ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LII 1971 3

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

Р. С. Минасян

О стационарном температурном поле в некоторых криволинейных звездообразных телах

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 16/XII 1970)

В работе дается эффективное решение задачи плоского установившегося течении тепла в некоторых цилиндрических телах, поперечное сечение которых представляет звездообразную двусвязную область, когда на границе области задано распределение температуры, а внутри тела имеются источники тепла. Задачи подобного рода встречаются при определении температурного поля в элементах теплообменников, змеевиках и т. п.

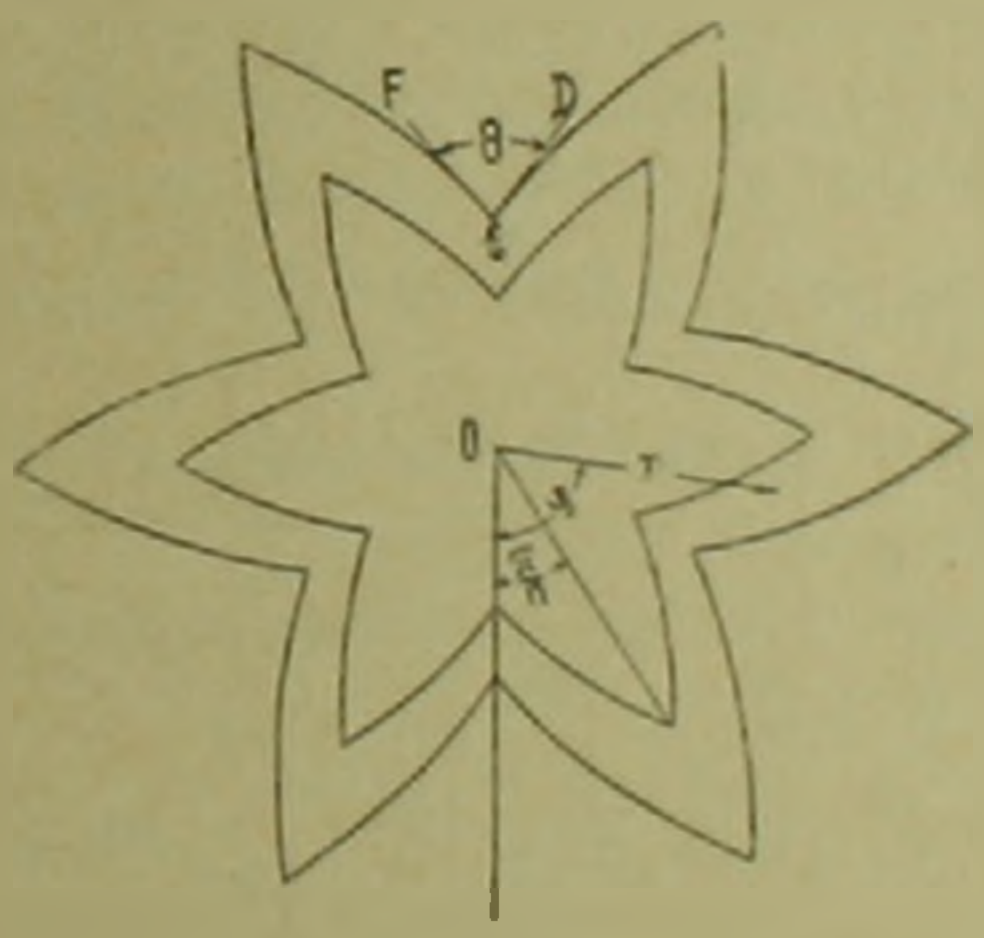

Рис. 1

Пусть имеем цилиндрическое тело (рис. 1), ограниченное поверхностями

$$r = R_1 e^{\omega\left(\varphi - \frac{2\mu\pi}{n}\right)}; \quad r = R_2 e^{\omega\left(\varphi - \frac{2\mu\pi}{n}\right)} \quad \text{при} \quad \frac{2\mu\pi}{n} \leqslant \varphi \leqslant \frac{(2\mu+1)\pi}{n}$$

и

$$r = R_1 e^{\omega\left(2\pi\frac{\mu+1}{n} - \varphi\right)}; \quad r = R_2 e^{\omega\left(2\pi\frac{\mu+1}{n} - \varphi\right)}$$

$$\text{при} \quad \frac{(2\mu+1)\pi}{n} \leqslant \varphi \leqslant \frac{2(\mu+1)\pi}{n}.$$

Здесь $\omega = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$; θ — угол между касательными ED и EF; n — число вершин; $\mu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Функция распределения температуры $U(r, \varphi)$ уловлетворяет уравнению ([1])

