ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LII 1971 4

УДК 533.6

МЕХАНИКА

А. Г. Багдоев

Определение нелинейных уравнений движения среды в окрестности точки касания ударных волн

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 12/II 1971)

Рассматривается плоская задача по определению движения сжимаемой среды в окрестности точки соединения слабой ударной волны AB рис. 1, с дифракционной или точечной волной BB_1. Предполагается, что среда описывается системой нелинейных гиперболических уравнений

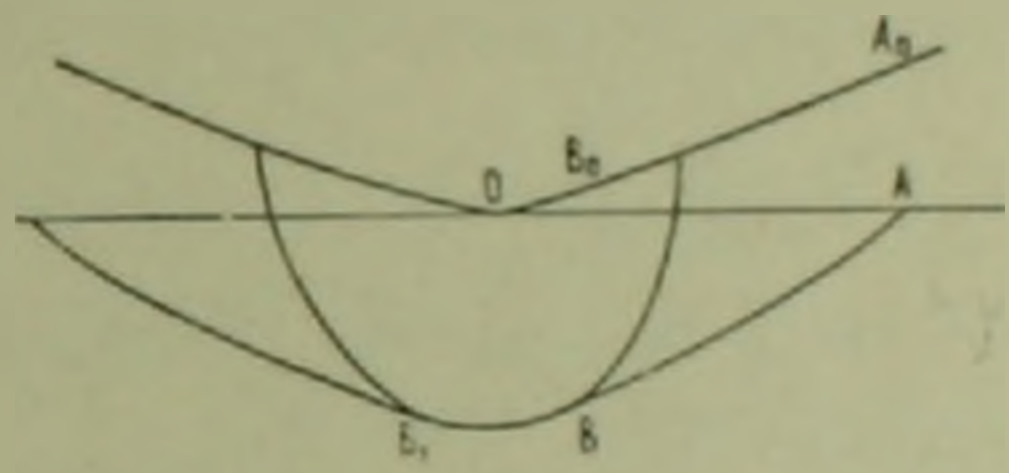

Рис. 1.

$$\bar{A}_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \bar{A}_2 \frac{\partial U}{\partial y} + \bar{A}_3 \frac{\partial U}{\partial t} + \Phi = 0, \tag{1}$$

где t есть время, x, y — координаты точки, $U = \{U_i\}$ — вектор, компоненты которого дают параметры движения среды, $\bar{A}_{1,2,3}(U, x, y)$ — матрицы, $\Phi(U, x, y)$ — вектор. Вышеуказанная задача возникает при отражении ударных волн от препятствий, образующих в точке O угол, в задаче проникания твердых тел и ударных волн в жидкость [1,2]. Возвращая ударные волны AB и A_1B_1 в начальное положение, можно заменить граничные условия на поверхности среды OA через условия, заданные за начальной волной OA_0B_0, причем в точке O начальная волна образует угол.

Пусть невозмущенное движение среды впереди волны задается параметрами $V = \{V_i\}$, причем V есть заданная функция координат. Тогда позади волны можно полагать

$$U = V + u, \tag{2}$$

где $|u| \ll |V|$, $|u| \sim \nu$, $\nu \ll 1$, причем ν дает интенсивность ударной волны. Подставляя (2) в (1) и учитывая, что V удовлетворят (1), можно получить в первом порядке по ν систему линейных уравнений. Решение линейной гиперболической системы уравнений в окрестности точки B найдено в [1,2] через гипергеометрические функции.

Обозначая через τ время пробега волны вдоль луча от данной точки до волны BB_1, через θ—углы нормали к волне BB_1 в ее начальном положении (при приближении к O), через k_1—кривизну гиперсферы, представляющей точечную волну с центром в точке (x, y), вычисленную в O, через k_2—кривизну OA_0B_0 в O, c_0—скорость волны в O, можно найти уравнение волны AB вблизи B в виде [2]:

$$\tau = \frac{(\theta - \theta_0)^2}{2c_0(k_1 - k_2)}. \tag{3}$$

θ_0 есть значение θ в B. Выражение (3) может быть найдено из геометрических рассмотрений, с учетом равенства, связывающего θ с длиной дуги s_0 начальной волны OA_0, отсчитываемой от 0 до точки пересечения луча, проходящего через точку (x, y) с OA_0 [3]

$$\frac{\theta_0 - \theta}{k_1 - k_2} = s_0. \tag{4}$$

Из (3) видно, что дифференциальное уравнение волны AB или характеристики в линейной задаче имеет вид:

