ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LIII 1971 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 624.072 233

В. С. Саркисян, Л. О. Овсепян

Периодическая контактная задача для анизотропной полуплоскости с упругими накладками

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 22/V 1971)

Периодическая контактная задача для изотропной полуплоскости усиленной упругими накладками конечной длины и постоянной малой толщины, впервые исследовалась в работе ([1]). В ней контактные напряжения под упругими накладками представлены формулой, содержащей в явном виде те особенности, которые характеризуют напряженное состояние упругих накладок в окрестностях их концов.

Позднее решение указанной задачи методом ортогональных многочленов дано в работе* ([2]).

В настоящей работе излагается решение периодической контактной задачи для упругой анизотропной полуплоскости с упругими накладками конечной длины и постоянной малой толщины. Оно сводится к решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения с ядром Гильберта второго рода, которое позволяет определить контактные напряжения вдоль участков креплений упругих накладок с полуплоскостью. Приводится решение полученного уравнения методом ортогональных многочленов, удобное для конкретных расчетов. Одновременно показано, что учет анизотропии материала полуплоскости существенно меняет закон распределения контактных напряжений под накладками и вид их особенностей на концах накладок.

Предварительно устанавливается одно соотношение для многочленов Якоби.

§ 1. Пусть анизотропная полуплоскость усилена на конечных отрезках $[-a+2nl,\ a+2nl]$ ($l>a$, $n=0,\ 1,\ 2,\cdots$) периодически повторяющимися с периодом $2l$ упругими креплениями в виде приваренных (или приклеенных) к ней упругих накладок, имеющих постоянную достаточно малую толщину h. Требуется определить закон

* Периодическую контактную задачу для полуплоскости с упругими накладками при помощи многочленов Чебышева исследованы и Н. Х. Арутюняном и С. М. Мхитаряном, но эти результаты ими не были опубликованы.

распределения контактных напряжений вдоль отрезков креплений упругих накладок с упругой анизотропной, имеющей одну плоскость упругой симметрии, полуплоскостью, когда к одному из концов накладок приложены сосредоточенные силы P, направленные вдоль их осей. Следуя работе ([3]), предположим, что под накладками действуют только тангенциальные контактные напряжения, т. е. накладки находятся в одноосном напряженном состоянии.

Будем пользоваться следующей системой обозначений: перемещения и деформации в накладках будем отмечать индексом 1, а в полуплоскости—индексом 2. Аналогично будем поступать и для обозначения физических констант материалов накладок и полуплоскости.

Из постановки нашей задачи вытекает, что можно ограничится рассмотрением одной из накладок, так например, той, для которой $n=0$. Составив уравнения равновесия элемента этой накладки, а затем воспользовавшись законом Гука, можно записать:

$$\varepsilon_x^{(1)} = \frac{du^{(1)}}{dx} = \frac{1}{hE_1} \int_{-a}^{x} \tau^{(1)}(s)\,ds. \tag{1.1}$$

Здесь $u^{(1)}(x)$—горизонтальные перемещения точек соединения накладок с упругой полуплоскостью, т. е. точек отрезка $[-a, a]$, E_1 — модуль упругости материала накладки, $\tau^{(1)}(x)$ — тангенциальное напряжение, действующее на накладку вдоль линии соединения ее с полуплоскостью.

С другой стороны ([4, 5]), горизонтальные перемещения $u^{(2)}(x)$ граничных точек упругой анизотропной полуплоскости, вызванные распределенными по отрезку $[-a, a]$ и периодически повторяющимися с периодом $2l$ тангенциальными напряжениями интенсивностью $\tau^{(2)}(x)$, определяются формулой

$$u^{(2)}(x) = \frac{A^{(2)}}{\pi} \int_{-a}^{a} \tau^{(2)}(s) \ln \frac{1}{2\,|\sin \pi (s-x)/2l|}\,ds +$$

$$+ B^{(2)} \int_{-a}^{x} \tau^{(2)}(s)\,ds + \text{const},$$

где

$$A^{(2)} = -\frac{\beta_{11}^{(2)}}{2i} [\mu_1^{(2)} + \mu_2^{(2)} - \overline{\mu}_1^{(2)} - \overline{\mu}_2^{(2)}],$$

$$B^{(2)} = \frac{\beta_{11}^{(2)}}{2} [\mu_1^{(2)} + \mu_2^{(2)} + \overline{\mu}_1^{(2)} + \overline{\mu}_2^{(2)}] - \beta_{16}^{(2)},$$

$u^{(2)}(x)$—горизонтальные перемещения точек отрезка $[-a, a]$ границы полуплоскости, $\mu_1^{(2)}$, $\mu_2^{(2)}$ и их сопряженные $\overline{\mu}_1^{(2)}$, $\overline{\mu}_2^{(2)}$ являются корями некоторого характеристического уравнения ([4]).

