ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LII 1971 5

УДК 517.54

МАТЕМАТИКА

В. С. Абрамович

О характеристических операторах классов мероморфных в круге функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 24/II 1971)

М. М. Джрбашяном [1] была построена полная теория факторизации мероморфных в круге функций произвольно большого роста и с произвольным распределением их нулей и полюсов. Было показано, что любая мероморфная в круге функция включается в некоторый класс N_ω функций с ограниченной обобщенной характеристикой, ассоциированной с некоторой подходящим образом выбранной непрерывной положительной на $(0,1)$ функцией $\omega(x)$. При этом как максимальная плотность нулей и полюсов, так и максимальный рост экспоненциального множителя функций класса N_ω определяются асимтотическим поведением функции $\omega(x)$ вблизи точки $x = 1$.

В настоящей статье рассматриваются более общие классы мероморфных функций с независимыми друг от друга характеристиками плотности и роста. С целью описания этих классов используется теория вводимых в статье характеристических операторов классов. Следуя в основном [1], ниже приняты следующие обозначения:

1) Ω — множество положительных и непрерывных на $[0, 1)$ функций $\omega(x)$, $\omega(0) = 1$, суммируемых на $(0, 1)$, для которых $\exists\delta\in(0, 1)$, что

$$\sup_{[0, \delta)} \frac{|\omega(x) - 1|}{x} < +\infty;$$

Ω_* — подмножество непрерывных на $[0, 1]$ функций из Ω, обладающих почти всюду на $(0, 1)$ суммируемой производной.

2) A_R — пространство аналитических в круге $|z| < R$ функций, причем если $f(z) = \sum\limits_k f_k z^k \in A_R$, то $\|f\|_r = \sum\limits_k |f_k| r^k$, $r \in (0, R)$.

3) $V[-\pi, \pi]$ — множество вещественных функций $\psi(\theta)$ ограниченной вариации на $[-\pi, \pi]$.

4) R, Z — соответственно множества всех вещественных и целых чисел.

5) $\{a_\nu\}$ и $\{b_\nu\}$ — соответственно множества отличных от $z=0$ нулей и полюсов мероморфной функции $F(z)$ в круге $|z|<1$, $n(t;\infty)$ при $0<t<1$ — считающая функция последовательности $\{b_\nu\}$ в круге $|z|\leqslant t$, $n(0,\infty)$ — кратность полюса функции $F(z)$ в точке $z=0$.

$$6)\quad L^{(\omega)}\{\ln F(re^{i\theta})\} = -\frac{d}{dr}\left\{r\int_0^1 \ln F(rxe^{i\theta})\, d\left[x\int_x^1 \frac{\omega(\tau)}{\tau^2}\,d\tau\right]\right\},$$

$$re^{i\theta}\in\{|z|<1\},\quad \omega\in\Omega.$$

$$7)\quad \Delta_\omega^{(0)}=1,\quad \Delta_\omega^{(n)} = n\int_0^1 \omega(x)\,x^{n-1}\,dx,\quad n=1,2,\cdots;$$

$$k_\omega = \int_0^1 \frac{1-\omega(x)}{x}\,dx\ (\omega\in\Omega).$$

$$8)\quad B_\omega=(z;z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-W_\omega(z;z_k)},$$

$$0<|z_k|<1,\quad |z_k|\uparrow 1,$$

где

$$W_\omega(z;z_k) = -\int_{|z_k|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[z_k^{-n}\int_0^{|z_k|}\omega(x)\,x^{n-1}\,dx - \right.$$

$$\left. - \bar{z}_k^{n}\cdot\int_{|z_k|}^{1}\omega(x)\,x^{-n-1}\,dx\right]\frac{z^n}{\Delta_\omega^{(n)}}$$

