ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LII 1971 3

МЕХАНИКА

УДК 530.1

Академик АН Армянской ССР А. Г. Назаров

Трансфинитная числовая прямая

(Представлено 30/XII 1970)

Трансфинитные числовые прямые можно строить различными способами. Здесь мы рассмотрим некоторые варианты построения таких прямых. Основой для этого служат наши предыдущие работы ([1,2]).

1. *Простейшая трансфинитная числовая прямая*. Принимаем за основу дедекиндовскую числовую прямую без ее несобственных точек $+\infty$ и $-\infty$. Припишем мысленно к этой прямой бесконечно удаленные области как в сторону положительного, так и отрицательного направлений. Ввиду симметрии ограничимся рассмотрением правой стороны числовой прямой. Пусть выбран отрезок, длина которого принята за единицу. Мысленно откладываем вправо вдоль прямой такой отрезок, бесконечное множество раз. Вначале получим точки $x = 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$ отвечающие натуральному ряду. Неограниченно откладывая точки, получим трансфинитные точки $x = \omega - k$, $x = \omega - k + 1$, $x = \omega$, $x = \omega + 1, \cdots$ $x = \omega^2$ и т. д. Этот процесс продолжим неограниченно. Полусегменты $[\omega - k, \omega - k + 1), \cdots [\omega - 1, \omega)$ и т. д. считаем заполненными точками точно так же, как и полусегменты $[0, 1)$, $[1, 2)$ и т. д.

В результате получим простейшую трансфинитную числовую прямую с бесконечно удаленными областями вправо и влево от начала отсчета. Начало отсчета может быть перенесено на любое конечное или бесконечное большое расстояние, измеряемое трансфинитными числами. Нетрудно убедиться, что теория сечений Дедекинда с разбиением чисел на два класса полностью сохраняется для рассматриваемой трансфинитной числовой прямой и для ее бесконечно удаленных частей.

2. *Трансфинитная числовая прямая на основе* ε. Построим теперь новую трансфинитную числовую прямую на основе только что определенной путем следующего преобразования

$$x' = \varepsilon x = \frac{x}{\omega}. \tag{1}$$

Тогда полусегмент $[0, 1)$ преобразится в полусегмент $[0, \varepsilon)$. Величина длины этого полусегмента есть нуль, хотя он и состоит из множества трансфинитных точек, равномощного со множеством действительных чисел полусегмента $[0, 1)$, т. е. обладает мощностью континуум. Это непосредственно вытекает из преобразования (1). Аналогично полусегменты $[1, 2)$, $[2, 3), \cdots [n, n+1)$ преобразуются в $[\varepsilon, 2\varepsilon)$, $[2\varepsilon, 3\varepsilon)$, $[n\varepsilon, (n+1)\varepsilon)$ и т. д., величина длины которых также нуль.

Полусегмент $[(\omega-1), \omega)$ преобразуется согласно (1) в полусегмент $[1-\varepsilon, 1)$. Все полученные полусегменты, величины длин которых нуль, образуют полусегмент $[0, 1)$, являющийся результатом преобразования полусегмента $[0, \omega)$ бесконечно большой величины с помощью выражения (1). Аналогично полусегменты $[0, 2\omega)$, $[0, 3\omega)$ $[0, n\omega)$ переходят при рассматриваемом преобразовании в $[0, 2)$ $[0, 3), \cdots [0, n)$. Полусегменты $[0, \omega^2), \cdots [0, \omega^n)$, $[0, \omega^{\omega})$ перейдут в полусегменты $[0, \omega), \cdots [0, \omega^{n-1})$, $[0, \omega^{\omega-1})$ и т. д.

Если в первом примере трансфинитной числовой прямой за единицу измерения был принят отрезок длиною 1, то во втором примере за единицу измерения принят отрезок длины ε, величина которой есть нуль. Поскольку трансфинитные прямые неограничены, то обе рассмотренные прямые тождественны. Разница заключается лишь в том, что вторая трансфинитная прямая получится из первой путем подразделения каждого единичного промежутка на ω частей.

3. *Трансфинитные числовые прямые на основе ε^n или $\varepsilon^{\varphi(\omega)}$.* Применяя n раз преобразование (1) мы из простейшей трансфинитной прямой получим трансфинитную прямую с делениями ε^n. Того же результата достигнем, если каждый единичный промежуток простейшей трансфинитной прямой подразделим на ω^n частей. Можно пойти дальше и вместо натурального n рассмотреть какое-либо трансфинитное натуральное число $\varphi(\omega)$ и подразделить каждый единичный отрезок на $\omega^{\varphi(\omega)}$ частей. В результате получим на числовой прямой примыкающие друг к другу полусегменты типа $[0, \varepsilon^{\varphi(\omega)})$; $[\varepsilon^{\varphi(\omega)}, 2\varepsilon^{\varphi(\omega)})$ и т. д. Величины длин их равны нулю и они состоят из трансфинитных точек мощности континуум, поскольку имеет место взаимно-однозначное соответствие между точками полусегментов $[0, \varepsilon^{\varphi(\omega)})$ и $[0,1)$ определяемое преобразованием

