ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LII 1971 5

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.37

С. С. Заргарян

Об одной контактной задаче для эксцентрического кругового кольца

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 10/II 1971)

Рассматривается смешанная задача плоской теории упругости для двусвязной области, ограниченной двумя неконцентрическими окружностями, центры которых расположены на действительной оси. Предполагается, что рассматриваемое упругое эксцентрическое кольцо по внешнему контуру Γ_2 неподвижно сцеплено (спаяно) с двумя жесткими штампами, симметрично расположенными относительно действительной оси. Штампы имеют форму дуги внешней окружности Γ_2, охватывают центральные углы $2\omega_1$ и $2\omega_2$ и находятся под действием двух равных и диаметрально противоположных сил P. Внутренний контур Γ_1 предполагается свободным от напряжений.

Смешанные (контактные) задачи для концентрического кругового кольца со сцеплением рассматривались в работах [1-4].

1. Пусть эксцентрическое круговое кольцо занимает область S^+ в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ и ограничено извне окружностью Γ_2 с единичным радиусом, а изнутри окружностью Γ_1 с радиусом R_1 и эксцентриситетом a $(a + R_1 < 1)$. Обозначим односвязные области внутри Γ_1 и вне Γ_2 соответственно через D_1 и D_2. Начало координат поместим в центре окружности Γ_2.

Совокупность дуг t_1t_2 и t_3t_4 обозначим через Γ_2', а t_2t_3 и t_4t_1 через Γ_2''.

Граничными условиями на внешнем контуре будут:

$$u + iv = -\varepsilon_1 \text{ на } t_1t_2 \tag{1.1}$$

$$u + iv = \varepsilon_2 \text{ на } t_3t_4$$

$$\sigma_r = \tau_{\theta r} = 0 \text{ на } \Gamma_2'' \tag{1.2}$$

на внутреннем контуре

$$\sigma_r = \tau_{\theta r} = 0. \tag{1.3}$$

Вектор напряжений и производная вектора перемещений по дуге s окружности радиуса r и с центром a_j определяются через две аналитические функции ([5])

$$\sigma_r + i\tau_{\theta r} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - [z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}]\,\frac{\bar{z} - \bar{a}_j}{z - a_j}, \tag{1.4}$$

$$2\mu\frac{d}{ds}(u + iv) = \frac{i(z - a_j)}{r}\left\{ \varkappa\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} + [z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}]\,\frac{\bar{z} - \bar{a}_j}{z - a_j} \right\}. \tag{1.5}$$

Рассмотрим функцию

$$z_j = \frac{R_j^2}{\bar{z} - \bar{a}_j} + a_j, \quad (j = 1,\ 2) \tag{1.6}$$

осуществляющую взаимно однозначное соответствие сопряженных относительно окружностей Γ_j точек области S^+ и D_j так, что при приближении точки z из S^+ к границе Γ_j, соответствующая ей точка z_j, приближается к Γ_j из D_j, причем, геометрическое место точек z_j в D_j, являющихся отражениями точек z из S^+ покроет лишь часть области D_j, которую обозначим через S_j^- (рис. 1).

