ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LIII 1971 2

УДК 523.877

АСТРОФИЗИКА

Е. М. Схторян, Э. В. Чубарян, В. В. Папоян

О вращении звездных моделей в теории Ньютона

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. С. Саакяном 3/XII 1970)

Структура и интегральные параметры равновесных псевдосфероидальных звездных моделей, вращающихся с постоянной угловой скоростью ω, определяются решением системы следующих уравнений:

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right]=G, \quad (1)$$

$$F=-\varphi+C. \quad (2)$$

Здесь

$$F=\int\frac{dP}{\rho}-\beta G_c R^2(1-\mu^2),\ \ \beta=\frac{\omega^2}{2G_c}, \quad (3)$$

$$G=4\pi k\rho,\quad \mu=\cos\theta,$$

φ — гравитационный потенциал, P — давление, ρ — плотность вещества, C — потенциал в полюсе конфигурации, индексом „c" обозначены значения величин в центре распределения масс. Будут рассмотрены модели, вещество которых полностью вырождено или температура везде является функцией только плотности, т. е. предполагается, что вещество описывается однопараметрическим уравнением состояния $P=P(\rho)$.

Решения рассматриваемой системы (1)—(3) содержат два независимых параметра — ρ_c и ω. Угловая скорость ω изменяется в пределах от 0 до некоторого ω_{max}, которое можно найти из условия отсутствия истечения вещества с экватора. Следовательно, при фиксированной центральной плотности мы получим последовательность равновесных моделей с увеличивающимся моментом импульса.

Точных методов решения этой задачи не существует. Обычно, решение системы (1)—(3) ищут в виде рядов по полиномам Лежандра ([1]), или по β ([1-5]), ограничиваясь первыми несколькими членами.

В настоящей работе в рамках теории тяготения Ньютона разработан метод расчета структуры и интегральных параметров вращающихся конфигураций, который по сути является обобщением методов, изложенных в [2-5], и в котором поправки, связанные с вращением учитываются с любой степенью точности.

Решение системы уравнений (1)—(3) будем искать в виде следующих разложений:

$$F(R,\ \mu) = f_{00}(R) + \sum_{m=1}^{n} \beta^{m} \left[\sum_{l=0}^{2m} f_{ml}(R) P_l(\mu) + \sum_{l=2}^{\infty} A_{ml} \Phi_{ml}(R) P_l(\mu) \right],$$

$$G(R,\ \mu) = g_{00}(R) + \sum_{m=1}^{n} \beta^{m} \left[\sum_{l=0}^{2m} g_{ml}(R) P_l(\mu) + \sum_{l=2}^{\infty} B_{lm} \Gamma_{ml}(R) P_l(\mu) \right], \tag{4}$$

$$f_{12} = g_{12} = 0, \quad n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$$

где f_{00} и g_{00} — характеристики соответствующих невращающихся конфигураций, $P_l(\mu)$ — полином Лежандра l-го порядка, A_{ml}, B_{ml} — постоянные. В выражении (4) отсутствуют члены с нечетными l, что обусловленно симметрией распределения масс относительно экваториальной плоскости $\mu = 0$. Радиальные функции, фигурирующие в (4), являются решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений, следующей из (1) с учетом (2). Однако, как легко заметить, получить эту систему можно лишь если найдена связь между постоянными A_{ml} и B_{ml}. С этой целью будем считать G функцией от $\int \frac{dP}{\rho}$ и разложим ее в ряд Тейлора вокруг значения f_{00}. Приравнивая далее члены при одинаковых степенях β и коэффициенты при полиномах Лежандра одинакового порядка получаем:

$$g_{ml}(R) + B_{ml}\Gamma_{ml}(R) = \gamma_1 \left| f_{ml}(R) + A_{ml}\Phi_{ml}(R) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3} G_c\ R^2 \delta_{m1} (\delta_{l0} - \delta_{l2}) \right| + Q_{ml}(R). \tag{5}$$

Значение функции $Q_{ml}(R)$ определяется соотношением

$$\sum_{l=0}^{2m} Q_{ml}(R) P_l(\mu) = \frac{\gamma_2(R)}{2} \sum_{k=1}^{m-1} \left| f_{0k}(R) + \delta_{k1} G_c\ R^2 (1 - \mu^2) + \right.$$

$$+ \sum_{l=2}^{2k} [f_{kl}(R) + A_{kl}\Phi_{kl}(R)] P_l(\mu) \Big| \Big| f_{m-k,0}(R) + \delta_{m-k,1} G_c\ R^2 (1 - \mu^2) +$$

$$\left. + \sum_{l=2}^{2(m-k)} [f_{m-k,l}(R) + A_{m-k,l}\Phi_{m-k,l}(R)] P_l(\mu) \right| .$$

$$+\frac{\gamma_3(R)}{3!}\sum_{\substack{k=1\\p=1}}^{m-2}\left\{f_{k0}(R)+\delta_{k1}G_c R^2(1-\mu^2)+\sum_{l=2}^{2k}[f_{kl}(R)+A_{kl}\Phi_{kl}(R)]P_l(\mu)\right\}\cdot$$

$$\left\{f_{p0}(R)+\delta_{p1}G_c R^2(1-\mu^2)+\sum_{l=2}^{2p}[f_{pl}(R)+A_{pl}\Phi_{pl}(R)]P_l(\mu)\right\}\cdot$$

$$\left\{f_{m-k-p,\,0}(R)+\delta_{m-k-p,\,1}G_c R^2(1-\mu^2)+\sum_{l=2}^{2(m-k-p)}[f_{m-k-p,\,l}(R)+\right.$$