Отсюда для деформации граничных точек отрезка $[-a, a]$ упругой полуплоскости будем иметь формулу:

$$\varepsilon_x^{(2)} = \frac{du^{(2)}}{dx} = \frac{A^{(2)}}{2l} \int_{-a}^{a} \tau^{(2)}(s) \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{2l} ds + B^{(2)} \tau^{(2)}(x). \quad (1.2)$$

Здесь интеграл при $x = s$ понимается в смысле главного значения по Коши.

Принимая во внимание условие $u^{(1)}(x) = u^{(2)}(x)$, или же $\varepsilon_x^{(1)} = \varepsilon_x^{(2)}$, на участке $[-a, a]$ контакта упругой накладки с анизотропной полуплоскостью, при помощи (1.1) и (1.2) получаем следующее интегро-дифференциальное уравнение для определения контактных напряжений под накладками:

$$\mu^* \psi'(x) + \int_{-a}^{a} \psi'(s) \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{2l} ds = -\lambda\psi(x). \quad (1.3)$$

при граничных условиях

$$\psi(-a) = 0, \quad \psi(a) = P. \quad (1.4)$$

Здесь

$$\tau(x) = \tau^{(1)}(x) = -\tau^{(2)}(x), \quad \psi(x) = \int_{-a}^{x} \tau(s) ds, \quad \mu^* = 2lB^{(2)}/A^{(2)},$$

$$\lambda = 2l/hE_1A^{(2)}.$$

Положив

$$\pi x/l = t \quad \pi s/l = \tau, \quad \pi a/l = \alpha, \quad \psi(lt/\pi) = \varphi(t),$$

представим интегро-дифференциальное уравнение (1.3) в виде

$$\mu\varphi'(t) + \int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{ctg} \frac{\tau - t}{2} \varphi'(\tau) d\tau = -\lambda\varphi(t), \quad (\mu = \mu^* \pi/l), \quad (1.5)$$

а граничные условия (1.4) — в виде

$$\varphi(-\alpha) = 0, \quad \varphi(\alpha) = P. \quad (1.6)$$

Таким образом решение рассматриваемой задачи сводится к решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения (1.5) при граничных условиях (1.6).

Теперь контактное напряжение будет определяться формулой:

$$\tau(x) = l^{-1} \pi\varphi_t'(t) \quad (t = \pi x/l).$$

§ 2. Выясним тип особенностей для рассматриваемой задачи. Для этого заметим, что

$$\operatorname{ctg} 1/2\,(\tau - t) = i\,(e^{i\tau} + e^{it})/(e^{i\tau} - e^{it}). \qquad (2.1)$$

Подставим (2.1) в (1.5) и перейдем от отрезка $[-\alpha, \alpha]$ вещественной оси к дуге $\overline{a}a$ единичной окружности. После некоторых преобразований получим

$$\mu\Phi(\sigma) + 2\int_{\overline{a}}^{a} \Phi(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - \sigma} = \frac{1}{\sigma}\,[iA\,\Phi(\sigma) - P], \qquad (2.2)$$

где

$$e^{it} = \sigma,\ e^{i\tau} = \zeta,\ e^{i\alpha} = a,\ \ \varphi(t) = \varphi(-i\ln\sigma) = \Phi(\sigma),\ \ \varphi_t'(t) = i\sigma\Phi'(\sigma).$$

Очевидно, что контактное напряжение определяется формулой:

$$\tau(x) = l^{-1}\pi i\sigma\Phi'(\sigma).$$

Как в работах [6,7] $\Phi'(\sigma)$ представим в виде

$$\Phi'(\sigma) = (\sigma - a)^{\beta}(\sigma - \overline{a})^{\delta}X_1(\sigma) \quad (\overline{a} < \sigma < a;\ -1 < \beta,\ \delta < 0),$$

где $X_1(\sigma)$ непрерывная функция на дуге единичной окружности, удовлетворяющая условию Гельдера.