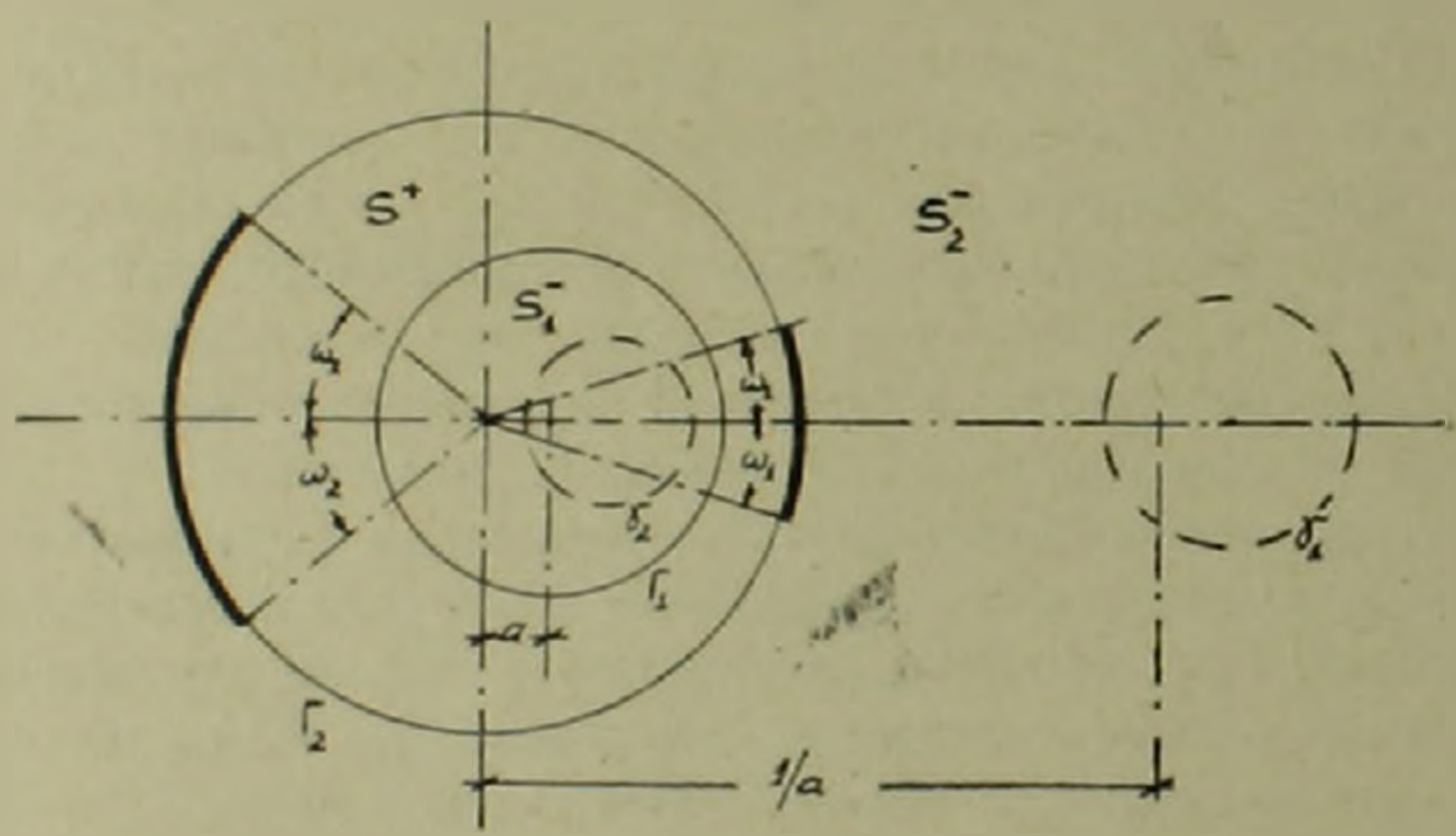

Рис. 1

Следуя ([6]) распространим определение функции $\Phi(z)$ на области S_j^- так, чтобы ее значения $\Phi_j(z)$ имели бы существенно особые точки в $D_j - S_j^-$ и при переходе через Γ_1 и незагруженные участки Γ_2' продолжали значения $\Phi(z)$ в S^+, положив

$$\Phi_j(z) = -\bar{\Phi}\left(\frac{R_j^2}{z - a_j} + \bar{a}_j\right) + \frac{zR_j^2}{(z - a_j)^2}\bar{\Phi}'\left(\frac{R_j^2}{z - a_j} + \bar{a}_j\right) +$$

$$+ \frac{R_j^2}{(z - a_j)^2}\bar{\Psi}_j\left(\frac{R_j^2}{z - a_j} + \bar{a}_j\right) \quad \text{для } z \text{ в } S_j^- \ (j = 1,\ 2). \tag{1.7}$$

