ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LIII 1971 1

УДК 531.312.62

ФИЗИКА

Т. К. Мелик-Бархударов

# Кинетическое уравнение для сверхпроводящих сплавов, находящихся в слабых статических полях

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 10/II 1971)

В настоящее время кинетические процессы в сверхпроводящих сплавах изучаются главным образом с помощью техники функций Грина [1]. Этот метод обладает недостатком, связанным с усложненностью его математического аппарата. Последняя проявляется в особенности при рассмотрении задач, отличающихся друг от друга конкретным видом потенциала возмущения или граничными условиями. Для каждой такой задачи необходимо выполнить нетривиальную процедуру усреднения по положениям примесей, производя таким образом в некотором смысле одну и ту же операцию.

В нормальном сплаве упомянутая трудность может быть преодолена использованием кинетического уравнения для функции распределения. Интересно поэтому выяснить вопрос о его существовании для сверхпроводящего сплава. Имеющиеся способы вывода его не связаны с техникой [1] и не могут считаться удовлетворительными, так как последняя пока является единственно последовательным методом изучения кинетики сверхпроводящих сплавов. Ниже интересующий вопрос рассматривается для простого случая сверхпроводящего сплава, находящегося в слабом статическом поле.

Статистический оператор $\tilde{\rho}$, значение которого позволяет решить кинетическую задачу, удовлетворяет уравнению

$$[\tilde{H}, \tilde{\rho}]_- = 0$$

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} \dfrac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + e\varphi + \sum\limits_a u(\vec{x} - \vec{x}_a) - \mu, & -\Delta(\vec{x}) \\ -\Delta^*(\vec{x}), & -\dfrac{(\vec{p} + e\vec{A})^2}{2m} - e\varphi - \sum\limits_a u(\vec{x} - \vec{x}_a) + \mu \end{bmatrix} \quad (1)$$

Здесь $u(\vec{x}-\vec{x}_a)$ — потенциал примесного центра, находящегося в точке $\vec{x}_a$, $\mu$ — химический потенциал $\Delta(\vec{x}) = |\lambda| \langle \vec{x} | \tilde{\rho}^c | \vec{x} \rangle$, $(\vec{A}, \varphi)$ — внешнее поле. Записывая $\tilde{\rho}$ в виде $\tilde{\rho} = \rho + f$, где $\rho$ — статистический оператор сверхпроводящего сплава в отсутствии поля

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \Delta\theta\sigma_x - \xi\theta\sigma_z), \tag{2}$$

$$\theta = \frac{\operatorname{th}\dfrac{\sqrt{\xi^2+\Delta^2}}{2T}}{\sqrt{\xi^2+\Delta^2}},$$

$\xi = \dfrac{p^2}{2m} - \mu + \sum\limits_a u(\vec{x}-\vec{x}_a)$ — гамильтониан электрона в поле примесей, $\sigma_x$, $\sigma_z$ — матрицы Паули, получим в первом приближении по внешнему полю для матричных элементов $f$ по собственным состояниям оператора $\xi$ следующие выражения:

$$f = f^{(1)} + i\sigma_y f^{(2)};$$

$$f^{(1)}_{nm} = \frac{e}{2m}\left\{\frac{\xi_n\theta_n - \xi_m\theta_m}{\xi_n - \xi_m} + \frac{2\Delta^2(\theta_n - \theta_m)}{\xi_n^2 - \xi_m^2}\right\}\frac{(\vec{A}\vec{p} + \vec{p}\vec{A})_{nm}}{2} -$$

$$- \frac{e}{2}\,\frac{\xi_n\theta_n - \xi_m\theta_m}{\xi_n - \xi_m}\,\varphi_{nm};$$

$$\tag{3}$$

$$f^{(2)}_{nm} = -\frac{e\Delta}{2m}\left\{\frac{\theta_n - \theta_m}{\xi_n + \xi_m}\right\}\frac{(\vec{A}\vec{p} + \vec{p}\vec{A})_{nm}}{2} +$$

$$+ \left\{\frac{e\Delta(\xi_n\theta_n - \xi_m\theta_m)}{\xi_n^2 - \xi_m^2} - \frac{e\Delta(\theta_n + \theta_m)}{2(\xi_n + \xi_m)}\right\}\varphi_{nm}.$$