Отправляясь от этого представления, на основе результатов [8], которые относятся к поведению интеграла типа Коши вблизи концов линии интегрирования, легко показать, что

$$\beta = \gamma - 1/2,\ \delta = -\gamma - 1/2,\ \gamma = \pi^{-1}\operatorname{arg\,tg}\frac{\mu}{2\pi},$$

Возвращаясь к переменным (t, τ) получаем

$$\varphi'(t) = \left(\sin\frac{\alpha - t}{2}\right)^{\gamma - 1/2}\left(\sin\frac{\alpha + t}{2}\right)^{-\gamma - 1/2}\chi(t),$$

где $\chi(t)$ непрерывная функция на отрезке $[-\alpha, \alpha]$ вещественной оси, удовлетворяющая условию Гельдера.

§ 3. В этом параграфе указывается способ вывода необходимого для дальнейшего соотношения

$$2\pi\operatorname{ctg}\pi\beta\, w(t)\, P_m^{(\beta,\delta)}(\operatorname{tg} 1/2\,t/\operatorname{tg} 1/2\,\alpha) +$$
$$+ \int_{-\alpha}^{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{t - \tau}{2}\, w(\tau)\, P_m^{(\beta,\delta)}(\operatorname{tg} 1/2\,\tau/\operatorname{tg} 1/2\,\alpha)\, d\tau = \qquad (3.1)$$
$$= \pi\csc 1/2\,\alpha\,\csc\pi\beta\,(\sec 1/2\,t)^2\, P_{m-1}^{(\delta+1,\beta+1)}(\operatorname{tg} 1/2\,t/\operatorname{tg} 1/2\,\alpha)\quad (m = 0,\ 1,\ 2,\cdots)$$

где

$$w(t) = \sec 1/2\, t\, |\sin 1/2\, (\alpha - t)|^{\beta} \cdot |\sin 1/2\, (\alpha + t)|^{\delta}, \quad |t| < \alpha, \quad \beta + \delta = -1,$$

$$\operatorname{Re}(\beta, \delta) > -1, \quad P_m^{(\beta, \delta)}(\operatorname{tg} 1/2\, t/\operatorname{tg} 1/2\, \alpha) \; (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

многочлены Якоби, ортогональные на отрезке $[-\alpha, \alpha]$ с весом

$$\sec 1/2\, t\, |\sin 1/2\, (\alpha - t)|^{\beta}\, |\sin 1/2\, (\alpha + t)|^{\delta}.$$

Предварительно заметим следующий элементарный факт.

Функция, отображающая единичный круг на верхнюю полуплоскость имеет вид

$$\zeta = i(1 - w)/(1 + w).$$

Подставив $w = e^{it}$, будем иметь $\zeta = \operatorname{tg} 1/2\, t$. Отсюда следует, что дуга $\overline{\overline{a}a}$ единичной окружности при указанном отображении переходит в отрезок $[-\operatorname{tg} 1/2\, \alpha, \operatorname{tg} 1/2\, \alpha]$ вещественной оси.

С другой стороны, как было показано в предыдущем параграфе, интегро-дифференциальное уравнение (1.5) с ядром Гильберта можно свести к интегро-дифференциальному уравнению (2.2) с ядром Коши на дуге $\overline{\overline{a}a}$ единичной окружности. Отсюда, принимая во внимание сказанное выше, следует, что заменой переменных $x \to \operatorname{tg} 1/2\, t/\operatorname{tg} 1/2\, \alpha$ $s \to \operatorname{tg} 1/2\, \tau/\operatorname{tg} 1/2\, \alpha$ от ядра Коши можно перейти к ядру Гильберта.

Это преобразование переменных неоднократно использовалось ([7]) при исследовании спектральных свойств некоторых интегральных операторов, порожденных ядром Гильберта и родственным им ядрами.

Учитывая это обстоятельство, запишем установленное ([7]) соотношение

$$\pi \operatorname{tg} \pi\gamma\, w(x)\, P_m^{(\beta, \delta)}(x) + \int_{-1}^{1} \frac{w(s)\, P_m^{(\beta, \delta)}}{s - x}\, ds = \pi\, (2 \cos \pi\gamma)^{-1}\, P_{m-1}^{(\delta+1, \beta+1)}(x). \tag{3.2}$$

где

$$w(x) = (1 - x)^{\beta} (1 + x)^{\delta}.$$

Заменяя в (3.2) $x \to \operatorname{tg} 1/2\, t/\operatorname{tg} 1/2\, \alpha$, $s \to \operatorname{tg} 1/2\, \tau/\operatorname{tg} 1/2\, \alpha$ после элементарных выкладок получаем (3.1).