Переходя к сопряженному значению в (1.7) и заменяя $\bar{z}$ на $\frac{R_j^2}{z-a_j}+\bar{a}_j$ получаем:

$$\Phi(z) = -\overline{\Phi}_j\left(\frac{R_j^2}{z-a_j}+\bar{a}_j\right)+\frac{z-a_j}{R_j^2}\left[R_j^2+\bar{a}_j(z-a_j)\right]\Phi'(z)+$$

$$+\frac{(z-a_j)^2}{R_j^2}\Psi_j(z) \text{ для } z \text{ в } S^+, \tag{1.8}$$

откуда

$$\frac{(z-a_j)^2}{R_j^2}\Psi_j(z) = \Phi(z)+\overline{\Phi}_j\left(\frac{R_j^2}{z-a_j}+\bar{a}_j\right)-$$

$$-\frac{z-a_j}{R_j^2}\left[R_j^2+\bar{a}_j(z-a_j)\right]\Phi'(z) \text{ для } z \text{ в } S^+ \tag{1.9}$$

На основании теоремы единственности, принимая $\Psi_1(z)=\Psi_2(z)=\Psi(z)$ в S^+ и подставляя значение $\overline{\Phi(z)}$ из (1.8) в (1.4) и (1.5), получаем

$$\sigma_r+i\tau_{\theta r} = \Phi(z)-\Phi_j\left(\frac{R_j^2}{\bar{z}-\bar{a}_j}+a_j\right)+a_j(\bar{z}-\bar{a}_j)\left(\frac{\bar{z}-\bar{a}_j}{R_j^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{z-a_j}\right)\Phi'(\bar{z})+(\bar{z}-\bar{a}_j)\left(\frac{\bar{z}-\bar{a}_j}{R_j^2}-\frac{1}{z-a_j}\right)\overline{\Psi(z)}, \tag{1.10}$$

$$2\mu\frac{d}{ds}(u+iv) = \frac{i(z-a_j)}{r}\left\{\varkappa\Phi(z)+\Phi_j\left(\frac{R_j^2}{\bar{z}-\bar{a}_j}+a_j\right)-\right.$$

$$-a_j(\bar{z}-\bar{a}_j)\left(\frac{\bar{z}-\bar{a}_j}{R_j^2}-\frac{1}{z-a_j}\right)\overline{\Phi'(z)}-(\bar{z}-\bar{a}_j)\left(\frac{\bar{z}-\bar{a}_j}{R_j^2}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{z-a_j}\right)\overline{\Psi(z)}\right\}. \tag{1.11}$$

Полагая, что функция $\Phi(z)$, доопределенная также в S_j^-, непрерывно продолжима на Γ_j из S^+ и S_j^-, за исключением, быть может концов штампов c_k, в окрестности которых

$$|\Phi(z)| < \frac{\text{const}}{|z-c_k|^\alpha} \qquad 0 \leqslant |\alpha| < 1 \tag{1.12}$$

и что в точках границы Γ, за исключением, быть может, точек c_k

$$\lim_{z\to t}\left(\frac{z-a_j}{R_j^2}-\frac{1}{\bar{z}-\bar{a}_j}\right)\Phi'(z) = 0, \tag{1.13}$$

откуда в силу (1.9)

$$\lim_{z\to t}\left(\frac{z-a_j}{R_j^2}-\frac{1}{\bar{z}-\bar{a}_j}\right)\Psi(z) = 0. \tag{1.14}$$

Переходя в (1.10) и (1.11) к пределу при z, стремящемся к t на Γ_j с учетом (1.13), (1.14), (1.1), (1.2) и (1.3), получаем

$$\Phi^+(t) - \Phi_j^-(t) = 0 \quad \text{на } \Gamma_2' \text{ и } \Gamma_1, \tag{1.15}$$

$$\varkappa\Phi^+(t) + \Phi_2^-(t) = 0 \quad \text{на } \Gamma_2, \tag{1.16}$$

где $\Phi^+(t)$ и $\Phi_j^-(t)$ — предельные значения из S^+ и S_j^- соответственно кусочно-голоморфной в S^+ и S_j^- $(j = 1, 2)$ функции $\Phi(z)$.