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -\frac{1}{\lambda}\omega(r, \varphi), \tag{1}$$

где λ — коэффициент теплопроводности, $\omega(r, \varphi)$ — интенсивность тепловыделения, и граничным условиям

$$U\left(R_1 e^{\omega\left(\varphi - \frac{2\mu\pi}{n}\right)}, \varphi\right) = T_0(\varphi);$$

$$U\left(R_2 e^{\omega\left(\varphi - \frac{2\mu\pi}{n}\right)}, \varphi\right) = T_1(\varphi), \quad \left(\frac{2\mu\pi}{n} \leqslant \varphi \leqslant \frac{(2\mu+1)\pi}{n}\right); \tag{2}$$

$$U\left(R_1 e^{\omega\left(\frac{2\pi(\mu+1)}{n} - \varphi\right)}, \varphi\right) = T_0(\varphi);$$

$$U\left(R_2 e^{\omega\left(\frac{2\pi(\mu+1)}{n} - \varphi\right)}, \varphi\right) = T_1(\varphi), \quad \left(\frac{(2\mu+1)\pi}{n} \leqslant \varphi \leqslant \frac{2(\mu+1)\pi}{n}\right).$$

Предполагаем, что функции $T_0(\varphi)$ и $T_1(\varphi)$ непрерывны и почти всюду на $(0, 2\pi)$ обладают производной с ограниченной вариацией, а $\omega(r, \varphi)$ удовлетворяет условиям Дирихле. Кроме того, предполагаем, что $U(r, \varphi)$ — периодическая относительно φ функция с периодом $\frac{2\pi}{n}$: $U\left(r, \varphi + \frac{2\pi}{n}\right) = U(r, \varphi)$. Вследствие периодичности достаточно рассмотреть $U(r, \varphi)$ при $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{2\pi}{n}$, причем должны выполняться условия

$$U(r, 0) = U\left(r, \frac{2\pi}{n}\right); \left.\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = \left.\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\frac{2\pi}{n}}. \tag{3}$$

Прежде, чем переходить к построению решения, преобразуем систему координат, обозначив

$$re^{-\omega\varphi} = R_1 e^{\sqrt{1+\omega^2}\xi}, \quad \varphi = \eta. \tag{4}$$

Тогда новые неизвестные функции

$$U_1(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\left|U(R_1 e^{\sqrt{1+\omega^2}\xi + \omega\eta}, \eta) - U\left(R_1 e^{\sqrt{1+\omega^2}\xi + \omega\left(\frac{2\pi}{n} - \eta\right)}, \frac{2\pi}{n} - \eta\right)\right|; \tag{5}$$

$$U_2(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\left|U(R_1 e^{\sqrt{1+\omega^2}\xi + \omega\eta}, \eta) + U\left(R_1 e^{\sqrt{1+\omega^2}\xi + \omega\left(\frac{2\pi}{n} - \eta\right)}, \frac{2\pi}{n} - \eta\right)\right|$$

в области $0<\xi<\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\ln\frac{R_2}{R_1}$: $0<\eta<\frac{\pi}{n}$ удовлетворяют уравнению с неразделяющимися переменными

$$\frac{\partial^2 U_l}{\partial \xi^2}-2\alpha\frac{\partial^2 U_l}{\partial \xi\,\partial\tau_l}+\frac{\partial^2 U_l}{\partial \tau_l^2}=-\frac{1}{\lambda}w_l(\xi,\ \eta),\ (l=1;\ 2) \qquad (6)$$

и граничным условиям

$$U_l(0,\ \tau_l)=T_0^{(l)}(\tau_l);\quad U_l(d,\ \tau_l)=T_1^{(l)}(\tau_l);\quad U_1(\xi,\ 0)=U_1(\xi,\ b)=0;$$

$$\left|\frac{\partial U_2}{\partial \tau_1}-\alpha\frac{\partial U_2}{\partial \xi}\right|_{\tau_1=0}=\left|\frac{\partial U_2}{\partial \tau_1}-\alpha\frac{\partial U_2}{\partial \xi}\right|_{\tau_1=b}=0. \qquad (7)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\alpha=\frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}};\quad w_l(\xi,\ \tau_l)=\frac{R_1^2}{2}e^{2\sqrt{1+\omega^2}\,\xi}\Big[\ e^{2\omega\tau_l}w(R_1e^{\sqrt{1+\omega^2}\,\xi+\omega\tau_l},\ \tau_l)+$$

