{\sigma+\sigma_{n1}}\frac{|\sigma|}{\sigma+p+i0} \tag{5.6}$$

$$P_0=\frac{2q\sqrt{p}\left(q+i\overline{\chi}_0 p\right)}{\left(1-\overline{\chi}_0^2\right)\left(\sigma_{n1}+p\right)\sqrt{k_0-p}}$$

Из (5.6), для $g_+^{(0)}(x)$ получим следующее асимптотическое представление [19,20] при $x \to +0$

$$g_+^{(0)}(x) = P_0\left(1 + i\sqrt{\overline{\chi}}\right)e^{i\pi/4}X_+^{-1/2} + 0(1) \tag{5.7}$$

где $X_+^{-1/2} = X^{1/2}$ при $x > 0$ и равняется нулю, при $x < 0$.

Из (5.5) следует, что скачок электрической индукции имеет корневую особенность при $x = +0$.

Для коэффициента интенсивности $g_+^{(0)}(x)$ при $x \to +0$ из (5.7) получим

$$G = P_0\left(1 + i\sqrt{\overline{\chi}_0}\right)e^{i\pi/4} \tag{5.8}$$

Заключение. В рамках антиплоской деформации исследуются вопросы, связанные с определением электроупругого волнового поля в пьезоэлектрическом пространстве, состоящем из двух разных полупространств Ω_1 и Ω_2. На граничной поверхности, отделяющей Ω_1 от Ω_2 приклеен заземленный, полубесконечный электрод.

На плоскости контакта $y = 0$ имеется полный электро – механический контакт, а на полубесконечном электроде электрическая индукция имеет скачок.

Методом факторизации построено решение задачи в квадратурах. Получены аналитические представления для амплитуд электроупругого поля.

Для отраженных, проходящих, поверхностных и однородных волн вычислены и приведены окончательные выражения амплитудных формул упругих перемещений и электрических потенциалов в некоторых, важных для исследования, областях (4.15) – (4.20), (4.22), (5.3) – (5.4).

Эти выражения, в явном виде, содержат основные волновые характеристики возбужденных, вследствие дифрагирования, поверхностных, отраженных и однородных волн. Из этих формул следует, что наличие полубесконечного электрода существенно влияет на распределение электроупругого волнового поля. В этом отношении следует отметить появление новых волновых компонентов (4.18) – (4.20), которые не возбуждаются в случаях, когда – электрод бесконечен [1,2]; электрод отсутствует [12]. Особенно следует отметить появление $\varphi_{12}^{(+)}(x,y)$, $\varphi_{13}^{(-)}(x,y)$, а также $\varphi_{01}^{(1)}(x,y)$, $\varphi_{01}^{(2)}(x,y)$ при однородном случае, которые, в свою очередь, обеспечивают выполнение граничных условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Balakirev M. K. and Gilinski I. A. Waves in Piezocrystals (Novosibirsk: Nauka 1982) p. 239.
2. Parton V.Z., Kudravcev B.A. Electromagnetoelasticity of piezoelectric and electrically conductive bodies. – M. Nauka, 1988, p. 472.
3. Mittra R., Li S. Analytical methods of waveguide theory. M: Mir., 1974. p. 327.
4. Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shulcha N.A. Electroelasticity. / Mechanics of related fields in structural elements. V.5/ - Kiev., Nauka. Dumka., 1989., p. 230.
5. Avetisyan A.S., Margaryan J.M. Electroelastic surface shear waves on an division surface of two piezoelectric half-spaces. //Proc. of NAS Armenia. Mechanics, 1994. T.47. №3-4. p.31-36.
6. Jin F., Wang Z., Wang Tiejun The Bluestein-Gulyaev (B-G) wave in a piezoelectric layered half-space. Int. J. Eng. Sci. 39, 1271-1285 (2001).
7. Li P., Jin. F., Qian Z. Propagation of the Bluestein-Gulyaev waves in a functionally graded transversely isotropic electro-magneto-elastic half-space. //European Journal of Mechanics A/Solids. 37, 2013, pp. 17-23.
8. Grigoryan E. Kh., Melkumyan A.S. Diffraction of a shear plane wave in piezoelectric space at the edge of a semi-infinite metal layer. //Proc. of NAS Armenia. Mechanics, 2004. T.57. №4. p. 43-52.
9. Grigoryan E.Kh., Jilavyan S.H. Diffraction of a plane shear wave in a piezoelectric space with two parallel semi-infinite cracks. Proc. of V Int. Conf. "Topical problems of continuum mechanics ", Goris 2005, pp. 163-168.
10. Aghayan K.L., Grigoryan E.Kh. Diffraction of a plane electro elastic wave on a semi-infinite electrode in a piezoelectric space with a slit. //Proc. of NAS Armenia. Mechanics, 2010. T.63. №1. p. 50-69.
11. Aghayan K.L. Diffraction of electroelastic shear plane waves at the edges of semi-infinite electrodes in piezoelectric space with a slit. / Environmental herald of the scientific centers of the Black Sea economic cooperation. / 2011. №1. p.3-18.
12. Jilavyan S.H., Ghazaryan H.A. Diffraction of Plane Shear Wave in Piezoelectric Semi-Space at a Semi-Infinite Metallic Layer in the Dielectric Medium. //Proc. of NAS Armenia. Mechanics, 2015. T.68. №1. P.45-56.
13. Aghayan K.L., Zakaryan V.G. Surface Electro-Elastic Shear Waves in Piezo-Electrical Half-Space with Semi-Infinite Electrode. Springer Nature Switzerland AG 2025 H. Altenbach. Current Developments in Solid Mechanics and Their Applications. Advanced Structured Materials. 2025. V.223, pp.1-16. https://doi.org/10.1007/978-3-031-90022-8_1.
14. Агаян К.Л., Закарян В.Г. Сдвиговые волны в составном пьезоэлектрическом пространстве со смешанными электромеханическими контактными условиями. Труды IX межд. конф. “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, 22-

26 сентября 2025, Цахкадзор, Армения, Ереван, Изд. Гитутюн, НАН РА 2025, с. 14-18.
15. Aghayan K.L. Plane shear wave in a piezoelectric layer with mixed boundary conditions. Reports of NAS of Armenia, 2023. V.123, №3-4. p.61-73.
16. Nobl B. The Wiener-Hopf method. M. Mir. 1962. p. 297.
17. Grigoryan E.Kh., Aghayan K.L. On a new method for determining asymptotic formulas in wave diffraction problems. Reports of NAS of Armenia, 2010. V.110, №3. p.261-271.
18. Sumbatyan M.A., Skalia A. Fundamentals of diffraction theory with applications in mechanics and acoustics. M.: Fizmatlit. 2013. p. 328.
19. Brichkov Yu.A., Prudnikov A.P. Integral transformations of generalized functions. M-Nauka., 1977., p. 287.
20. Reference mathematical library. /Functional analysis./ M. 1972., p. 544.

Сведения об авторах:

Агаян Каро Леренцович–д.ф.м.н., проф., ведущий научный сотрудник,
Институт Механики НАН Армении
Тел.: (37491) 485566, E–mail: karo.aghayan@gmail.com

Закарян Ваге Гришаевич–к.ф.м.н., ученый секретарь Института Механики НАН Армении. Тел.: (37477) 789264,   E–mail: vahe-zaqaryan@mail.ru

Поступила в редакцию   11 марта 2026г.