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} = -\frac{c_0}{2}\frac{d(k_1 - k_2)}{dt}\left(\frac{\partial\tau}{\partial\theta}\right)^2. \tag{5}$$

Дифференциальное уравнение характеристик в нелинейной задаче имеет вид [4]:

$$-c_n\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2} = \frac{dF}{dt}, \tag{6}$$

где c_n есть скорость волны $F(x, y, t) = 0$ относительно частиц среды, v_n — скорость частицы по нормали к волне, производная $\frac{dF}{dt}$ относится к частице, причем в координатах τ, θ, $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{d\tau}{dt}\frac{\partial F}{\partial\tau} + \frac{d\theta}{dt}\frac{dF}{d\theta}$.

Можно обозначить через $H_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)^2}}$ скорость волны в линейной задаче, причем $h_1 = c + V_n$. Учитывая, что

$H_1 \frac{d\tau}{dt}$ равно скорости частицы относительно невозмущенной волны $\tau = 0$, то есть $H_1 \frac{d\tau}{dt} = v_n - H_1$, записывая $v_n = V_n + w_1$, где V_n есть невозмущенное значение v_n, из формулы ([4]) для скорости характеристики в первом порядке по γ

$$c_n = c + \lambda w_1 \tag{7}$$

можно из (6), записанного в координатах τ, ϑ, t, с учетом (5) получить дифференциальное уравнение нелинейных характеристик для системы уравнений (1) вблизи B в виде:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{c_0}{2} \frac{d(k_1 - k_2)}{dt} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)^2 = \frac{\lambda + 1}{H_1} w_1. \tag{8}$$

Соответствующее уравнение второго порядка, имеющее (8) в качестве характеристического уравнения, имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial \tau} - \frac{c_0}{2} \frac{d(k_1 - k_2)}{dt} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\lambda + 1}{H_1} w_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} - w_1 \frac{\partial \ln \varphi}{\partial t} = 0, \tag{9}$$

где в силу произвольности ψ и наличия порядков малости $\tau \sim (\vartheta - \vartheta_0)^2$, $\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \ll \frac{\partial \psi}{\partial \tau}$, можно отождествить $\frac{\partial \psi}{\partial \tau}$ с нормальной скоростью возмущенного движения и полагать $w_1 = \frac{\partial \psi}{\partial \tau}$, причем в (9) добавлено слагаемое $w_1 \frac{\partial \ln \varphi}{\partial t}$, не влияющее на вид (8), в котором φ дает значение w_1 в линейной одномерной по τ задаче, которое находится по лучевой теории ([2]). Смысл произволной $\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}$ можно видеть из проекции уравнений движения (1) на касательную к волне в основном порядке (в которых возможно предельное упрощение) ([2]), которое находится значительно легче, чем (9).

Можно также получить уравнение движения вблизи B непосредственно из (1), которое в основном порядке можно записать в виде

$$A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + A_2 \frac{\partial u}{\partial y} + A_3 \frac{\partial u}{\partial t} = kP \frac{\partial P}{\partial \tau} - Tu, \tag{10}$$

где $A_{1,2,3}$, T — матрицы, $k = \{k_i\}$ — вектор, являющиеся функциями координат, причем в нелинейных слагаемых по u в (1) все функции v_i заменены через $u_1 = P$ по условию совместности и все производные заменены на производные по основному направлению τ.

Пусть $\Delta(\xi, \eta, \zeta, x, y) = 0$ есть дифференциальное уравнение характеристической поверхности $f = 0$ для линейного оператора в левой части (10), $\xi = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\eta = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\zeta = \dfrac{\partial f}{\partial t}$.

Тогда уравнение бихарактеристик или лучей имеет вид ([4]), [5]

$$\frac{dx}{d\sigma} = -\frac{\partial \Delta}{\partial \xi}, \quad \frac{dy}{d\sigma} = -\frac{\partial \Delta}{\partial \eta}, \quad \frac{dt}{d\sigma} = -\frac{\partial \Delta}{\partial \xi}, \tag{11}$$

причем в силу однородности Δ по ξ, η, ζ

$$\Delta(\xi, \eta, \zeta) = (-\zeta)^n \Delta(\alpha, \beta, -1), \quad \alpha = \frac{\xi}{-\zeta}, \quad \beta = \frac{\eta}{-\zeta}. \tag{12}$$