— произведение М. М. Джрбашяна, сходящееся абсолютно и равномерно в круге $|z|<1$ тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|z_k|}^{1}\omega(x)\,dx\quad(\omega\in\Omega).$$

$$9)\qquad S(z;\omega) = 1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{\Delta_\omega^{(k)}},\quad \omega\in\Omega,\ |z|<1.$$

$$10)\qquad a^+ = (a+|a|)/2.$$

Класс N_ω $(\omega \in \Omega)$ М. М. Джрбашяна определяется условием

$$\sup_{0<r<1} T_\omega(r; F) < +\infty, \tag{1}$$

где

$$T_\omega(r; F) = m_\omega(r; F) + N_\omega(r; F),$$

$$m_\omega(r; F) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |L^{(\omega)} \ln|F(re^{i\vartheta})||^{+} \, d\vartheta,$$

$$N_\omega(r; F) = n(0; \infty)(\ln r - k_\omega) + \int_0^r \frac{n(t; \infty)}{t}\,\omega\left(\frac{t}{r}\right)dt. \tag{2}$$

Пусть $\omega(x) \in \Omega$, $s(z) \in A_1$. Обозначим через $N_{\omega, s}$ класс мероморфных в единичном круге функций, заданный следующим параметрическим представлением

$$F(z) = e^{i\gamma + \lambda k_\omega} z^\lambda \frac{B_\omega(z, a_\mu)}{B_\omega(z; b_\nu)} \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s(e^{-i\vartheta}z)\, d\psi(\vartheta)\right\}. \tag{3}$$

Здесь $B_\omega(z; a_\mu)$, $B_\omega(z; b_\nu)$ — произвольные сходящиеся произведения М. М. Джрбашяна, $\psi(\vartheta) \in V[-\pi, \pi]$, $\lambda \in Z$, $\gamma \in R$. Функцию $s(z)$ будем называть *ядром класса* $N_{\omega, s}$.

Из теоремы 4.1. [1] следует, что $N_\omega = N_{\omega, s}$ при условии $s(z) = S(z; \omega)$.

Нашей целью является описание класса $N_{\omega, s}$ в терминах ограниченности некоторой обобщенной характеристики мероморфных функций $T_{\omega, s}(r; F)$, ассоциированной с фукциями $\omega(x)$ и $s(z)$. В связи со структурой класса $N_{\omega, s}$ естественно в характеристике М. М. Джрбашяна [3]· изменить только одно слагаемое $m_\omega(r; F)$, оставив без изменения функцию $N_\omega(r; F)$. Таким образом, для класса $N_{\omega, s}$ мы приходим к следующей задаче: найти аддитивный оператор $\Phi_{\omega, s}$, определенный на множестве логарифмов мероморфных в единичном круге функций, такой, что ограниченность функции

$$T_{\omega, s}(r; F) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\mathrm{Re}\, \Phi_{\omega, s} \ln F(re^{i\vartheta})|^{+} \, d\vartheta + N_\omega(r; F) \quad (0 < r < 1) \tag{4}$$

являются необходимым и достаточным условием для того, чтобы $F(z) \in N_{\omega, s}$.

Введем некоторые определения.

Назовем класс $N_{\omega, s}$ *классом с равновесной асимптотикой*, если существуют положительные числа K_1 и K_2 такие, что для $\forall r \in (0,1)$ для ядер $s(z)$ класса $N_{\omega, s}$ и $S(z; \omega)$ класса N_ω М. М. Джрбашяна имеют место неравенства

$$K_1 \leqslant \frac{\|s(z)\|_r}{\|S(z;\ \omega)\|_r} \leqslant K_2. \tag{5}$$

В том случае, когда между ядрами $s(z)$ и $S(z;\ \omega)$ имеется асимптотическое соотношение

$$\|S(z;\ \omega)\|_r = O(\|s(z)\|_r) \quad (r \to 1-0) \tag{6}$$

класс $N_{\omega, s}$ будем называть *классом с положительной асимптотикой*, а при обратном асимптотическом соотношении

$$\|s(z)\|_r = O(\|S(z;\ \omega)\|_r) \quad (r \to 1-0) \tag{7}$$

— *с отрицательной асимптотикой*.

Ядро класса $N_{\omega, s}$ будем называть *правильным*, если для его тейлоровских коэффициентов выполняются условия

$$s_0 = 1,\ s_k \neq 0,\ k = 1,\ 2, \cdots;\ \lim_{k \to \infty} |s_k|^{\frac{1}{k}} = 1. \tag{8}$$

Классы $N_{\omega, s}$ с правильными ядрами назовем *регулярными*. Наконец, в случае сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} [|s_k| \Delta_{\omega}^{(k)}]^{-1} \tag{9}$$

регулярные классы $N_{\omega, s}$ будем называть *вполне регулярными*.