2. Определение кусочно-голоморфной функции $\Phi(z)$, определенной на множестве, отличной от всей плоскости комплексного переменного по краевому условию (1.16) на разомкнутом контуре Γ_2 сводится к однородной задаче Римана в следующей постановке.

Пусть S^+ рассмотренная выше двусвязная область, ограниченная окружностями Γ_2 и Γ_1, S_1^- и S_2^- — также двусвязные области, являющиеся взаимно сопряженными отражениями точек области S^+ относительно окружностей Γ_1 и Γ_2 соответственно при дробно-линейном отображении (1.6), причем, окружности Γ_1 и Γ_2 переходят в окружности γ_1 и γ_2 соответственно, либо в самого себя (рис. 1).

Учитывая, что $G(t) = -\dfrac{1}{\varkappa}$ на Γ_2 и $G(t) = 1$ на Γ_2' и Γ_1 требуется определить кусочно-голоморфную функцию

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi(z) & \text{для } z \text{ в } S^+ \\ \Phi_1(z) & \text{для } z \text{ в } S_1^- \\ \Phi_2(z) & \text{для } z \text{ в } S_2^- \end{cases} \tag{2.1}$$

по однородному краевому условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t).$$

В окрестности концов Γ_2 функция $\Phi(z)$ удовлетворяет условию (1.12).

Полагая, что

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{-k} R_1^k}{(z-a)^k} \quad \text{для } z \text{ в } S^+ \tag{2.3}$$

$$\frac{\overline{\Phi}_1(z)}{\overline{X}_1(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{A}_k \left(\frac{R_1^2}{z-a} + a\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{A}_{-k}\,(z-a)^k}{R_1^k} \quad \text{для } z \text{ в } S_1^- \tag{2.4}$$

$$\frac{\overline{\Phi}_2(z)}{\overline{X}_2(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{A}_k}{z^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{A}_{-k} R_1^k}{\left(\dfrac{1}{z} - a\right)^k} \quad \text{для } z \text{ в } S_2^- \tag{2.5}$$

каноническую функцию

$$X(z)=(z-e^{-i\omega_1})^{-\frac{1}{2}-i\beta}(z-e^{i\omega_1})^{-\frac{1}{2}+i\beta}(z+e^{-i\omega_1})^{-\frac{1}{2}-i\beta}(z+$$
$$+e^{i\omega_1})^{-\frac{1}{2}+i\beta}, \qquad (2.6)$$

где $\beta=\frac{\ln\varkappa}{2\pi}$, принимаем в таком же виде, как и в случае задачи Римана с разрывным коэффициентом для кусочно-голоморфной функции, определенной на всей плоскости ($^{\cdot\,8}$). Далее, под $X(z)$ будем подразумевать ту ветвь этой функции на разрезанной вдоль Γ_2 плоскости, для которой

$$\lim_{z\to\infty} z^2 X(z)=1.$$

Если представим разложение $X(z)$ в окрестности $z=a$ рядом Тейлора

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} P_k(z-a)^k, \quad |z-a|<1-a \qquad (2.7)$$

то фигурирующая в (2.4) функция $\overline{X}_1(z)$ равна

$$\overline{X}_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\overline{P}_k\left(\frac{R_1^2}{z-a}+a\right)^k \qquad (2.8)$$

Кроме того

$$\overline{X}_2(z)=X(z) \quad \text{для } z \text{ в } S_2^- \qquad (2.9)$$

В точках z и $\frac{1}{\bar z}$ симметричных отосительно Γ_2 функции (2.3) и (2.5) принимают комплексно-сопряженные значения, то есть сами функции симметричны, и при приближении к Γ_2' из S^+ и S_2^- продолжают друг друга, согласно (1.15). Откуда заключаем, что функция (2.5) на γ_1 удовлетворяет условию, комплексно-сопряженному с тем, которому удовлетворяет функция (2.3) на Γ_1.

Аналогично, функция (2.4) симметрична с (2.3) относительно окружности Γ_1 и удовлетнорение граничного условия на Γ_2 функцией (2.3) приведет к удовлетворению комплексно-сопряженного условия на γ_2 функцией (2.4).

