ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LIII 1971 1

УДК 533.6

МЕХАНИКА

А. Г. Багдоев

Определение нелинейных уравнений движения среды вблизи каустики

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 11/II 1971)

Рассматривается задача определения упрощенных нелинейных уравнений движения сжимаемой среды вблизи фронта слабой ударной волны.

Пусть движение среды описывается системой нелинейных уравнений гиперболического типа

$$A_{ij}^{(k)}(U,\ x)\,\frac{\partial U_j}{\partial x_k}+\Phi_i(U,\ x)=0, \tag{1}$$

где $x=\{x_k\}$ есть радиус-вектор точки в $(n+1)$-мерном пространстве, причем x_0 подразумевается время t, под x_i понимаются пространственные координаты $(i=1,\cdots,n)$, $U=\{U_i\}$ есть m-мерный вектор, координаты которого дают искомые параметры движения, $\Phi=\{\Phi_i\}$ — m-мерный вектор, $A_{ij}^{(k)}$ — элементы матриц, $i,j=1,\cdots,m$.

Пусть невозмущенное движение среды впереди волны задается вектором $V=\{V_i\}$, причем $V_i(x_i)$ есть заданная функция координат.

Тогда, поскольку возмущения, вносимые волной, малы, можно полагать за волной

$$U=V+u, \tag{2}$$

где $|u|\ll|V|$, $|u|\sim\varepsilon$, $\varepsilon\ll1$, причем ε задает интенсивность ударной волны. Кроме того, предполагается, что параметры возмущенного движения u_i быстро меняются в малой окрестности волны, поэтому $|\operatorname{grad}u_i|\gg|u_i|$. Подставляя (2) в (1) и учитывая, что V также удовлетворяет (1), можно, оставляя в нелинейных частях (1) лишь слагаемые, содержащие производные u_i, получить систему уравнений для u_i:

$$a_{ij}^{(k)}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+t_{il}u_l=-\frac{\partial A_{ij}^{(k)}}{\partial V_l}\,u_l\,\frac{\partial u_j}{\partial x_k}, \tag{3}$$

где

$$a_{ij}^{(k)}=A_{ij}^{(k)}(V,\ x),\qquad t_{il}=\frac{\partial A_{ij}^{(k)}}{\partial V_l}\,\frac{\partial V_j}{\partial x_k}+\frac{\partial\Phi_i}{\partial V_k}\,\delta_{lk},\qquad \delta_{lk}=\begin{cases}1 & l=k\\ 0 & l\neq k\end{cases}.$$

Левая часть уравнений (3) представляет линейный оператор $L(u)$, уравнение характеристических поверхностей $F(x_i, t) = 0$, для которого представляет уравнение линейных характеристик для системы уравнений (1), и имеет вид ([1])

$$\Delta(\xi_i, x) = \det |a_{ij}^{(k)} \xi_k| = 0, \tag{4}$$

где $\xi_i = \dfrac{\partial F}{\partial x_i}$ есть компоненты вектора нормали $\bar{k}$ к поверхности волны $F = 0$, $\xi_0 = \dfrac{\partial F}{\partial t}$.

Уравнение бихарактеристик для $L(u)$ или лучей имеет вид ([1])

$$\frac{dx}{ds} = \operatorname{grad}_{\xi} \Delta, \quad \frac{dx_i}{ds} = \Delta_{\xi_i}, \qquad \frac{dt}{ds} = \Delta_{\xi_0}, \tag{5}$$

где $\Delta_{\xi_i} = \dfrac{\partial \Delta}{\partial \xi_i}$, s — длина дуги луча. Поскольку Δ есть однородная функция ξ_i степени m, можно принять

$$\Delta(\xi_i) = (-\xi_0)^m \Delta(\alpha_i, -1), \qquad \alpha_i = \frac{\xi_i}{-\xi_0} \tag{6}$$

и, полагая $\xi_0 = -1$, можно найти

$$\Delta_{\xi_i} = \Delta_{\alpha_i}, \qquad \Delta_{\xi_0} = \alpha_i \Delta_{\alpha_i}, \qquad \alpha_i = \xi_i. \tag{7}$$

Тогда (5) запишется в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\Delta_{\xi_i}}{\xi_i \Delta_{\xi_i}}, \qquad \frac{dt}{ds} = \xi_i \Delta_{\xi_i}. \tag{8}$$