Полагая еще $\zeta = -1$ вдоль волны $\Delta = 0$, можно найти $\alpha = \dfrac{\partial \tau}{\partial x}$, $\beta = \dfrac{\partial \tau}{\partial y}$,

$$\frac{dx}{d\sigma} = \Delta_\alpha, \quad \frac{dy}{d\sigma} = \Delta_\beta, \quad \frac{dt}{d\sigma} = \Delta_\zeta, \quad \Delta_\zeta = \alpha\Delta_\alpha + \beta\Delta_\beta. \tag{13}$$

Систему уравнений (10) можно записать в переменных τ, θ, t, где $\tau = \mathrm{const}$ дает уравнение волн BB_1 в линейной задаче, $\theta = \mathrm{const}$ — уравнение соответствующих им лучей (13), причем по (11)

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}\Delta_\alpha + \frac{\partial \theta}{\partial y}\Delta_\beta = 0, \tag{14}$$

Полагая $p = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial}{\partial y}$, $s = \dfrac{\partial}{\partial t}$, причем

$$p = \alpha\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta}, \quad q = \beta\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta}, \quad s = \frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = -1 \tag{15}$$

можно представить $\Delta(p, q, s)$ по степеням $\dfrac{\partial}{\partial \theta} \ll \dfrac{\partial}{\partial \tau}$, $\dfrac{\partial}{\partial t} \ll \dfrac{\partial}{\partial \theta}$,

$$\Delta(p, q, s) = \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^{n-2} \left\{\Delta_{\alpha\alpha}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + 2\Delta_{\alpha\beta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + \Delta_{\beta\beta}\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2\right\}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + (\alpha\Delta_\alpha + \beta\Delta_\beta)\left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau} + \cdots\right), \tag{16}$$

где не выписаны производные первого порядка.

Разрешая систему уравнений (10) относительно u, находящихся в ее левых частях, можно для $u_1 = P$ получить уравнение

$$\Delta(p,\ q,\ s)\,P + \cdots = A_{1j}(p,\ q,\ s)\,k_j\,P\frac{\partial P}{\partial \tau}, \tag{17}$$

где Δ есть определитель (10), данный в (11), A_{1j} есть алгебраические дополнения элементов в Δ, содержащих коэффициенты при u_1, и не выписаны производные низшего порядка.

Подставляя (16) в (17) и учитывая, что A_{1j} есть однородная функция p, q, s порядка $n-1$, можно получить приближенное уравнение

$$\frac{1}{2}\left\{\Delta_{\alpha\alpha}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + 2\,\Delta_{\alpha\beta}\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y} + \Delta_{\beta\beta}\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2\right\}\frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2} +$$

$$+ (\alpha\Delta_\alpha + \beta\Delta_\beta)\left(\frac{\partial^2 P}{\partial t\,\partial\tau} - \frac{\partial P}{\partial\tau}\frac{d\ln\varphi}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial\tau}A_{1j}(\alpha,\ \beta,\ -1)\,k_jP\frac{\partial P}{\partial\tau}, \tag{18}$$

где взамен невыписанных слагаемых добавлено $\frac{\partial P}{\partial\tau}\frac{d\ln\varphi}{dt}$, учитывающее амплитуду φ волны в линейной одномерной по τ задаче.

Интересно, что формально указанное слагаемое в (18) можно получить, полагая $s = -\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial t} - \frac{d\ln\varphi}{dt}$ и не учитывая влияния $\frac{\partial}{\partial\tau}$, $\frac{\partial}{\partial\theta}$, $\frac{\partial}{\partial t}$ на коэффициенты при p, q, s в Δ. Полагая $P = -\frac{\rho_0 a_0^2}{c_0}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}$ и сравнивая (18) с (9), можно получить соотношения

$$A_{1j}k_j = -(\lambda + 1)\frac{1}{\rho_0 a_0^2}(\alpha\Delta_\alpha + \beta\Delta_\beta)\frac{c_0}{H_1} \tag{19}$$

и

$$\frac{\Delta_{\alpha\alpha}\Delta_\beta^2 - 2\,\Delta_{\alpha\beta}\Delta_\alpha\Delta_\beta + \Delta_{\beta\beta}\Delta_\alpha^2}{\Delta_\beta^2(\alpha\Delta_\alpha + \beta\Delta_\beta)}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 = -c_0\frac{d(k_1 - k_2)}{dt}, \tag{20}$$

причем k_2 постоянна. Здесь ρ_0, a_0 начальные плотность и скорость звука в среде, которые введены для того, чтобы придать P смысл возмущенного значения давления за волной. Соотношение (19) позволяет выразить нелинейные слагаемые в (18) через значение λ в (7).