Представляя $\theta$ в виде суммы по дискретным частотам $\omega_l = 2\pi\left(l + \frac{1}{2}\right)T$

$$\theta = 2T\sum_l \frac{1}{\omega_l^2 + \xi^2 + \Delta^2}$$

можно переписать соотношения (3) в операторной форме:

$$f = T\sum_{\omega_l} f(\omega_l);$$

$$f^{(1)} = \int d\omega_1 \int d\omega_2 \times$$

$$\times \frac{(\omega_l^2 - \Delta^2 - \omega_1\omega_2)\,\delta(\omega_1 - \xi)\,\frac{e}{2m}(\vec{A}\vec{p} + \vec{p}\vec{A})\,\delta(\omega_2 - \xi) -}{(\omega_l^2 + \omega_1^2 + \Delta^2)} \times$$

$$\times \frac{-(\omega_l^2 + \Delta^2 - \omega_1\omega_2)\,\delta(\omega_1 - \xi)\,e\varphi\,\delta(\omega_2 - \xi)}{(\omega_l^2 + \omega_2^2 + \Delta^2)};$$

$$f^{(2)} = \Delta \int d\omega_1 \int d\omega_2 \times \tag{4}$$

$$\times \frac{(\omega_1 - \omega_2)\,\delta(\omega_1 - \xi)\,\frac{e}{2m}(\vec{A}\vec{p} + \vec{p}\vec{A})\,\delta(\omega_2 - \xi) -}{(\omega_l^2 + \omega_1^2 + \Delta^2)} \times$$

$$\times \frac{-(\omega_1 - \omega_2)\,\delta(\omega_1 - \xi)\,e\varphi\,\delta(\omega_2 - \xi)}{(\omega_l^2 + \omega_2^2 + \Delta^2)}.$$

В дальнейшем будем интересоваться величиной $f$ за вычетом соответствующего выражения для нормального сплава, сохранив то же обозначение. Матричные элементы $f$ по состояниям свободных электронов и усредненные по положениям примесей и представляют интересующие нас функции распределения. Поскольку $f$ заметно отлична от нуля в узкой области энергий вблизи поверхности Ферми порядка критической температуры, то для вычисления конкретных величин достаточно знать проинтегрированную по энергии величину

$$f_{\vec{n}, \vec{k}} = \frac{1}{2\pi} \int \langle \vec{p}^{+} | f | \vec{p}^{-} \rangle \, d\xi_{\vec{p}},$$

$$\vec{p}^{+} = \vec{p} + \frac{\vec{k}}{2}, \quad \vec{p}^{-} = \vec{p} - \frac{\vec{k}}{2}.$$

Как будет видно ниже, среднее по положениям примесей от операторов, входящих в правую часть выражения (4), зависит только от разности частот $\omega^{-} = \omega_1 - \omega_2$, в связи с чем соотношения (4) можно упростить, выполнив одно интегрирование, в результате чего имеем:

$$f^{(1)}_{\vec{n}, \vec{k}}(\omega_l) = -\frac{2\Delta^2}{\varepsilon_l} \int \frac{d\omega^{-}\, \Pi_{\vec{n}, \vec{k}}(\omega^{-})}{2\pi(\omega^{-2} + (2\varepsilon_l)^2)}; \tag{5}$$

$$f^{(2)}_{\vec{n}, \vec{k}}(\omega_l) = \frac{\Delta}{\varepsilon_l} \int \frac{d\omega^{-}\, \omega^{-}\, \Pi_{\vec{n}, \vec{k}}(\omega^{-})}{2\pi(\omega^{-2} + (2\varepsilon_l)^2)};$$

$$\Pi_{\vec{n},\vec{k}} = 2\pi \int d\xi_p \langle \vec{p} \left| \delta(\omega_1 - \xi) \frac{e}{2m} (\vec{A}\vec{p} + \vec{p}\vec{A}) \delta(\omega_2 - \xi) \right| \vec{p}^- \rangle ; \qquad (6)$$

$$\varepsilon_l = \sqrt{\omega_l^2 + \Delta^2}.$$

Чтобы воспользоваться методикой ([1]), представим входящие в ([6]) дельта функции через разность запаздывающей, и опережающей функций Грина.

$$\delta(\omega - \xi) = \frac{i}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\omega - \xi + i\delta} - \frac{1}{\omega - \xi - i\delta} \right\}.$$

Тогда (6) выразится через функции $\Pi^R$ и $\Pi^A$; одна из которых аналитична в верхней полуплоскости комплексного переменного $\omega^-$, а другая в нижней полуплоскости. Последние представляются через

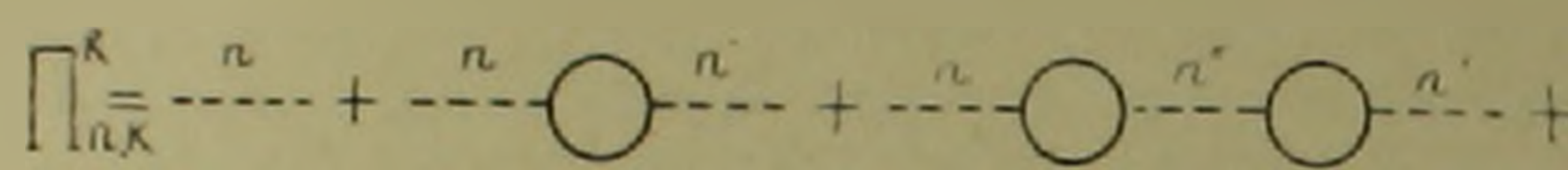

Рис. 1. Графическое уравнение для $\Pi^R_{n,k}$. Пунктиру соответствует фактор $ievA_n\left(\omega - vk - \frac{i}{\tau}\right)^{-1}$, кружку $\frac{np_0m}{(2\pi)^2}|u(n-n')|^2$

