ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LII 1971 4

УДК 513—83

МАТЕМАТИКА

Э. А. Мирзаханян

Бесконечномерные гомотопические группы единичной сферы гильбертова пространства

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 14/I 1971)

В этой заметке рассматриваются бесконечномерные гомотопические группы *компактного типа*, т. е. группы, определяемые так же, как в заметке [1] были определены группы $\Pi_q^s(X, x_0)$, но основанные на рассмотрении таких сфероидов $f: H \to X$ множества $X \subseteq H$ в точке $x_0 \in X$, что для каждой отличной от x_0 точки $x \in X$ прообраз $f^{-1}(x)$ компактен и на этом прообразе терминальная производная отображения $T_s^{-q} \circ f$ (при $q \leqslant 0$) или, соответственно, отображения $f \circ S_s^q$ (при $q > 0$) положительна. Здесь через S_s^q, T_s^q, $q \geqslant 0$ обозначены линейные операторы в гильбертовом пространстве H с нормой 1, задаваемые в ортонормированном базисе $s = \{e_1, e_2, \cdots, e_n \cdots\}$ формулами; $S_s^q(e_i) = 0$ при $i = 1, 2, \cdots q$ и $S_s^q(e_{i+q}) = e_i$ при $i = 1, 2, \cdots$, а $T_s^q(e_i) = e_{i+q}$, $i = 1, 2, \cdots$ Аналогичные требования компактности предъявляются и к гомотопиям. Эти группы будут обозначаться через $\Pi_q^c(X, x_0)$ (базис s предполагается фиксированным и потому в обозначении группы не указывается).

Целью заметки является полное вычисление гомотопической группы $\Pi_q^c(X, x_0)$ в случае, когда $X = S_l$ есть сфера дефекта l в гильбертовом пространстве H, т. е. единичная сфера в плоскости дефекта $l-1$. Именно, мы покажем, что, как было намечено в заметке [2], справедлива следующая

Теорема. *Группа $\Pi_q^c(X, x_0)$ изоморфна стабилизировавшейся группе индекса $l-q$ конечномерных сфер, т. е. группе $\pi_{n+l-q}(S^n)$ при больших n.*

Расхождение в одну единицу по сравнению с формулировкой заметки [2] объясняется лишь различием в обозначениях (здесь сфероиды определены как отображения $f: H \to H$ всего пространства H, т. е. подпространства дефекта *нуль*, в то время как там сфероидами назывались отображения $f: P \to X$, где P—многогранник дефекта один).

Тем не менее, сформулированная здесь теорема *не является* следствием теоремы, указанной в заметке ([2]), несмотря на сходство формулировок. Объясняется это тем, что класс отображений K (см. ([3]) не удовлетворяет третьему требованию, наложенному на класс отображений в заметке ([2]).

Наметим идею доказательства сформулированной теоремы. При этом мы ограничимся случаем $q \leqslant 0$ (при $q > 0$ рассуждения аналогичны).

Каждый рассматриваемый сфероид имеет вид $f: H \to H$, где $f(H) \subset S_l$, $f(H \setminus \Sigma) = x_0$, где Σ—единичный шар пространства H, т. е. $\Sigma = \{x \in H: \|x\| \leqslant 1\}$ и $f = S_{\mathfrak{s}}^{-q} \circ \varphi$, причем $\varphi \in K$ (мы сохраняем обозначения, принятые в заметке ([1])). Пусть b — произвольная точка множества $S_l \setminus \{x_0\}$. Тогда множество $M = f^{-1}(b)$ компактно, и потому к множеству M и отображению φ применимо предложение 2 заметки ([4]). Выберем L, U, h, как указано в этом предложении; мы можем при этом предполагать, что L есть плоскость, натянутая на первые n векторов базиса $\mathfrak{s}$ и что плоскость $S_{\mathfrak{s}}^{-q}(L)$ (натянутая на первые $n+q$ векторов базиса $\mathfrak{s}$) пересекается с внутренностью единичного шара Σ. Для любой конечномерной плоскости $L^* \supset L$, содержащей точку $T_{\mathfrak{s}}^{-q}(b)$, мы определим отображение

$$\varphi^*: (\overline{U} \cap L^*) \to S_l \cap S_{\mathfrak{s}}^{-q}(L^*), \tag{1}$$

положив $\varphi^*(a) = S_{\mathfrak{s}}^{-q}(\varphi(E_{a,h}(L^*)) \cap L^*)$, где $E_{a,h}(L^*)$ — шар радиуса h с центром a, ортогональный подпространству L^*. Иначе говоря, $E_{a,h}(L^*)$ есть множество всех точек $x \in H$, удовлетворяющих условиям $x - a \perp L^*$ и $\|x - a\| \leqslant h$. Легко видеть (в силу предложения 2 заметки ([4])), что справедливо также равенство $\varphi^*(a) = f(E_{a,h}(L^*)) \cap S_{\mathfrak{s}}^{-q}(L^*)$. Если число n (определяющее плоскость L) достаточно велико, то граница открытого множества $U \cap L^*$ (расположенного в плоскости L^*) переходит при отображении φ^* в множество, не содержащее точки b (ср. предложение 3 заметки ([4])).