Равенство (20) проверено для однородной первоначально неподвижной среды, в которой ([2])

$$k_1 - k_2 = -\frac{1}{\beta'' t}(\beta - \alpha\beta')^3 c_0^3,\quad H_2 = -\frac{\beta'' t}{(\beta - \alpha\beta')^3 c_0^3},\quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \tag{21}$$

где $\beta(\alpha)$ есть решение уравнения $\Delta(\alpha,\ \beta) = 0$.

Кроме того, можно проверить (20) для непроводящей первоначально движущейся со скоростями V_x, V_y и начальной скоростью звука a_0 сжимаемой жидкости, в которой ([2]) имеет место

$$\frac{d(k_1-k_2)}{dt} = -\frac{a_0}{H_2^2}\frac{H_1}{c_1}, \tag{22}$$

причем $H_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2$, и вдоль волны BB_1, обозначая через $\tilde{s}$ длину ее дуги, отсчитываемую от B, можно с учетом (14) записать $\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{s}} = \frac{\partial \theta}{\partial x}\left(\sin\zeta_0 + \frac{\Delta_x}{\Delta_y}\cos\zeta_0\right)$, где ζ_0 угол нормали к BB_1 с Ox, $\cos\zeta_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, откуда $\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial\theta}{\partial\tilde{s}}\frac{\Delta_y\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha\Delta_x+\beta\Delta_y}$.

Поскольку $\frac{\partial\theta}{\partial\tilde{s}} = \frac{1}{H_2}$, из (22), (20) можно получить равенство

$$\frac{\Delta_{xx}\Delta_y^2 - 2\Delta_{xy}\Delta_x\Delta_y + \Delta_{yy}\Delta_x^2}{(\alpha\Delta_x+\beta\Delta_y)^2}(\alpha^2+\beta^2) = a_0H_1,\ H_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Для движущейся жидкости [2] $\Delta = V_x\alpha + V_y\beta + a_0\sqrt{\alpha^2+\beta^2} - 1$, откуда вдоль волны $\Delta = 0$ получается справедливость (20).

В однородной сжимаемой первоначально неподвижной жидкости уравнения в окрестности точки B найдены в [6], в неоднородной жидкости — в [7]. В первоначально движущейся жидкости одномерные по τ уравнения приведены в [8, 9], двумерные и трехмерные уравнения в [10, 9]. В электропроводящей однородной жидкости в плоской задаче уравнения вблизи B найдены в [11], а в произвольной среде в [2]. Упрощенные уравнения в однородной среде могут быть получены также в окрестности особой точки A рис. 2, где кривизна волны в ли-

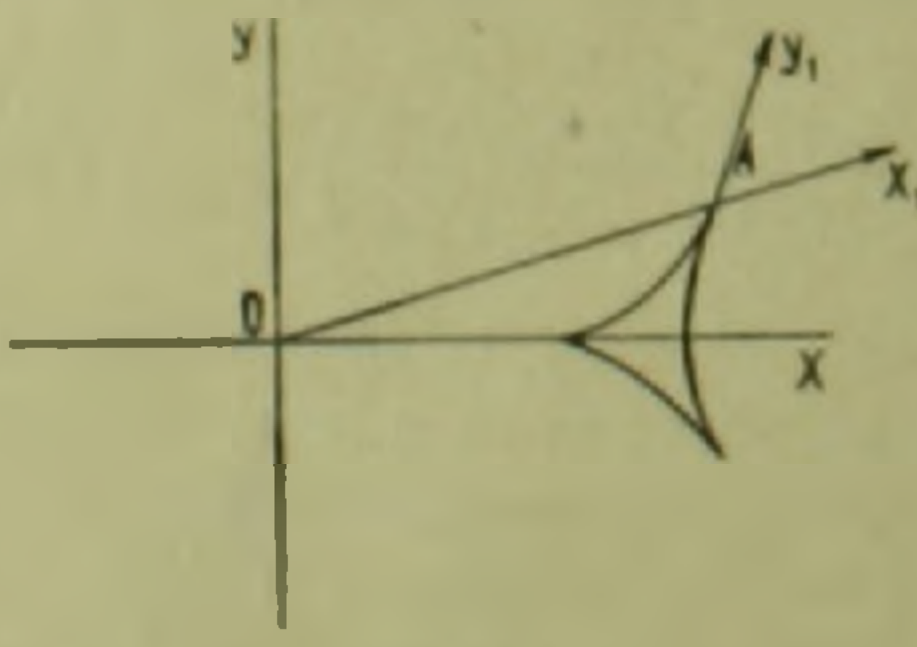

Рис. 2.