§ 4. Обращаясь к решению интегро-дифференциального уравнения (1.5) представим неизвестную функцию $\varphi'(t)$ в виде

$$\varphi'(t) = |\sin 1/2\, (\alpha - t)|^{\beta} [\sin 1/2\, (\alpha + t)|^{\delta} \cdot \chi(t),$$

где

$$\chi(t) = \sec 1/2\, t \sum_{m=0}^{\infty} X_m P_m^{(\beta, \delta)}(\operatorname{tg} 1/2\, t/\operatorname{tg} 1/2\, \alpha). \tag{4.1}$$

Тогда контактное напряжение $\tau(x)$ будет даваться формулой:

$$\tau(x) = \frac{\pi}{l} \sec 1/2t \, [\sin 1/2 (\alpha - t)]^{\beta} [\sin 1/2 (\alpha + t)]^{\delta} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} X_m P_m^{(\beta, \delta)} (\operatorname{tg} 1/2\, t / \operatorname{tg} 1/2\, \alpha).$$

Подставляя (4.1) в интегро-дифференциальное уравнение (1.5) и принимая во внимание (3.1), после несложных выкладок для определения неизвестных коэффициентов X_m $(m = 1, 2, 3, \cdots)$, имеем следующую бесконечную систему линейных уравнений

$$X_{k+1} = \sum_{m=1}^{\infty} K_{mk} X_m + b_k X_0 \quad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{4.2}$$

где

$$K_{mk} = \frac{\lambda}{2\pi} (\csc 1/2\,\alpha)^2 \sin \pi\beta \frac{[(k+1)!]^2}{\Gamma(k+2+\beta)\,\Gamma(k+2+\delta)} \times$$

$$\times \frac{1}{m} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sec^2 \frac{t}{2} \sin \frac{\alpha - t}{2} \sin \frac{\alpha + t}{2} P_k^{(\delta+1, \beta+1)} \times$$

$$\times \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} / \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) P_{m-1}^{(\beta+1, \alpha+1)} \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} / \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) dt, \tag{4.3}$$

$$b_k = -\frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \sin \pi\beta \frac{[(k+1)!]^2}{\Gamma(k+2+\beta)\,\Gamma(k+2+\delta)} \times$$

$$\times \int_{-\alpha}^{\alpha} \sec \frac{t}{2} \left(\sin \frac{\alpha - t}{2} \right)^{\beta+1} \left(\sin \frac{\alpha + t}{2} \right)^{\delta+1} P_k^{(\delta+1, \beta+1)} \times$$

$$\times \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} / \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \left| \int_{-\alpha}^{\alpha} w(\tau)\, d\tau \right| dt.$$

Отметим, что при выводе этих уравнений было использовано известное соотношение ([10])

$$\int_{-1}^{x} (1-s)^{\alpha} (1+s)^{\beta} P_m^{(\alpha, \beta)}(s)\, ds = -\frac{1}{2m} (1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1} P_{m-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x).$$

Коэффициент X_0 непосредственно определяется при помощи граничных условий и дается формулой:

$$X_0 = \frac{P}{2\pi} \cos 1/2\,\alpha \cos \pi\gamma.$$

§ 5. Перейдем к исследованию бесконечных систем линейных уравнений (4.2). Для ее исследования оценим суммы

$$S_k = \sum_{m=1}^{\infty} |K_{mk}| \quad (k = 0,\ 1,\ 2, \cdots)$$

Имеем:

$$S_k = \frac{\lambda \cos \pi\gamma}{2\pi} \left(\csc \frac{\alpha}{2}\right)^2 \frac{[(k+1)!]^2}{\Gamma(k+2+\beta)\,\Gamma(k+2+\delta)} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left| \int_{-\alpha}^{\alpha} \sec^2 \frac{t}{2} \sin \frac{\alpha - t}{2} \sin \frac{\alpha + t}{2} P_k^{(\delta+1,\beta+1)} \times \right. \tag{5.1}$$

$$\left. \times \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} / \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right) P_{m-1}^{(\beta+1,\delta+1)} \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} / \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right) dt \right|.$$