Пусть лучи (8) уравнения $L(u) = 0$ имеют огибающую поверхность, называемую каустикой, на которой лучевое решение имеет особенность ([1,2]). Для волнового уравнения решение вблизи каустики найдено в ([2–5]), для произвольной системы линейных уравнений $L(u) = 0$ в гармонической по времени задаче решение найдено в ([6]), упрощенные нелинейные уравнения вблизи каустики получены в ([4, 7–10]) для сжимаемой неэлектропроводящей жидкости, а для однородной электропроводящей жидкости в магнитном поле в ([11]). Здесь ставится задача получения упрощенных уравнений вблизи линии пересечения волны с каустикой для общих уравнений (1) или (3).

В момент t фронт волны пересекается с каустикой по некоторой линии. Выбирая некоторый луч (8) и обозначая через $x^*(t) = \{X_i\}$ координаты точки A касания луча с каустической поверхностью, можно записать для точки A по (8)

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\Delta_{\alpha_i}}{\alpha_j \Delta_{\alpha_j}}, \tag{9}$$

где через α_i обозначены значения ξ_i в A. Из линейного решения видно ([8, 11]), что в основном порядке по ε решение задачи зависит от двух переменных

$$\bar{x}_1 = (x - x^\circ)\bar{k}, \qquad y_1 = (x - x^\circ)\bar{N}. \tag{10}$$

Здесь $\bar{k} = \{\alpha_i\}$ есть нормаль к волне в точке A (рис. 1), $\bar{N}$ — единичный вектор нормали к каустике в A, причем $\bar{x}_1 = 0$ дает касательную к волне в A, $y_1 = 0$ — касательную к каустике. Поскольку y_1 характеризует расстояние точки $\{x_i\}$ от каустики, а $\bar{x}_1$ время пробега волны вдоль луча до $\{x_i\}$, можно в основном порядке рассматривать движение в плоскости векторов $\bar{N}$ и grad Δ, то есть нормали к каустике и луча, которая условно изображена на фиг. 1 как плоскость X, Y.

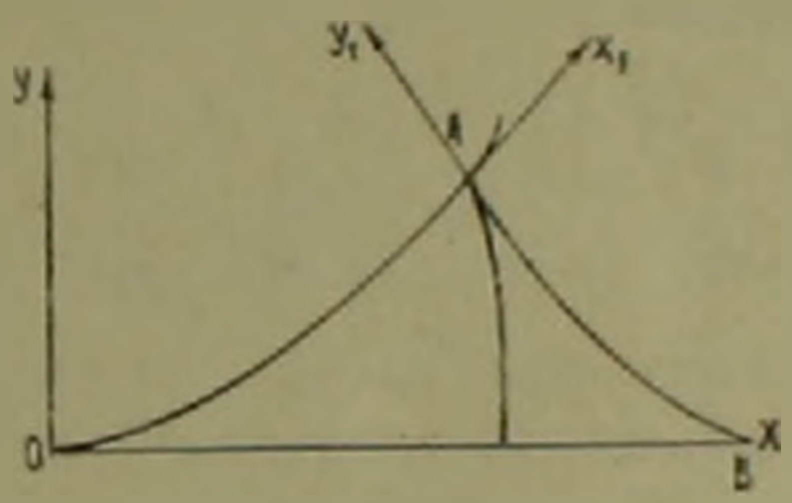

Рис. 1.

Из линейного решения известны порядки малости

$$\bar{x}_1 \sim y_1^{\frac{3}{2}} . \tag{11}$$

С учетом указанных соображений из (10) получится

$$x - x^\circ = y_1\bar{N} - y_1 \frac{\alpha_i N_i}{\alpha_i \Delta_{\alpha_i}} \operatorname{grad}_\xi \Delta, \tag{12}$$

где отброшено слагаемое $\dfrac{\bar{k}}{|k|^2}\bar{x}_1$ в силу (11).