3. Выражение (1.9) определяет две функции $\Psi_j(z)$ ($j=1, 2$) посредством двух введенных в S_j^- функций $\Phi_j(z)$. На основании единственности аналитических функций потребуем, чтобы в области кольца $R_1<|z-a|<1-a$

$$\Psi(z)=\Psi_1(z)=\Psi_2(z), \quad \Psi(z)=\sum_{k=0}^{\infty} D_k'(z-a)^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D_{-k}R_1^k}{(z-a)^k} \qquad (3.1)$$

Подставляя (3.1), (2.3) и (2.5) в (1.9) при $j=2$, с учетом того, что $a_2=0$ и $R_2=1$, после очевидных преобразований, получаем функциональное уравнение в кольце $R_1<|z-a|<1-a$

$$\frac{z^2}{X(z)}\left[\sum_{k=0}^{\infty} D_k^*(z-a)^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D_{-k}R_1^k}{(z-a)^k}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}A_k^*(z-a)^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_{-k}R_1^k}{(z-a)^k}+$$

$$+\frac{\overline{X}_2\left(\frac{1}{z}\right)}{X(z)}\left[\sum_{k=0}^{\infty}A_k^*(z-a)^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_{-k}R_1^k}{(z-a)^k}\right]-z\left[\sum_{k=1}^{\infty}kA_k^*(z-a)^{k-1}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{A_{-k}R_1^k}{(z-a)^{k+1}}\right]-z\frac{X'(z)}{X(z)}\left[\sum_{k=0}^{\infty}A_k^*(z-a)^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_{-k}R_1^k}{(z-a)^k}\right], \quad (3.2)$$

где, согласно (2.3), коэффициенты A_k связаны с A_k^* равенством

$$A_k=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m C_{m+k}^m a^m A_{m+k}^* \quad (k=0,\ 1,\ 2,\cdots). \quad (3.3)$$

Коэффициенты A_k^*, A_{-k}, D_k^* и D_{-k} действительны ввиду симметрии задачи относительно действительной оси. Вследствие этого, при $j=1$

$$\overline{\Phi}_1\left(\frac{R_1^2}{z-a}+a\right)=\Phi(z). \quad (3.4)$$

Подставляя (3.1), (2.3) и (2.4) в (1.9) при $j=1$ и $a_1=a$, с учетом (3.4) и (2.7) после несложных преобразований получаем второе функциональное уравнение

$$\sum_{n=0}^{\infty}D_n^*(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_{-n}R_1^n}{(z-a)^n}=\frac{2R_1^2}{(z-a)^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}H_n^*(z-a)^n+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{-n}R_1^n}{(z-a)^n}\right]-\left(\frac{R_1^2}{z-a}+a\right)\left[\sum_{n=1}^{\infty}nH_n^*(z-a)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nH_{-n}R_1^n}{(z-a)^{n+1}}\right], \quad (3.5)$$

где

$$H_n^*=\sum_{k=0}^{n}A_k^*P_{n-k}+\sum_{k=1}^{\infty}P_{k+n}A_{-k}R_1^k,$$

$$H_{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}P_k A_{-(k+n)}R_1^k. \quad (3.6)$$

Разлагая функции $\frac{1}{X(z)}$, $\frac{\overline{X}\left(\frac{1}{z}\right)}{X(z)}$ и $\frac{X'(z)}{X(z)}$ в ряд Тейлора с центром в $z=a$, перемножая ряды, входящие в (3.2) и приравнивая в (3.2) и (3.5) коэффициенты при одинаковых степенях $z-a$, получаем четыре однородные бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, относительно неизвестных A_k^*, A_{-k}, D_k^* и D_{-k}, которые оказываются квази вполне регулярными. При доказательстве квази вполне регулярности полученных бесконечных систем исследованы функциональные свойства полиномов, входящих в коэффициенты бесконечных систем.