совокупность графиков, изображенных на рис. 1, которые сворачиваются в интегральные уравнения

$$\Pi_{\vec{n},\vec{k}} = \Pi^R_{\vec{n},\vec{k}} + \Pi^A_{\vec{n},\vec{k}} ;$$

$$-i(\omega - \vec{v}\vec{k})\, \Pi^R_{\vec{n},\vec{k}} = ev\vec{A}_{\vec{n}} + \frac{np_0m}{(2\pi)^2} \int |u(\vec{n} - \vec{n}')|^2 (\Pi^R_{\vec{n}',\vec{k}} - \Pi^R_{\vec{n},\vec{k}})\, d\vec{n}' ;$$

$$i(\omega - \vec{v}\vec{k})\, \Pi^A_{\vec{n},\vec{k}} = ev\vec{A}_{\vec{n}} + \frac{np_0m}{(2\pi)^2} \int |u(\vec{n} - \vec{n}')|^2 (\Pi^A_{\vec{n}',\vec{k}} - \Pi^A_{\vec{n},\vec{k}})\, d\vec{n}', \qquad (7)$$

$n$ — концентрация примесей, $v$ — скорость на поверхности Ферми. Воспользовавшись аналитическими свойствами $\Pi^R$ и $\Pi^A$ можно выполнить в (5) интегрирование по $\omega^-$ в результате чего будем иметь:

$$f^{(1)}_{\vec{n},\vec{k}} = -\frac{\Delta^2}{2\varepsilon_l} [\Pi^R_{\vec{n},\vec{k}}(2i\varepsilon_l) + \Pi^A_{\vec{n},\vec{k}}(-2i\varepsilon_l)];$$

$$f^{(2)}_{\vec{n},\vec{k}} = \frac{i\Delta}{2\varepsilon_l} [\Pi^R_{\vec{n},\vec{k}}(2i\varepsilon_l) + \Pi^A_{\vec{n},\vec{k}}(-2i\varepsilon_l)]. \qquad (8)$$

Наконец, используя (7) и (8) получаем окончательные уравнения для $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$.

$$2\varepsilon_l f^{(1)}_{\vec{n},\vec{k}} - \frac{v\vec{n}\vec{k}}{\varepsilon_l}\Delta f^{(2)}_{\vec{n},\vec{k}} = -\frac{ev\Delta^2}{\varepsilon_l^2}\vec{A}\vec{n} + \frac{np_0m}{(2\pi^2)}\int |u(\vec{n}-\vec{n}')|^2 [f^{(1)}_{\vec{n}',\vec{k}} - f^{(1)}_{\vec{n},\vec{k}}]\, d\vec{n}',$$

$$2\varepsilon_l f^{(2)}_{\vec{n},\vec{k}} + \frac{v\vec{n}\vec{k}\varepsilon_l}{\Delta} f^{(1)}_{\vec{n},\vec{k}} = \frac{np_0m}{(2\pi)^2}\int |u(\vec{n}-\vec{n}')|^2 [f^{(2)}_{\vec{n}',\vec{k}} - f^{(2)}_{\vec{n},\vec{k}}]\, d\vec{n}'.$$

Институт физических исследований
Академии наук Армянской ССР

Բ. Ն. ՄԵԼԻՔ-ԲԱՐԽՈՒԴԱՐՈՎ

## Կինետիկ հավասարում թույլ ստատիկ դաշտերում գտնվող գերհաղորդիչ համաձուլվածքների համար

*Ներկայում գերհաղորդիչ համաձուլվածքներում կինետիկական պրոցեսները ուսումնասիրվում են Գրինի ֆունկցիայի մեթոդի օգնությամբ։ Վերջինս իր ֆիզիկական հիմնավորվածության և մանրամասն մշակված լինելու պատճառով այժմ հանդիսանում է միակ հետևողական մեթոդը համաձուլվածքների կինետիկան ուսումնասիրելիս։ Սակայն մաթեմատիկական ապարատի բարդությունը հնարավորություն չի տալիս վերոհիշյալ մեթոդը օգտագործել լայն տիրույթի խնդիրների համար։ Յուրաքանչյուր խնդիր լուծելիս անհրաժեշտ է լինում ըստ խառնուրդների դիրքերի կատարել ոչ ակնհայտ միջանցում։ Այդ թերություններից զերծ է բաշխման ֆունկցիայի համար կինետիկ հավասարումը։*

*Ներկայացված աշխատանքում դիտարկված է գերհաղորդիչ համաձուլվածքների համար կինետիկ հավասարման գոյության հարցը։ Ցույց է տրված, որ թույլ ստատիկ դաշտերի դեպքում նշված մեթոդով կարելի է ստանալ երկու բաշխման ֆունկցիաների համար կինետիկ հավասարումների սիստեմ։*

### ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков*, ЖЭТФ, 35, 1158 (1958)