Учитывая, что в силу (11)

$$\frac{\partial u_i}{\partial \bar{x}_1} \gg \frac{\partial u_i}{\partial y_1} \gg u_i \tag{13}$$

выражая в правой части (3) все производные через $\dfrac{\partial}{\partial \bar{x}_1}$ и заменяя в ней все u_i через $u_1 = P$ с помощью условий совместности на волне [12] $a_{ij}^{(\alpha)} u_j \xi_k = 0$, можно нелинейное слагаемое в (3) представить в виде

$$k_l u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{x}_1} = \bar{k} P \frac{\partial P}{\partial \tilde{x}_1}, \tag{14}$$

где $\bar{k} = \{k_l\}$ — известный вектор.

Следуя методу, примененному в [11] при получении уравнений вблизи каустики в магнитной газодинамике, можно разрешить (3) относительно $u_1 = P$ и получить уравнение

$$\Delta(p_l) P = A_{1l}(p_l)(k_l P \frac{\partial P}{\partial \tilde{x}_1} - t_{jl} u_l), \tag{15}$$

где $\Delta(p_l)$ есть характеристический определитель (4), A_{1l} — алгебраические дополнения в Δ элементов, содержащих u_1. Здесь обозначено $p_l = \frac{\partial}{\partial x_l}$, $p_t = \frac{\partial}{\partial t}$, причем по (10)

$$p_l = \alpha_l \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} + N_l \frac{\partial}{\partial y_1}, \qquad p_t = \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} + \frac{\partial y_1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y_1}. \tag{16}$$

Согласно (10)

$$\frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial t} = -1 + (x - x^0) \frac{\partial \bar{k}}{dt}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial t} = (x - x^0) \frac{\partial \bar{N}}{\partial t} \tag{17}$$

и второе слагаемое в p_t можно отбросить.

Для оператора Δ можно записать ряд по степеням операторов

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \ll \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1}, \qquad \left(1 + \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} \ll \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1}. \tag{18}$$

Оставляя слагаемые лишь основного порядка, содержащие старшие производные, в которых действие операторов на коэффициенты в Δ при p_l, p_t не учитывается, можно найти

$$\Delta(p_l, p_t, x) = \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1}\right)^{m-1} (\alpha_l \Delta_{\alpha_l})(x - x^0) \frac{\partial \bar{k}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} +$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1}\right)^{m} \frac{\partial \Delta}{\partial y_1} y_1 + \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1}\right)^{m-2} \frac{\Delta_{\alpha_i \alpha_j} N_i N_j}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^2. \tag{19}$$

Здесь учтены условия в точке A

$$\Delta(\alpha_l, -1, x^0) = 0, \qquad \Delta_{\alpha_l} N_l = 0 \tag{20}$$

и однородность Δ по ξ_i, $\Delta\left(-\frac{\partial}{\partial x_1},\ \alpha_i\frac{\partial}{\partial x_1}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^m\Delta(-1,\ \alpha_i)$.

Тогда, учитывая еще, что A_{ij} есть однородная функция ξ_i степени $m-1$, можно найти из (15)

$$\lambda y_1\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2}+\frac{\Delta_{\alpha_i\alpha_j}N_iN_j}{2}\,\frac{\partial^2 P}{\partial y_1^2}=\frac{\partial}{\partial x_1}A_{ij}(\alpha_i)\left(k_jP\frac{\partial P}{\partial x_1}-t_{ji}u_i\right)\cdot \qquad (21)$$

где обозначено

$$\lambda y_1=\frac{\partial\Delta}{\partial y_1}y_1+(\alpha_i\Delta_{\alpha_i})(x-x^\circ)\frac{\partial\bar{k}}{\partial t}, \qquad (22)$$

причем $x-x^\circ$ выражается через y_1 по (12). Слагаемое $\frac{\partial}{\partial x_1}(t_{ji}u_i)$ в (21) значительно меньше его левой части, в силу (11), (18), и его можно отбросить. Для скачкообразной (вдали от каустики) волны AB имеют место порядки ([4, 7, 11]) $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=P\sim\gamma^{\frac{4}{5}}\sim y_1$, $x_1\sim\gamma^{\frac{6}{5}}$, $\varepsilon=\gamma^{\frac{4}{5}}$, где γ есть интенсивность AB вдали от A, и левая часть в (21), а также нелинейное слагаемое в правой части имеют порядок $\gamma^{\frac{1}{5}}$.

