

УДК 539.3

Р. Л. Эфнаджян

Равномерно растянутая круглая пластинка с прямолинейной щелью,
 перпендикулярной радиусу

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 8/XII 1970)

Рассматривается плоская задача теории упругости круговой области, ограниченной окружностью L_1 и ослабленной разрезом, перпендикулярным к радиусу. Предполагается, что по внешнему контуру действуют равномерно-распределенные нормальные напряжения интенсивностью P (рис. 1), а кромки разреза свободны от внешних напряжений.

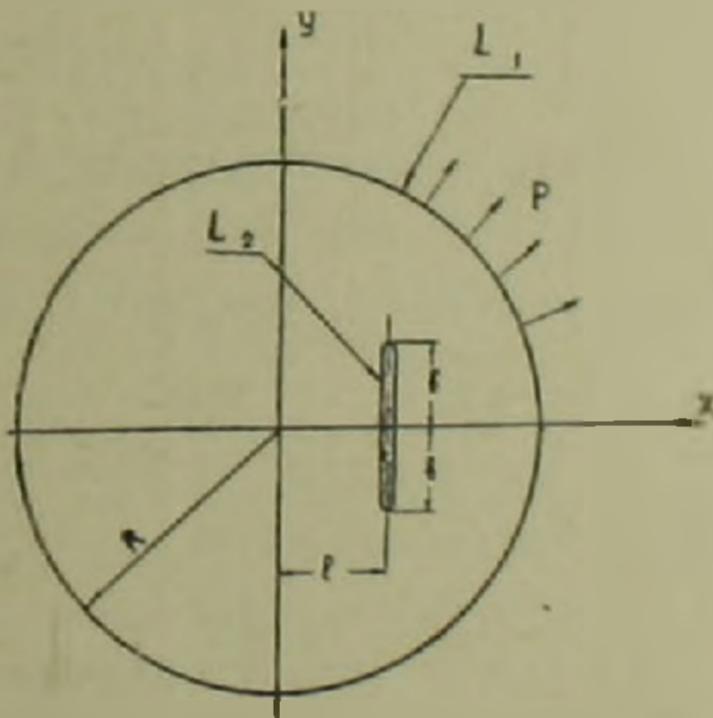


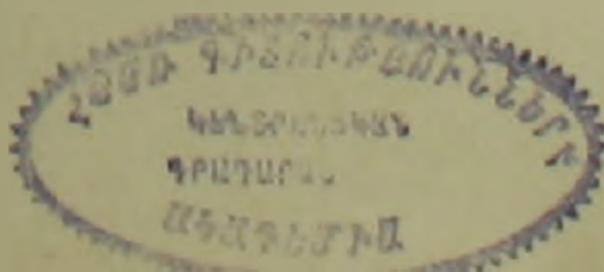
Рис. 1.

Решение приводится к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. Доказывается квази-вполне регулярность этих бесконечных систем.

1. Решение данной задачи сводится к определению голоморфных в рассматриваемой области функций $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ из граничных условий ⁽¹⁾.

$$\varphi_1(t) + t \overline{\varphi_1(t)} + \overline{\psi_1(t)} = Pt + C \quad \text{на } L_1, \quad (1.1)$$

$$\varphi_1(t) + t \overline{\varphi_1(t)} + \overline{\psi_1(t)} = 0 \quad \text{на } L_2. \quad (1.2)$$



Пользуясь методом Д. Н. Шермана ⁽²⁾ на круговом контуре L_1 , введем вспомогательную неизвестную функцию $\omega(t)$ по условию

$$\varphi_1(t) - t \overline{\varphi_1(t)} - \overline{\psi_1(t)} = 2\omega(t) \text{ на } L_1. \quad (1.3)$$

Для установления формул перехода от функции $\omega(t)$ к функциям $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ складывая (1.1) и (1.3) получаем:

$$\varphi_1(z) - \lim_{\substack{z \rightarrow t \\ \text{изнутри}}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t) dt}{t-z} - \frac{Pt+C}{2} = - \lim_{\substack{z \rightarrow t \\ \text{извне}}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t) dt}{t-z}. \quad (1.4)$$

Введем, далее, функцию $\varepsilon(z)$, голоморфную во внешности L_2

$$\varphi_1(z) = \begin{cases} \varphi_1(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t) dt}{t-z} - \frac{Pz+C}{2} & \text{внутри } L_1 \\ -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t) dt}{t-z} & \text{вне } L_2. \end{cases} \quad (1.5)$$