Интегрируя (1.11) по внешнему контуру от t_0 до t_1 с учетом (1.1) и (1.15), получаем разрешающее комплексное уравнение

$$(1+\varkappa)\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t)\,dt=2\mu(\varepsilon_1+\varepsilon_2),$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty}A_kG_k+\sum_{k=1}^{\infty}A_{-k}G_{-k}=\frac{2\mu(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{1+\varkappa}, \tag{3.7}$$

где

$$G_k=\frac{1}{2}e^{-\beta(\omega_1+\omega_2)}\int\limits_{\omega_1}^{\pi-\omega_2}\frac{e^{i[k\theta-\beta\ln f(\theta)]}}{\sqrt{(\cos\omega_1-\cos\theta)(\cos\omega_2+\cos\theta)}}\,d\theta,$$

$$G_{-k}=\frac{1}{2}e^{-\beta(\omega_1+\omega_2)}\int\limits_{\omega_1}^{\pi-\omega_2}\frac{(1-2a\cos\theta+a^2)^{-\frac{k}{2}}e^{-i\left[k\arg\operatorname{tg}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta-a}\right)+\beta\ln f(\theta)\right]}}{\sqrt{(\cos\omega_1-\cos\theta)(\cos\omega_2+\cos\theta)}}\,d\theta,$$

$$f(\theta)=\frac{\sin\left(\theta+\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)-\sin\frac{\omega_2-\omega_1}{2}}{\sin\left(\theta-\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)+\sin\frac{\omega_2-\omega_1}{2}}.$$

Условие однозначности смещений записывается так

$$\varkappa\sum_{k=0}^{\infty}P_kA_{-(k+1)}R_1^{k+1}+D_{-1}R_1=0. \tag{3.8}$$

Совокупность полученных бесконечных систем совместно с уравнениями (3.7) и (3.8) полностью решают задачу.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ս. Ս. ԶԱՐԳԱՐՅԱՆ

ԷՔՍՑԵՆՏՐԻԿ ՕՂԱԿԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Դիտարկվում է առաձգականության տեսության հարթ, խառը եզրային պայմաններով խնդիրը երկկապ տիրույթի համար՝ սահմանափակված երկու անհամառանցք շրջանագծերով, որոնց կենտրոնները գտնվում են իրական առանցքի վրա։ Ընդունված է, որ դիտարկվող էքսցենտրիկ օղակի արտաքին շրջանագծին անշարժ ամրացված են երկու բացարձակ կոշտ դրոշմոցներ (շտամպ), որոնք սիմետրիկ են դասավորված իրական առանցքի նկատմամբ։

Դրոշմոցները գտնվում են երկու տրամագծորեն հակադիր կիրառված հավասար ուժերի ազդեցության տակ և նրանց հիման եզրագիծը արտաքին շրջանագծի տեսք ունի։

Խնդիրը լուծելու համար առաջարկվում է փնտրվող կոմպլեքս պոտենցիալների շարունակման մեթոդը լրացուցիչ տիրույթներում, որը թույլ է տալիս լուծումը բերել համասեռ եզրային պայմաններով Ռիմանի խնդրին, այնպիսի ֆունկցիայի համար, որը առաձգական և լրացուցիչ տիրույթներում հոլոմորֆ է։

Խնդրի լուծումը բերվում է չորս անվերջ հավասարումների սիստեմների լուծմանը, որոնք կվազի լիովին ռեգուլյար են։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *O. Tamate* and *K. Sugiura*, Part 1., Technology Reports, Tohoku Univ., Vol. 31, № 1 (1966). [2] *O. Tamate* and *K. Sugiura*, Part 2, Technology Reports, Tohoku Univ., Vol. 31, № 2 (1966). [3] *O. Tamate* and *Yamada*, Part 3, Technology Reports, Tohoku Univ., Vol. 31, № 2 (1966). [4] *Wen-Foo-Yau*, A Mixed Problem for an Elastic Ring. Tnansactions of ASME, E. 35, № 4 (1968). [5] *Н. И. Мусхелишвили*, Некоторые основные задачи математической теории упругости, М., 1966. [6] *P. Rausch*, Doct. diss. Univ. Illinois, 1963. [7] *Ф. Д. Гахов*, Краевые задачи, М., 1958. [8] *Н. И. Мусхелишвили*, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968.