Отметим, что классы N_{ω, s_1} и N_{ω, s_2} с одною и той же асимптотикой их аналитических ядер, вообще говоря, могут существенно отличатся друг от друга. Так, из известного примера А. М. Маркушевича* вытекает, что при

$$s(z) = \frac{1+z}{1-z} \quad N_{\omega, s} \neq N_{\omega, 1}.$$

Введем понятие характеристического оператора класса $N_{\omega, s}$.

Определение. Аддитивный оператор $H_{\omega, s}$, определенный на множестве логарифмов мероморфных в круге $|z| < 1$ функций, будем называть характеристическим оператором класса $N_{\omega, s}$, если удовлетворяются следующие условия:

а) для $\forall r \in (0,\ 1)$ $H_{\omega, s} \ln F(re^{i\theta}) \in L(-\pi,\ \pi)$; если $\ln F(z) \in A_{\rho}$ $(0 < \rho < 1)$, то для $\forall r\,(0,\ \rho)$ $\operatorname{Re} H_{\omega, s} \ln F(re^{i\theta}) \in C[-\pi,\ \pi]$

б) для $\forall F(z)$, мероморфной в $|z| < 1$, имеет место тождество:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [2s(e^{-i\theta} z) - 1] \operatorname{Re} H_{\omega, s} \ln F(\rho e^{i\theta})\, d\theta =$$

---

* См. (7), стр. 478.

$$= \int_{-\pi}^{\pi} S(e^{-i\theta} z; \omega)\, L^{(\omega)} \ln |F(\rho e^{i\theta})|\, d\theta, \quad 0 \leq \rho < 1, \ |z| < 1 \tag{10}$$

в) для любого сходящегося произведения $B_\omega(z; z_k)$ интегралы

$$J_{\omega,s}(r; B_\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} |\mathrm{Re}\, H_{\omega,s} \ln B_\omega(re^{i\theta}; z_k)|\, d\theta \tag{11}$$

равномерно ограничены по r $(0 \leq r < 1)$.

Приведем важнейшие свойства характеристических операторов.

Теорема 1. *Если $H_{\omega,s}$ — характеристический оператор регулярного класса $N_{\omega,s}$ и*

$$\ln F(z) = \sum_k f_k z^k \in A_\rho, \quad 0 < \rho < 1, \tag{12}$$

то в круге $|z| < \rho$ справедлива формула

$$\mathrm{Re}\, H_{\omega,s} \ln F(z) = Re \left\{ \sum_k \frac{f_k}{s_k} z^k \right\} \quad (|z| < \rho). \tag{13}$$

Теорема 2. *Если $H_{\omega,s}$ — характеристический оператор вполне регулярного класса $N_{\omega,s}$, то для любого сходящегося произведения М. М. Джрбашяна $B_\omega(z; z_k)$ всюду на единичной окружности $\zeta = e^{i\theta}$ $(-\pi \leq \theta \leq \pi)$ имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{r \to 1-0} \mathrm{Re}\, H_{\omega,s} \ln B_\omega(re^{i\theta}, z_k) = 0, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi. \tag{14}$$

Следствием этой теоремы является следующее утверждение.

Теорема 3. *В условиях теоремы 2 для любой функции $F(z) \in N_{\omega,s}$ почти всюду на единичной окружности $\zeta = e^{i\theta}$ $(-\pi \leq \theta \leq \pi)$*

$$\lim_{r \to 1-0} \mathrm{Re}\, H_{\omega,s} \ln F(re^{i\theta}) = 2\psi'(\theta) - \frac{\psi(\pi) - \psi(-\pi)}{2\pi} \in L(-\pi, \pi) \tag{15}$$

где $\psi(\theta) \in V[-\pi, \pi]$ соответствует функции $F(z)$ в параметрическом представлении (3).

Пользуясь установившейся терминологией, следующее утверждение будем называть соотношением ω, s — равновесия.