Из (1.1) и (1.3) имеем:

$$\begin{aligned} \psi_1(t) + \lim_{\substack{z \rightarrow t \\ \text{изнутри}}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\overline{\omega(t)} + t \overline{\omega'(t)}}{t-z} dt - \\ - \frac{\overline{c}}{2} = \lim_{\substack{z \rightarrow t \\ \text{извне}}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\overline{\omega(t)} + t \overline{\omega'(t)}}{t-z} dt. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Аналогичным образом вводим голоморфную вне L_2 функцию $\psi(z)$

$$\psi(z) = \begin{cases} \psi_1(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\overline{\omega(t)} + t \overline{\omega'(t)}}{t-z} dt - \frac{\overline{c}}{2} & \text{внутри } L_1 \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\overline{\omega(t)} + t \overline{\omega'(t)}}{t-z} dt & \text{вне } L_1 \end{cases} \quad (1.7)$$

Функцию $\omega(t)$ на окружности L_1 радиуса R будем искать в виде

$$\omega(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{t}{R}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{R}{t}\right)^k, \quad (1.8)$$

где a_k и b_k действительные числа.

Учитывая (1.8), из (1.5) и (1.7) получаем:

$$\varepsilon(z) = \varphi_1(z) - a_0 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{z}{R}\right)^k - \frac{Pz+C}{2},$$

$$\psi(z) = \psi_1(z) + \bar{a}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{z}{R}\right)^k + \sum_{k=2}^{\infty} k a_k \left(\frac{z}{R}\right)^{k-2} - \frac{\bar{c}}{2}. \quad (1.9)$$

Примем $a_0 = 0$, так как оно не влияет на граничные условия (1.1) и (1.2).

Подставляя (1.9) в граничное условие (1.2), имеем:

$$\begin{aligned} \varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = & -Pt - C + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{\bar{t}}{R}\right)^k - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{t}{R}\right)^k - t \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \frac{\bar{t}^{k-1}}{R^k} + \sum_{k=2}^{\infty} k a_k \left(\frac{\bar{t}}{R}\right)^{k-2}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Определение $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ сводится к граничной задаче для односвязной области, представляющей внешность контура L_2 . Для решения этой вспомогательной задачи будем рассматривать прямолинейную щель как предельный случай эллипса. Отообразим внешность эллипса на внешность единичной окружности посредством известной функции

$$z = A \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right) + e, \quad (1.11)$$

где $A = \frac{a+b}{2}$, $m = \frac{a-b}{a+b}$ (a и b полуоси эллипса) при $m = -i$ эллипс обращается в прямолинейную щель. Подставляя (1.11) при $\zeta = \sigma = e^{i\theta}$ в (1.10) после несложных преобразований получаем:

$$\varphi^*(\sigma) + \frac{1}{\sigma} \frac{\sigma^2 + m}{1 - m\sigma^2} \overline{\varphi^{*'}(\sigma)} + \frac{e}{A(1 - m\sigma^2)} \overline{\varphi^{*'}(\sigma)} + \overline{\psi^*(\sigma)} = f(\sigma). \quad (1.12)$$

Пользуясь известным методом Н. И. Muskhelishvili решения плоской задачи для бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием, получаем выражения для функций $\varphi^*(\zeta)$ и $\psi^*(\zeta)$ и постоянной C . Подставляя значения $\varphi^*(\zeta)$ и $\psi^*(\zeta)$ в граничное условие (1.12) и устремляя m к минус единице убеждаемся, что последнее удовлетворяется тождественно. Выражения $\varphi^*(\zeta)$ и $\psi^*(\zeta)$ при $m = -1$, после некоторых преобразований имеют вид:

$$\varphi^*(\zeta) = PA \frac{1}{\zeta} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\zeta}\right)^n A_n, \quad (1.13)$$

$$\psi^*(\zeta) = -PA \frac{1}{\zeta} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\zeta}\right)^n B_n - \frac{A \left(\frac{1}{\zeta} - \zeta_0\right) + e}{A \left(1 + \frac{1}{\zeta^2}\right)} \varphi^{*'}(\zeta). \quad (1.14)$$

Выражения A и B не приводятся ввиду их громоздкости.

2. Полученные представления функций $\varphi^1(\zeta)$ и $\varphi^2(\zeta)$ содержат неизвестные коэффициенты a_k и b_k , для определения которых обратимся к уравнениям, вытекающим из (1.1), (1.3), (1.8) и (1.9) на контуре:

$$\psi(t) = - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{R}{t}\right)^k - a_1 \frac{R}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \left(\frac{R}{t}\right)^{k+2}, \quad (2.1)$$

$$\bar{\varphi}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{R}{t}\right)^k. \quad (2.2)$$

В (1.13) и (1.14) заменим ζ на z согласно (1.11) по формуле

$$\zeta = \frac{z-e}{2A} + \sqrt{\left(\frac{z-e}{2A}\right)^2 + 1}, \quad (2.3)$$

в которой бесконечно удаленной точке плоскости z соответствует бесконечно удаленная точка плоскости ζ . Подставляя (2.3) в выражение (1.14) и устремив z к граничной точке контура L_{II} и учитывая, что

$$\varphi'(z) = \frac{\varphi^{*'}(\zeta)}{A \left(1 + \frac{1}{\zeta^2}\right)}$$