Во всех задачах, в которых существенна нелинейность, вводя переменную ([8])

$$\rho=-y_1\left(\frac{2\lambda}{N_iN_j\Delta_{\alpha_i\alpha_j}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

можно из (21) получить уравнение $u_1=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}-\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}=\frac{2^{\frac{1}{3}}}{(N_iN_j\Delta_{\alpha_i\alpha_j})^{\frac{1}{3}}\lambda^{\frac{2}{3}}}A_{ij}(\alpha_i)k_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}. \qquad (24)$$

Левая часть (24) должна удовлетворяться линейным решением ([6]), откуда, сопоставляя со значением ρ в ([6])

$$\rho=y_1\cdot\left(\frac{2\ddot{y}_1}{\Delta^2_{F_{y_1}F_{y_1}}}\right)^{\frac{1}{3}},\qquad F_{y_1}=\frac{\partial F}{\partial y_1}, \qquad (25)$$

где вдоль лучей (8) $\ddot{y}_1=\frac{d^2y_1}{ds^2}$, $\Delta_{F_{y_1}F_{y_1}}=\frac{\partial^2\Delta}{\partial F^2_{y_1}}$, можно найти соотношение

$$-\frac{\lambda}{N_i N_j \Delta_{\alpha_i \alpha_j}} = \frac{\dfrac{d^2 y_1}{ds^2}}{\left(\dfrac{\partial^2\Delta}{\partial F^2_{y_1}}\right)^2}. \tag{26}$$

Согласно (10) вдоль луча (8) (при фиксированной точке A)

$$\frac{\partial\Delta}{\partial F_{y_1}} = \frac{dy_1}{ds} = \frac{dx}{ds}\overline{N} = \Delta_{\xi_i} N_i, \qquad \overline{N} = \overline{N}(t) \tag{27}$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2\Delta}{\partial F^2_{y_1}} = \frac{\partial\Delta_{\xi_i}}{\partial F_{y_1}} N_i = \Delta_{\xi_i \xi_i} \frac{\partial\xi_i}{\partial F_{y_1}} N_i, \tag{28}$$

причем в точке A $\dfrac{\partial\Delta}{\partial F_{y_1}} = 0$, как и в (*). С учетом равенств

$$\Delta(\xi_i) = 0, \qquad \Delta_{\xi_i} \frac{\partial\xi_i}{\partial F_{y_1}} = 0 \tag{29}$$

предполагая, как и при получении (12), что основное движение происходит в плоскости векторов $\overline{N}$ и $\mathrm{grad}_\xi\Delta$, можно найти из (29) равенства

$$\overline{k} = \{\xi_i\}, \qquad \frac{\partial\overline{k}}{\partial F_{y_1}} = \mu\overline{N}. \tag{30}$$

Кроме того, согласно (10) можно найти для $F_{y_1} = \dfrac{\partial F}{\partial y_1}$,

$$F_{y_1} = \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial y_1}, \qquad \frac{\partial x_i}{\partial y_1} = \frac{x_i - X_i}{y_1}, \tag{31}$$

причем в A имеет место $\xi_i = \alpha_i$, $F_{y_1} = 0$. Из (31) приближенно следует $1 = \dfrac{\partial\xi_i}{\partial F_{y_1}} \dfrac{\partial x_i}{\partial y_1}$ и, подставляя сюда (30) и (10), можно найти $\mu = 1$. Следует отметить, что в приведенных соотношениях (12) не использовалось. Из (30) и (28) получится

$$\frac{\partial\xi_i}{\partial F_{y_1}} = N_i, \qquad \frac{\partial^2\Delta}{\partial F^2_{y_1}} = \Delta_{\xi_i \xi_i} N_i N_i. \tag{32}$$

Кроме того, по (*) выполняется соотношение

$$\frac{d^2 y_1}{ds^2} = -\frac{\partial^2\Delta}{\partial F^2_{y_1}}\left(\frac{dF_{y_1}}{ds} + \frac{\partial\Delta}{\partial y_1}\right), \tag{33}$$

где по (31) и (8) $\dfrac{dF_{y_1}}{ds} = \dfrac{d\xi_i}{ds}\dfrac{\partial x_i}{\partial y_1} = \dfrac{d\xi_i}{dt}\dfrac{x_i - X_i}{y_1}(\alpha_i \Delta_{\alpha_i})$.