Теорема 4. *Если $H_{\omega,s}$ — характеристический оператор регулярного класса $N_{\omega,s}$, то для любой мероморфной в единичном круге функции $F(z)$ имеет место формула*

$$T_{\omega, s}(r;\ F) = T_{\omega, s}\left(r;\ \frac{1}{F}\right) + \mathrm{const} \quad (0 < r < 1) \qquad (16)$$

где $T_{\omega, s}(r;\ F)$ — *обобщенная характеристика* (4) *и* $\Phi_{\omega, s} = H_{\omega, s}$.

Следующая теорема, которую будем называть основной, дает решение поставленной выше задачи в терминах характеристического оператора.

Теорема 5. *В условиях теоремы* (4) *регулярный класс* $N_{\omega, s}$ *совпадает с множеством мероморфных в* $|z| < 1$ *функций, имеющих ограниченную характеристику* $T_{\omega, s}(r;\ F)$.

Перейдем к конструктивному построению характеристических операторов.

Определение. Регулярный класс $N_{\omega, s}$ назовем классом $\mathring{N}_{\omega, \omega_*}$ ($\omega \in \Omega$, $\omega_* \in \Omega_*$), если его ядро имеет вид*

$$s(z) = s(z;\ \omega,\ \omega_*) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_{\omega}^{(k)} \Delta_{\omega_*}^{(k)}} \quad (|z| < 1) \qquad (17)$$

Для $\forall \omega \in \Omega$, $\omega_* \in \Omega_*$ положим

$$L_{\omega, \omega_*} \ln F(re^{i\varphi}) =$$

$$= \lim_{\tau \to r - 0} L^{(\omega_*)} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \left(\frac{\tau}{r}\right)^2}{1 - 2\frac{\tau}{r}\cos(\varphi - \theta) + \left(\frac{\tau}{r}\right)^2} L^{(\omega)} \ln |F(re^{i\theta})|\, d\theta \right\} \qquad (18)$$

Предел (18) существует всюду за исключением разве лишь точек множества $\{a_\mu\} \cup \{b_\nu\}$. В частности, при $\omega_* \equiv 1$ оператор L_{ω, ω_*} совпадает с оператором $\mathrm{Re} L^{(\omega)}$, а класс $\mathring{N}_{\omega, \omega_*}$ — с классом N_ω М. М. Джрбашяна.

Теорема 6. *Оператор* L_{ω, ω_*} ($\omega \in \Omega$, $\omega_* \in \Omega_*$) *является характеристическим оператором класса* $\mathring{N}_{\omega, \omega_*}$.

Таким образом, теоремы 5 и 6 дают полное решение поставленной выше задачи на множестве классов $\{\mathring{N}_{\omega, \omega_*}\}$, охватывающем, как нетрудно видеть, классы с произвольной неотрицательной асимптотикой.

Дадим теперь решение поставленной задачи на всем множестве вполне регулярных классов.

Пусть $\varkappa = \{\gamma_k\}_0^\infty$ — последовательность чисел, удовлетворяющих условиям (8). Для любой функции $\omega \in \Omega$ положим

---

* Известно ([1]), что если $\omega \in \Omega$, то $\lim\limits_{k \to \infty} |\Delta_{\omega}^{(k)}|^{\frac{1}{k}} = 1$.

$$G_{\varkappa,\omega} \ln F(re^{i\varphi}) = L^{(\omega)} \operatorname{Re} \left\{ A_n \ln r + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n} \varkappa_k r^k + \right. \tag{19}$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty} a_{-k,n} \bar{\varkappa}_k r^{-k} \right\} \quad (r_n < r < r_{n+1}, \quad n = 0, 1, \cdots; \quad r_0 = 0),$$

где $a_{\pm k,n} = a_{\pm k,n}(\theta)$ $k, n = 0, 1, \cdots,$ — коэффициенты лорановских разложений в кольцах $r_n < r < r_{n+1}$ логарифма мероморфной в круге $|z| < 1$ функции $F(z)$:

$$\ln F(re^{i\theta}) = A_n \ln r + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k,n} r^k \; (r_n < r < r_{n+1}). \tag{20}$$

$$\{r_n\}_1^{\infty} = \{|a_\mu|\} \cup \{|b_\nu|\}.$$

Теорема 7. *Если $N_{\varkappa,\omega}$ вполне регулярный класс, то при условии*

$$\varkappa = \{[s_k \Delta_{\omega}^{(k)}]^{-1}\}_0^{\infty} \tag{21}$$

оператор $G_{\varkappa,\omega}$ $(\omega \in \Omega)$ является его характеристическим оператором.