Обозначим теперь через Q_b настолько малую окрестность точки b в сфере $S^* = S_l \cap S_{\mathfrak{s}}^{-q}(L^*)$, что она не содержит образа границы множества $U \cap L^*$ при отображении φ^*. Далее, через $\omega: Q_b \to S^*$ обозначим отображение, растягивающее Q_b на всю сферу S^* (и переводящее всю границу множества $Q_b \subset S^*$ в одну точку $y_0 \in S^*$). Это отображение ω мы можем продолжить в отображение ω сферы S^* на себя, положив $\omega(S^* \setminus Q_b) = y_0$.

Теперь мы имеем возможность рассмотреть отображение $f^* = \omega \circ \varphi^*: (\overline{U} \cap L^*) \to S^*$, переводящее границу открытого множества $U \cap L^*$ в точку y_0. Положив $f^*((\Sigma \cap L^*) \setminus (\overline{U} \cap L^*)) = y_0$, мы получаем непрерывное отображение $f^*: \Sigma \cap L^* \to S^*$, определяющее некоторый элемент $\xi(b, L^*)$ гомотопической группы $\pi_k(S^*)$, где $k = \dim L^*$ (от выбора окрестности U элемент $\xi(b, L^*)$ не зависит.)

Основным инструментом при завершении доказательства теоремы служит теперь следующая

Лемма. *Если* $L^{**} \supset L^{*}$ и $\dim L^{**} = 1 + \dim L^{*}$, *то* $\xi(h, L^{**}) = E(\xi(h, L^{*}))$, где $E: \pi_k(S^{*}) \to \pi_{k+1}(S^{**})$ — *гомоморфизм надстройки Фрейденталя* ([5]) (здесь через S^{**} обозначена сфера $S_l \cap S_c^{*}(L^{**})$, имеющая на единицу большую размерность, чем S^{*} т. е. $S^{**} = ES^{*}$).

Эта лемма доказывается при помощи деформации, которая каждое множество $\varphi(E_{n,k}(L^{**}))$, представляющее собой „искривленный шар", трансверсальный к плоскости L^{**}, превращает в шар, ортогональный этой плоскости. Эта деформация, производимая над отображением φ в окрестности U, приводит к деформации отображения φ^{**} (ср. (1)), а потому и отображения $f^{**} = \omega \circ \varphi^{**}$ в результате чего мы и получаем требуемую связь с надстройкой Фрейденталя.

После доказательства леммы заключительная часть доказательства теоремы проводится стандартными методами теории гомотопий.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Է. Ա. ՄԻՐԶԱԽԱՆՅԱՆ

Հիլբերտյան տարածության միավոր սֆերայի անվերջ չափանի հոմոտոպիկ խմբեր

Հոդվածում դիտարկվում են անվերջ չափանի կոմպակտային տիպի $\Pi_q^c(X, x_0)$ հոմոտոպիկ խմբերը, որոնք կառուցվում են ճիշտ այնպես, ինչպես կառուցվում են $\Pi_q^c(X, x_0)$ խմբերը ([1]), բայց հիմնված են X բազմության x_0 կետում այնպիսի $f: H \to X$ սֆերոիդների դիտարկման վրա, որոնց համար $X \setminus \{x_0\}$ բազմության յուրաքանչյուր x կետի $f^{-1}(x)$ լրիվ նախապատկերը կոմպակտ է և այդ նախապատկերի վրա $T_q^{*} \circ f$ $(q \leq 0)$ արտապատկերման կամ համապատասխանաբար $f \circ S_q^c$ $(q > 0)$ արտապատկերման թերմինալ ածանցյալը խիստ դրական է։ Հոդվածում լրիվ հաշվվում են $\Pi_q^c(X, x_0)$ հոմոտոպիկ խմբերը, երբ $X = S_l$ բազմությունը հանդիսանում է Հիլբերտյան տարածության l դեֆեկտի սֆերա, այսինքն $l-1$ դեֆեկտի հարթության միավոր սֆերա։ Հոդվածի հիմնական նպատակը կայանում է հետևյալ թեորեմի ապացույցի մեջ.

Թեորեմ. l — դեֆեկտի S_l սֆերայի q ինդեքսի $\Pi_q^c(S_l, x_0)$ հոմոտոպիկ խումբը իզոմորֆ է վերջավոր չափանի սֆերաների $l-q$ ինդեքսի կայունացված խմբին, այսինքն $\pi_{n+l-q}(S^n)$ խմբին մեծ n-երի դեպքում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Э. А. Мирзаханян*, ДАН Арм. ССР, LI, № 5 (1970). [2] *Э. А. Мирзаханян*, ДАН Арм. ССР, том XLIII, № 1 (1966). [3] *В. Г. Болтянский*, ДАН Арм. ССР, LI, № 3 (1970). [4] *В. Г. Болтянский, Э. А. Мирзаханян*, ДАН Арм. ССР, LI, № 4, (1970). [5] *Ху Сы-Цзян*, Теория гомотопий, Изд. «Мир», М., 1964.