Подставляя (32), (33) в (26), можно убедиться, что оно удовлетворяется, что завершает сопоставление линейной части уравнения (24) с результатами ([4]). Разумеется, желательно более строгое рассмотрение указанного соответствия.

В плоской задаче $x_1 = x$, $x_2 = y$, и вышеприведенные соображения становятся более наглядными.

Обозначая $\xi_1 = \alpha$, $\xi_2 = \beta$, можно получить из (24)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} - \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{\left(\alpha \dfrac{\partial \beta}{\partial t} - \beta \dfrac{\partial \alpha}{\partial t} + \dfrac{\partial \Delta}{\partial y_1}\right)^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{1}{3}}} A_{1j} k_j P \frac{\partial P}{\partial x_1}, \qquad (34)$$

причем для однородной первоначально неподвижной среды можно получить соотношения ([11])

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\frac{\beta''(\alpha)}{R} \frac{1}{\beta - \alpha\beta'}, \qquad \rho = -\frac{y_1}{\Delta_\rho}\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad R = -\frac{1}{k} \frac{\beta''^2}{(1+\beta'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

где $\beta(\alpha)$ находится из уравнения $\Delta(\alpha, \beta) = 0$, k есть кривизна каустики в A, и, подставляя в (34), можно получить уравнение, выведенное в ([11]) в задаче магнитной газодинамики.

Коэффициент при $P \dfrac{\partial P}{\partial x_1}$ может быть выражен через коэффициент пропорциональности A в формуле для скорости волны ([12]) $c_n + v_n = c_0 + v_0 + AP$ в виде $A_{1j} k_j = -\dfrac{\alpha_j \Delta_{\alpha_j}}{c_0 + v_0} A$, где $c_0 + v_0$ есть невозмущенная скорость волны, в чем можно убедиться, записав уравнения (15) для одномерной по τ задачи, где τ есть время пробега от волны BB_1 до точки x вдоль луча, что дает характеристическое уравнение $(\Delta_{\xi_i} \xi_i) \dfrac{\partial \tau}{\partial t} = -A_{1j}(\xi_i) k_j P$; для скорости характеристики ([12]) следует $c_n + v_n = (c_0 + v_0)\left(1 + \dfrac{\partial \tau}{\partial t}\right)$, причем из вышеуказанного уравнения для скорости $c_n + v_n$ характеристики ([12]) следует $\dfrac{\partial \tau}{\partial t} = \dfrac{AP}{c_0 + v_0}$, что подтверждает приведенное выше соотношение.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈՅԵՎ

Միջավայրի շարժման ոչ գծային հավասարումների որոշումը կաուստիկայի մոտ

Դիտարկվում է սեղմելի միջավայրի պարամետրների որոշման խնդիրը կաուստիկայի մոտ, որը գծային ալիքի ճառագայթների պարուրիչն է։ Ստացված են պարզեցրած ոչ գծային հավասարումները կաուստիկայի և հարվածային ալիքի խախտման գծի (կամ կետի հարթ խնդրում) շրջակայքում։ Կատարված է համեմատություն նախորդ ուսումնասիրությունների հետ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. Курант*, Уравнения с частными производными. Изд. „Мир", М., 1965. [2] *Ю. Л. Газарян*, Вопросы динамической теории, т. V, Л., 1961. [3] *В. М. Бабич*, Вопросы динамической теории, т. V. Л., 1961. [4] *J. P. Guiraud*, Comptes Rendus, t. 266, № 6 (1965). [5] *А. Г. Багдоев, Г. Г. Оганян*, ДАН АрмССР, № 2, т. XLIX, (1969). [6] *D. Ludwig*, Communications on Pure and Applied Mathematics, № 6, 1966. [7] *А. Г. Багдоев*, Некоторые нелинейные задачи движения сжимаемой жидкости. Ереван, 1967. [8] *А. Г. Багдоев*, ДАН АрмССР, т. XLV, № 5 (1967). [9] *А. Г. Багдоев*, ДАН АрмССР, т. XLVI, № 2. (1968). [10] *А. Г. Багдоев*, „Известия АН АрмССР", т. XXII, № 1 (1969). [11] *А. Г. Багдоев*, „Известия АН АрмССР", т. XXIII, № 2 (1970). [12] *A. Jeffrey*, T. Taniuti Nonlinear Wave propagation, New-York—London, 1964.