после преобразований получаем:

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k t^{-k} + (t - 2e) \varphi'(t). \quad (2.4)$$

Подставляя (2.3) в (1.13) получаем:

$$\bar{\varphi}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} S_k t^{-k}. \quad (2.5)$$

Из (2.2) и (2.5) имеем уравнение, из которого, после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях t , получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$b_k = \sum_{v=1}^k A_v a_{v,k}^1 + d_k, \quad (2.6)$$

$$a_{v,k}^1 = \left(\frac{b}{R}\right)^v \sum_{m=0}^{\frac{k-v}{2} - \frac{1}{2}} (-1)^{v+m+1} K_v^m \frac{e^{k-v-2m} b^{2m}}{R^{k-v}} C_{k-1}^{v+2m-1}, \quad (2.7)$$

$$d_k = PA \frac{b}{R} \sum_{m=0}^{\frac{k-1}{2} - \frac{1}{2}} (-1)^m \frac{e^{k-1-2m} b^{2m}}{R^{k-1}} C_{k-1}^{2m} K_1^m, \quad (2.8)$$

$$K_\nu^m = \frac{1}{(\nu + m)! 2^{m+\nu}} \sum_{n=1}^{\nu} (-1)^{\frac{n-1}{2}} C_\nu^n n!! \left[\left(\nu + m - \frac{n+1}{2} \right) 2 - 1 \right] !!, \quad (2.9)$$

В верхнем пределе суммы (2.7) при k и ν одинаковой четности $\frac{1}{2}$ не учесть. В верхнем пределе при k четном $\frac{1}{2}$ не учесть. Звездочка (здесь и в последующем) у символов сумм указывает, что индекс n при переходе к смежному значению увеличивается на 2. Из (2.1), (2.4) с учетом (2.2) получаем вторую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} -D_1 + b_1 &= 2a_1, & k=1 \\ -D_2 - \frac{2e}{R} b_1 + 2b_2 &= a_2, & k=2 \\ -D_k - \frac{2e}{R} (k-1) b_{k-1} + k b_k + (k-2) b_{k-2} &= a_k, & k \geq 3 \end{aligned} \quad (2.10)$$

где

$$D_k = \sum_{i=1}^k B_i \alpha_{i,k}^2 - d_k.$$

3. Решение задачи сводится к определению неизвестных коэффициентов a_k и b_k из бесконечных систем (2.6) и (2.10). Подставляя значение b_k , b_{k-1} и b_{k-2} из (2.6) в (2.10) можем доказать квази-вполне регулярность вновь полученной системы и системы (2.6) (*) при

$$\frac{b}{R} < \frac{1}{2} \text{ и } \frac{l}{R} < \frac{1}{2}.$$

Поведение напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} в окрестности концов прямоугольной щели $S = y \pm b$ (S расстояние рассматриваемой точки до концов трещины) при приближении к ним могут быть представлены так

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{N}{\sqrt{S}} + G_1(0), \\ \sigma_y &= \frac{N}{\sqrt{S}} + G_2(0), \\ \tau_{xy} &= \frac{N_1}{\sqrt{S}} + G_3(0), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $G_1(0)$, $G_2(0)$ и $G_3(0)$ при $y = \pm b$ ограниченные величины, причем

$$N = \sqrt{AP} \left[1 - \frac{1}{2AP} \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{\frac{v+1}{2}} (A_v + B_v) \right],$$

$$N_1 = \sqrt{AP} \begin{cases} \frac{1}{2AP} \sum_{v=2}^{\infty} v (-1)^{\frac{v+2}{2}} (A_v + B_v) & y = +b \\ -\frac{1}{2AP} \sum_{v=2}^{\infty} v (-1)^{\frac{v+2}{2}} (A_v + B_v) & y = -b \end{cases}$$

Ереванский политехнический институт

Ռ. Լ. ԷՆՏԻԱԶՅԱՆ

Ուղղահայաց ճեղքով կլոր սալի հավասարաչափ ձգումը

Դիտվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդիր, շրջանային տիրույթի համար: Տիրույթը սահմանափակված է շրջանագծով թուլացրած շառավիղին ուղղահայաց կտրվածքով: Ընթացում է, որ արտաքին պարագծով ազդում են հավասարաչափ բաշխված նորմալ լարումներ ինտենսիվությամբ (նկ 1), իսկ կտրվածքի եզրերը ազատ են արտաքին լարումներից:

Լուծումը բերվում է հանրահաշվական գծային հավասարումների անվերսիստեմների և կայացուցվում է այդ անվերջ սիստեմների կվադրիրիվ ռեզոլյուտությունը:

ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Վ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, М., 1966. ² Д. И. Шерман, Прикл. мат. и мех., т. XV, вып. 3 (1951), 3Л, 8. Конторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, М., 1952.