Таким образом, для оператора $G_{\varkappa,\omega}$ при условии сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} |\varkappa_k|$ имеют место соотношения (14) и (15), так как на основании последней теоремы он является характеристическим оператором вполне регулярного класса $N_{\varkappa,\omega}$ с ядром

$$s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\varkappa_k \Delta_{\omega}^{(k)}}.$$

Что касается операторов L_{ω,ω_*} (18), то для них вместо теоремы 2 справедлива следующая теорема.

Теорема 8. 1°. *Если функции $\omega \in \Omega$, $\omega_* \in \Omega_*$ монотонно не возрастают на $[0, 1)$ и, кроме того, $(1-x)^{-1}\omega_*(x) \in L(0, 1)$, то для любого сходящегося произведения $B_\omega(z; z_k)$ почти для всех $\theta \in [-\pi, \pi]$ имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{r \to 1-0} L_{\omega,\omega_*} \ln B_\omega(re^{i\theta}; z_k) = 0 \tag{22}$$

2°. При дополнительном условии $\omega_*(1-0) = 0$ соотношение (22) имеет место всюду на $[-\pi, \pi]$, за исключением разве лишь счетного множества $E = \{\arg z_k\}_1^{\infty}$.

Из последней теоремы вытекает, что теорема 3, сформулированная для вполне регулярных классов, справедлива в условиях теоремы 8 и для классов $\overset{*}{N}_{\omega,\omega_*}$.

если система (1) такова, что соответствующие этой системе уравнения $L_1(\rho_1, \rho_2) = 0$ и $L_2(\rho_1, \rho_2) = 0$ имеют действительные положительные корни $\rho_1 = \rho_{1i}^*, \rho_2 = \rho_{2i}^*$ нечетной кратности и выполняется условие (13), то невозмущенное движение устойчиво в смысле Г. В. Каменкова.

Ереванский политехнический институт

Ա. Գ. ՄՈՒՍԱՅԵԼՅԱՆ

Խարակտերիստիկ հավասարման երկու զույգ կոմպլեքս արմատների դեպքում շարժման կայունության մասին

Աշխատանքում դիտարկված է մի մեխանիկական սիստեմ, որի գրգռված շարժումը տրվում է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի միջոցով։ Այդ սիստեմի խարակտերիստիկ հավասարումն ունի երկու զույգ կոմպլեքս արմատներ։ Սիստեմը բերված է գրգռված շարժման կայունության հետազոտման համար հարմար տեսքի։ Հետազոտումը կատարվում է Ա. Մ. Լյապունովի ֆունկցիայի որոշման միջոցով։ Վ. Գ. Կամենկովի մեթոդով ստացված է գրգռված շարժման կայունության (անկայունության) պայմանները։

Հոդվածում ρ_i կոորդինատները դիտվում են որպես նոր փոփոխականներ և որպես Լյապունովի ֆունկցիաներ, իսկ դրա համար պահանջվում է, որ r_i-ի ցանկացած դրական և θ_i-ի ցանկացած իրական արժեքների համար այդ ֆունկցիաները լինեն որոշակի դրական։

r_i-ի բավականաչափ փոքր արժեքների համար նրա ածանցյալների նշանները որոշվում են փոքրագույն կարգի անդամներով։

Ապացուցված է թեորեմ, որի համաձայն, եթե սիստեմի գրգռված շարժման դիֆերենցիալ հավասարումներն ունեն կենտապատիկ իրական դրական արմատներ և բավարարում են ստացված որոշակի պայմաններին, ապա չգրգռված շարժումը կայուն է ըստ Գ. Վ. Կամենկովի։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. В. Каменков*, Труды УДН им. П. Лумумбы, т. I, вып. I, 1963. [2] *А. М. Ляпунов*. Общая задача об устойчивости движения, ОНТИ, 1935.