$$+A_{m-k-p,\,l}\Phi_{m-k-p,\,l}(R)]P_l(\mu)+\cdots+\frac{\gamma_n(R)}{n!}[G_c R^2(1-\mu^2)+$$

$$\left.+f_{10}(R)+[f_{12}(R)+A_{12}\Phi_{12}(R)]P_2(\mu)]^n\right\},$$

где

$$\gamma_k=\frac{d^k g_{00}}{d f_{00}^k},\quad k=1,\ 2,\cdots,\ n.$$

Для определения значений постоянных A_{ml} и C необходимо использовать условие непрерывности потенциала и его первой производной на поверхности звезды. Как известно, вне распределения масс потенциал имеет вид

$$\varphi^{(e)}(R,\ \mu)=\frac{k_{00}}{R}+\sum_{m=1}^{n}\beta^m\sum_{l=0}^{\infty}\frac{K_{ml}}{R^{l+1}}P_l(\mu), \tag{6}$$

K_{00}, K_{ml} — постоянные.

Будем считать, что радиус звезды в направлении μ задан соотношением

$$Q_\mu=R_0+\sum_{m=1}^{n}\beta^m\sum_{l=0}^{\infty}q_{ml}P_l(\mu), \tag{7}$$

R_0 — радиус соответствующей конфигурации в отсутствии вращения. Если теперь отделить в C вклад членов n-го порядка, т. е. записать $C=\sum\limits_{m=0}^{n}\beta^m C_m$, то условия сшивки, следующие из (2), (6) и (7), приводят к простым алгебраическим уравнениям относительно неизвестных постоянных

$$\begin{aligned}&\frac{K_{ml}}{R_0^{l+1}}-C_m\delta_{l0}+f_{ml}(R_0)+A_{ml}\Phi_{ml}(R_0)=\frac{2}{3}G_c R_0^2(\delta_{l0}-\delta_{l2})\delta_{m1},\\&\frac{K_{ml}}{R_0^{l+2}}-f'_{ml}(R_0)-A_{ml}\Phi'_{ml}(R_0)=\frac{4}{3}G_c R_0(\delta_{l2}-\delta_{l0})\delta_{m1}.\end{aligned} \tag{8}$$

Уравнения (8) получены с учетом условия $F+\beta G_c R^2(1-\mu^2)=0$ на поверхности звезды, что обусловлено обращением в нуль давления и плотности на границе распределения масс. Попутно из этого же условия можно определить q_{ml}, которые позволяют найти форму поверхности рассматриваемой конфигурации. Из (8) видно, что все постоянные, с помощью которых определяется структура и интегральные характеристики вращающихся звезд, можно найти, если известны значения радиальных функций f_{ml} и Φ_{ml} и их производных f'_{ml} и Φ'_{ml} в точке R_0. Функции $f_{ml}(R)$ и $\Phi_{ml}(R)$ являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$(\Delta_l + \gamma_1) f_{ml} + \frac{2}{3}\gamma_1 G_c R^2 \lambda_{m1}(\delta_{l0} - \delta_{l2}) + Q_{ml} = 0,$$

$$(\Delta_l + \gamma_1)\Phi_{ml} = 0, \tag{9}$$

$$\Delta_l = \frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{d}{dR}\right) - \frac{l(l+1)}{R^2},$$

которую, как было отмечено, легко получить из (1) с учетом (2).

Таким образом, гравитационный потенциал внутри и вне звезды, массу, форму поверхности, мультипольные моменты рассматриваемых конфигураций можно найти из решений системы уравнений (8), (9) с использованием соотношений (2), (4), (6), (7). В частности масса вращающейся звезды есть

$$M = -K_{00} - \sum_{m=1}^{n} \beta^n K_{m0}. \tag{10}$$

Отметим, что решение задачи в n-ом приближении возможно, лишь если получено решение в приближении $n-1$. Кроме того, подчеркнем, что при решении задачи с точностью до членов пропорциональных β^n, как следствие граничных условий удалось показать, что во всех разложениях отличный от нуля вклад дают лишь полиномы Лежандра вплоть до порядка $2n$.

Авторы благодарны Г. Г. Арутюнян за обсуждения.

Ереванский государственный университет

Ի. Մ. ՍԻՏՈՐՅԱՆ, Է. Վ. ՉՈՒԲԱՐՅԱՆ, Վ. Վ. ՊԱՊՈՅԱՆ

Պտտվող աստղային մոդելների նյուտոնյան տեսության վերաբերյալ

Առաջարկված է հավասարակշիռ պսևդոսֆերոիդալ, հաստատուն անկյունային արագությամբ պտտվող կոնֆիգուրացիաների ներքին կառուցվածքի և ինտեգրալ պարամետրերի հաշվման մեթոդ։

Ենթադրվում է, որ դիտարկվող մոդելների նյութի վիճակը նկարագրվում է միապարամետրիկ հավասարումով։ Մշակված մեթոդը թույլ է տալիս պտույտի հետ կապված ուղղումները հաշվի առնել ցանկացած ճշտությամբ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *R. A. James*, Ap. J., 140, 552 (1964). [2] *S. Chandrasekhar*, M. N., 93, 390 (1933). [3] *J. J. Monaghan, J. W. Roxburgh*, M. N., 131, 13 (1965). [4] *В. В. Папоян, Д. М. Седракян, Э. В. Чубарян*, Сообщ. Бюр. Обс. 39, 101 (1968); 40, 86 (1969). [5] *В. В. Папоян, Д. М. Седракян, Э. В. Чубарян*, ДАН Арм. ССР, т. 49, № 5 (1969).