нейной задаче бесконечна и соответственно кривизна кривой $\beta(\alpha)$ равна нулю, причем линейное решение определяется переменными [11]

$$x_1 = \alpha_0 x + \beta_0 y - t,\ y_1 = \frac{x+\beta_0' y}{t^{\frac{1}{3}}}K,\ K = \left(\frac{2}{\beta_0''}\right)^{\frac{1}{3}}(\beta_0 - \alpha_0\beta_0')^{\frac{1}{3}}. \tag{23}$$

Здесь $\beta(\alpha)$ есть уравнение нормалей к волне, $\Delta(\alpha, \beta, -1) = 0$, начало координат x_1, y находится в точке O (рис. 2) возникновения волны, а значение z_0 в A дается равенством $\beta'(z_0) = 0$.

Вводя операторы p, q, s и учитывая, что линейное решение вблизи A имеет вид ([11]) $p = \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}\Phi(x_1, y_1)$, то есть $\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{1}{3}\frac{P}{t}$, можно получить из (23)

$$p = z_0\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{K}{t^{\frac{1}{3}}}\frac{\partial}{\partial y_1}, \quad q = \beta_0\frac{\partial}{\partial x_1} + \beta_0'\frac{K}{t^{\frac{1}{3}}}\frac{\partial}{\partial y_1},$$

$$s = -\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{3}\frac{y_1}{t}\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{1}{3t} \tag{24}$$

и упрощенное нелинейное уравнение получится из (10) в виде

$$y_1\frac{\partial^3 P}{\partial y_1\partial x_1^2} + \frac{\partial^3 P}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 P}{\partial y_1^3} = -\frac{3t}{(\beta - z\beta')\Delta_0}\frac{\partial^3}{\partial x_1^3}\left(A_{ij}k_j P\frac{\partial P}{\partial x_1}\right), \tag{25}$$

где в правой части можно подставить (19).

Уравнение (25) приводит к уравнению работы ([2]) в задаче об окрестности точки A (рис. 2) для медленной магнитозвуковой волны и годится для определения окрестности точки A с бесконечной кривизной волны в произвольной среде.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

Միջավայրի ոչ գծային հավասարումների տեսքի որոշումը հարվածային ալիքների միացման կետի շրջակայքում

Դիտարկվում է անգծելի միջավայրի շարժման պարամետրերի որոշման խնդիրը կամայական տեսքի AB ալիքի և կետային BB_1 ալիքի հատման կետի մոտ։ Օգտագործելով AB ալիքի հավասարումը գծային խնդրում ստացված են ոչ գծային խարակտերիստիկի դիֆերենցիալ հավասարումը և միջավայրի շարժման պարզեցված ոչ գծային հավասարումները։ Նույն հավասարումների այլ ձևը ստացված է ոչ գծային ակուստիկայի չափի վերացման մեթոդով և կատարված է ստացված հավասարումների համեմատությունը։

Ստացված են նաև պարզեցված ոչ գծային հավասարումները դանդաղ մագնիտաձայնային ալիքի եզակի կետերի շրջակայքում, որոնք ընդհանրացված են կամայական միջավայրի մեջ եզակի կետ ունեցող ալիքի համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Г. Багдоев.* „Известия АН Арм ССР", т. XXII, Механика, № 5 (1969). [2] *А. Г. Багдоев.* „Известия АН Арм ССР", Механика, т. XXIV, № 1, 1971. [3] *А. Г. Багдоев*, ДАН Арм ССР. т. L, № 4 (1970). [4] *A. Jeffrey, T. Tanuiti*, Non-linear wave propagation New York, 1964. [5] *Р. Курант*, Уравнения, с частными производными, М., Мир, 1965. [6] *О. С. Рыжов, С. А. Христианович*, ПММ, т. 22, № 5 (1958). [7] *А. Г. Багдоев*, Ученые записки Ереванского университета, т. 107, № 1, 1968. [8] *J. P. Guiraud*, Comptes Rendus, t. 258, 1964. [9] *О. С. Рыжов*, ПМТФ, № 2, 1961. [10] *Г. М. Шефтер*, ПММ, т. 33, № 1, 1969. [11] *А. Г. Багдоев*, „Известия АН Арм ССР", т. XXIII, Механика, № 2 (1970).