Для оценки сумму S_k пользуемся известным асимптотическим представлением Дарбу для многочленов Якоби ([11]):

$$\left.\begin{aligned} &P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) = n^{-1/2} K(\theta) \cos(N\theta + \delta) + O(n^{-3/2}),\\ &K(\theta) = \pi^{-1/2} (\sin 1/2\,\theta)^{-\alpha-1/2} (\cos 1/2\,\theta)^{-\beta-1/2},\\ &N = n + 2^{-1}(\alpha+\beta+1),\ \delta = -(2\pi)^{-1}(\alpha + 1/2),\ 0 < \theta < \pi,\ n \to \infty. \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

Отсюда вытекает, что общий член ряда (5.1) при $m \to \infty$ стремится к нулю как $m^{-5/2}$ и, следовательно ряд сходится. С другой стороны очевидно, что

$$S_k = O(k^{-3/2}) \text{ при } k \to \infty. \tag{5.3}$$

Последняя оценка (5.3) позволяет утверждать, что бесконечная система (4.2) при любом $\lambda\,(0 \leqslant \lambda < \infty)$ квазивполне регулярна.

Из (4.3), вследствие (5.2) для свободного члена $b_k(k=0,\ 1,\ 2, \cdots)$ будем иметь

$$b_k = O(k^{-3/2}),$$

т. е. свободные члены бесконечной системы (4.2) при $k \to \infty$ стремятся к нулю.

Таким образом, бесконечная система линейных уравнений (4.2) квазивполне регулярна ([12]), а ее свободные члены довольно быстро стремятся к нулю. Это обстоятельство дает возможность посредством урезания бесконечной системы для коэффициентов X_m получить численные значения с необходимой точностью.

Неизлишне отметить, что бесконечная система (4.2) на самом деле вполне регулярна при определенных значениях параметра λ, а при других его значениях квазивполне регулярна. Доказательство этого факта основывается на установление некоторых неравенств для многочленов Якоби и здесь не приводятся. Не приводятся здесь также численные результаты.

Ереванский государственный университет

Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Լ. Հ. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ

Առաձգական վերադիրներով անիզոտրոպ կիսահարթության պարբերական կոնտակտային խնդիր

Հոդվածում դիտարկված է վերջավոր երկարությամբ և փոքր հաստությամբ առաձգական վերադիրներով անիզոտրոպ կիսահարթության պարբերական կոնտակտային խնդիրը։

Խնդրի լուծումը բերվում է Հիլբերտի կորիզով երկրորդ սեռի սինգուլյար ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանը, որը թույլատրում է որոշել կոնտակտային լարումները վերադիրների և կիսահարթության միացման միջակայքերի երկարությամբ։ Ստացված հավասարումը լուծված է օրթոգոնալ բազմանդամների եղանակով։

Միաժամանակ ցույց է տրվում, որ կիսահարթության նյութի անիզոտրոպիայի հաշվառումն էապես փոխում է կոնտակտային լարումների բաշխվածությունը առաձգական վերադիրների տակ և նրանց եզակիությունը վերադիրների ծայրակետերում։

Յակոբիի բազմանդամների համար Նախօրոք ստացված առնչության օգնությամբ սինգուլյար ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումը բերված է գծային հավասարումների անվերջ սիստեմի։ Ցույց է տրված ստացված անվերջ սիստեմի կվազիլիովին ռեգուլյարությունը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян*, ПММ, т. 33, вып. 5 (1969). [2] *Г. А. Морарь, Г. Я. Попов*, ПММ, т. 35, вып. 1 (1971). [3] *Н. Х. Арутюнян*, ПММ, т. 32, вып. 4 (1968). [4] *Л. А. Галин*, Контактные задачи теории упругости, Гостехиздат, 1953. [5] *И. Я. Штаерман*, Контактные задачи теории упругости, М.—Л., 1949. [6] *Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян*, Некоторые контактные задачи для полуплоскости с упругими накладками. Последние достижения в области упругости и термоупругости, Варшава, 1971. [7] *В. С. Саркисян, Л. О. Овсепян*, ДАН Арм. ССР, т. LII, № 5 (1971). [8] *Н. И. Мусхелишвили*, Сингулярные интегральные уравнения. Изд. 3, «Наука», М., 1968. [9] *С. М. Мхитарян*, Математ. исследования, т. 4, вып. 1, 1969. [10] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962. [11] *Г. Сеге*, Ортогональные многочлены, Физматгиз, М., 1962. [12] *Л. В. Канторович, В. И. Крылов*, Приближенные методы высшего анализа, Изд. 5, Физматгиз, М.—Л., 1962.