$$x' = x \cdot \varepsilon^{\varphi(\omega)}. \tag{2}$$

4. *Трансфинитная числовая прямая на основе ε_{ω}.* Здесь ε_{ω} есть трансфинитный предел исчезающей последовательности, n-ый член который есть $n^{c}\varepsilon_{n}$. Откладывая нулевой отрезок длины ε_{ω} вдоль числовой прямой, мы получим точки ε_{ω}, $2\varepsilon_{\omega}, \cdots n\varepsilon_{\omega}, \cdots \omega\varepsilon_{\omega}$ и т. д. Таким путем получим трансфинитную числовую прямую, отличающуюся от предыдущих ценою деления. Цены деления числовых прямых на основах ε и ε_{ω} различаются между собою в отношении $\varepsilon_{\omega}/\varepsilon$.

Если сопоставить между собою все полученные трансфинитные прямые, то убедимся, что достаточно рассмотреть лишь простейшую трансфинитную прямую и наносить трансфинитные метки, скажем, через τ, τ^n, ε_ω и т. д. в зависимости от нашего желания.

Теория сечений Дедекинда с разбиением чисел на два класса полностью сохраняется и для трансфинитной числовой прямой как в конечной ее части, так и в ее бесконечно удаленных частях. При этом сечение может попасть на действительное или трансфинитное число, что безразлично. Из изложенного ясно, что любой отрезок трансфинитной числовой прямой имеет мощность континуум.

В дальнейшем трансфинитной числовой прямой чаще всего будем пользоваться следующим способом. В требуемых фиксированных действительных точках $x = a_i$, $i = 1, 2, \cdots n$ будем рассматривать трансфинитные нулевые окрестности на основах $\varepsilon^{(i)}$:

$$x = a_i + k\,\varepsilon^{(i)},$$

где k — переменное действительное число, непрерывно пробегающее все значения от $-N$ до $+N$, где N любое, сколь угодно большое, но фиксированное число, а $\varepsilon^{(i)}$ положительные бесконечно малые числа, отвечающие исчезающим последовательностям, n-ый член которых $n^{\nu}\varepsilon_n^{(i)}$.

Символика для сегмента, полусегмента и интервала на трансфинитной числовой прямой такая же, как и для классической. Например, мы уже рассматривали выше полусегмент $[\tau, 2\tau)$, представляющий собой бесконечно малый отрезок, или полусегмент $[0, \omega^n)$, имеющий длину бесконечно большой величины.

Под длиной сегмента $[A, B]$, концы которого совпадают с точками $x = A$, $x = B$, причем $A < B$ будем понимать $(B - A)$. При этом возможны три случая:

$$\operatorname{mag}(B - A) = 0, \quad \operatorname{mag}(B - A) = a,$$

где a — действительное число, $\operatorname{mag}(B - A) = \infty$.

В первом случае будем говорить о (A, B), как об отрезке бесконечно малой длины, во втором случае, как об отрезке конечной длины, и, наконец, в третьем случае, как об отрезке бесконечно большой длины.

Итак, на трансфинитной числовой прямой можно рассматривать бесконечно малые, конечные и бесконечно большие отрезки. Аксиома Архимеда сохраняет свою силу и для трансфинитной числовой прямой. *Необходимо лишь натуральный ряд, являющийся скелетом для классической числовой прямой, заменить трансфинитным натуральным рядом, являющимся скелетом трансфинитной числовой прямой.*

Для трансфинитной числовой прямой попарному сравнению могут подлежать следующие типы отрезков:

1) бесконечно малый отрезок с бесконечно малым отрезком;

2) бесконечно малый отрезок с конечным отрезком;

3) бесконечно малый отрезок с бесконечно большим отрезком;

4) конечный отрезок с конечным отрезком;

5) конечный отрезок с бесконечно большим отрезком;

6) бесконечно большой отрезок с бесконечно большим отрезком.

Во всех шести случаях первый отрезок меньшей длины, чем последующий. В классическом анализе мы имеем дело лишь с четвертым случаем. Теперь аксиома Архимеда для трансфинитной числовой прямой получит следующую формулировку: *всегда можно подобрать такое натуральное число n или трансфинитное натуральное число $\varphi(\omega)$, что повторив меньший отрезок n или $\varphi(\omega)$ раз получим отрезок, превышающий по длине больший.*

Этой аксиомой узаконивается проблема измерения трансфинитных отрезков. По существу она уже была положена в основу построения трансфинитных числовых прямых.

В дальнейшем, если не будет оговорено особо, будем пользоваться простейшей трансфинитной числовой прямой, которую будем просто называть трансфинитной числовой прямой. По ходу работы, как уже указывалось, мы в различных нужных местах можем делать различные трансфинитные метки. К такому приему мы уже прибегли в работе ([2]).

Остановимся теперь на лемме о вложенных промежутках, играющих важную роль в анализе.

Пусть дана монотонно возрастающая последовательность $n\ a_n$ и монотонно убывающая последовательность $n\ b_n$, причем всегда

$$a_n < b_n.$$

Если разность $b_n - a_n$ стремится к нулю, то обе последовательности имеют общий конечный предел

$$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

С точки зрения трансфинитной мы имеем в общем случае

$$a_{\varphi(\omega)} \to c \leftarrow b_{\varphi(\omega)},$$

где $\varphi(\omega)$ — по-прежнему любое натуральное трансфинитное число, причем

$$\operatorname{mag} a_{\varphi(\omega)} = \operatorname{mag} b_{\varphi(\omega)} = c.$$

Итак, мы получим бесконечно малый отрезок

$$b_{\varphi(\omega)} - a_{\varphi(\omega)},$$

заключающий в себе только одно действительное число c и множество трансфинитных чисел мощности континуум, но величины которых также есть c.

Множество это можно построить, например, следующим образом Рассмотрим монотонно возрастающую последовательность

$$A_n = c - k(c - a_n)$$

и монотонно убывающую последовательность

$$B_n = c - k(b_n - c).$$

Здесь k непрерывно пробегает все свои значения в сегменте [0, 1]. Тогда трансфинитные члены последовательностей будут иметь вид:

$$A_{\varphi(\omega)} = c - k(c - a_{\varphi(\omega)}),$$

$$B_{\varphi(\omega)} = c + k(b_{\varphi(\omega)} - c). \qquad (*)$$

С ростом натурального трансфинитного числа $\varphi(\omega)$ бесконечно малый отрезок

$$b_{\varphi(\omega)} - a_{\varphi(\omega)}$$

неограниченно стягивается, причем последующий бесконечно малый сегмент расположен внутри предыдущего бесконечно малого сегмента и так неограниченно. Члены $a_{\varphi(\omega)}$ и $b_{\varphi(\omega)}$ с ростом $\varphi(\omega)$ *никогда* не достигают действительного числа c, находящегося в промежутке между ними, хотя они по величине *в точности равны* c. Из выражения (*) видно, что при любом $\varphi(\omega)$ множество трансфинитных точек имеет мощность континуум. В частности, при трансфинитном пределе $\varphi(\omega) = \omega$ последними членами последовательности будут a_ω и b_ω (²), а бесконечно малый сегмент примет застывшую длину, величина которой

$$\text{mag}\,(b_\omega - a_\omega) = \lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Таким образом, лемма о вложенных отрезках сохраняется и для трансфинитной прямой, претерпевая своеобразную модификацию, заключающуюся в том, что мы имеем дело с отрезками бесконечно малой длины, содержащими множество точек мощности континуум и лишь одну действительную точку.

В заключение следует подчеркнуть, что отрезки бесконечно малой длины, отрезки бесконечно большой длины при рассмотрении физических проблем имеют ту же размерность, что и конечный отрезок. Рассмотрим, для примера, отрезок $[0, \varepsilon]$. Если повторить его ω раз, где ω — отвлеченное (безразмерное) число, то получим отрезок [0, 1]. Поэтому размерности отрезков $[0, \varepsilon]$ и [0, 1] одинаковы, хотя величина длины $[0, \varepsilon]$ равна нулю.

Трансфинитные числовые прямые пока рассматриваем как некоторые фикции, полезные для прикладных целей.

Ордена Трудового Красного Знамени Институт
геофизики и инженерной сейсмологии
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ

Տրանսֆինիտային թվային ուղիղ

Տրվում է տրանսֆինիտային ուղղի կառուցումը, որը կլասիկ ուղիղ գծից տարբերվում է նրանով, որ ոչ սեփական երկու կետերի՝ $+\infty$-ի ու $-\infty$ փոխարեն պարունակում է անվերջ հեռու տիրույթներ, որոնք բնութագրվում են անվերջ մեծ թվերով (տրանսֆինիտային իրական թվեր, որոնք ունեն անվերջ արժեքներ)։ Մտցվում է տրանսֆինիտային իմաստով հատվածի երկարության գաղափարը, որից բխում է անվերջ փոքր, վերջավոր և անվերջ մեծ հատվածների գաղափարը։ Տրանսֆինիտային թվային ուղղի համար մտցվում է Արքիմեդի աքսիոմը՝ տրանսֆինիտային շարքի հիման վրա։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Г. Назаров.* ДАН Армянской ССР, LI, № 3 (1970). [2] *А. Г. Назаров.* ДАН Армянской ССР, LI, № 5 (1970).