$$+(-1)^l e^{2\omega\left(\frac{2\pi}{n}-\tau_l\right)}w\left(R_1e^{\omega\left(\frac{2\pi}{n}-\tau_l\right)+\sqrt{1+\omega^2}\,\xi},\ \frac{2\pi}{n}-\tau_l\right)\Big|;$$

$$b=\frac{\pi}{n};\quad d=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\ln\frac{R_2}{R_1};\quad T_0^{(l)}(\tau_l)=\frac{1}{2}\Big[\ T_0(\tau_l)+(-1)^l T_0\left(\frac{2\pi}{n}-\tau_l\right)\Big|;$$

$$T_1^{(l)}(\tau_l)=\frac{1}{2}\Big|\ T_1(\tau_l)+(-1)^l T_1\left(\frac{2\pi}{n}-\tau_l\right)\Big|. \qquad (8)$$

Поступая далее так же, как ранее ([2]), будем искать функции $U_1(\xi,\ \tau_l)$ и $U_2(\xi,\ \tau_l)$ одновременно в виде двух разложений в ряд

$$U_l(\xi,\ \tau_l)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k^{(l)}(\tau_l)\sin\gamma_k\xi=\frac{g_0^{(l)}(\tau_l)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}g_k^{(l)}(\tau_l)\cos\gamma_k\xi,\ (l=1;\ 2) \qquad (9)$$

где

$$\gamma_k=\frac{k\pi}{d};\quad f_k^{(l)}(\tau_l)=\frac{2}{d}\int_0^d U_l(\xi,\ \tau_l)\sin\gamma_k\xi\,d\xi;$$

$$g_k^{(l)}(\tau_l)=\frac{2}{d}\int_0^d U_l(\xi,\ \tau_l)\cos\gamma_k\xi\,d\xi.$$

Для определения $f_k^{(l)}(\tau_l)$ и $g_k^{(l)}(\tau_l)$ умножим уравнение (6) поочередно на $\frac{2}{d}\sin\gamma_k\xi\,d\xi$; $\frac{2}{d}\cos\gamma_k\xi\,d\xi$ и проинтегрируем от 0 до d. Принимая во внимание (7), будем иметь:

$$f_k^{(l)\prime\prime}(\tau_l)+2\alpha\gamma_k g_k^{(l)\prime}(\tau_l)-\gamma_k^2 f_k^{(l)}(\tau_l)=-\frac{2}{d}\left|\frac{1}{\lambda}\int_0^d w_l(\xi,\ \eta)\sin\gamma_k\xi\,d\xi+\right.$$

$$+ \gamma_k \left[T_1^{(1)}(\eta) - (-1)^k T_1^{(1)}(\eta)\right] \Big\} = -\frac{2}{d} P_k^{(1)}(\eta); \qquad (10)$$

$$g_k^{(1)'}(\eta) - 2\alpha\gamma_k f_k^{(1)'}(\eta) - \gamma_k^2 g_k^{(1)}(\eta) = -\frac{2}{d}\left\{\frac{1}{\lambda}\int_0^d w_1(\xi, \eta)\cos\gamma_k\xi\, d\xi + \right.$$

$$\left. + 2\alpha\left[T_0^{(1)}(\eta) - (-1)^k T_1^{(1)}(\eta)\right] - T_2^{(1)}(\eta) + (-1)^k T_3^{(1)}(\eta)\right\} = -\frac{2}{d} Q_k^{(1)}(\eta).$$

Здесь обозначено

$$T_2^{(1)}(\eta) = \left.\frac{\partial U_1}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}; \quad T_3^{(1)}(\eta) = \left.\frac{\partial U_1}{\partial \xi}\right|_{\xi=d}. \qquad (11)$$

Граничные условия для $f_k^{(1)}(\eta)$ и $g_k^{(1)}(\eta)$, согласно (7), будут:

$$f_k^{(1)}(0) = f_k^{(1)}(b) = g_k^{(1)}(0) = g_k^{(1)}(b) = 0;$$

$$f_k^{(2)'}(0) + \alpha\gamma_k g_k^{(2)}(0) = f_k^{(2)'}(b) + \alpha\gamma_k g_k^{(2)}(b) = 0;$$

$$g_k^{(2)'}(0) - \alpha\gamma_k f_k^{(2)}(0) = -\frac{2\alpha}{d}\left[T_0^{(2)}(0) - (-1)^k T_1^{(2)}(0)\right]; \qquad (12)$$

$$g_k^{(2)'}(b) - \alpha\gamma_k f_k^{(2)}(b) = -\frac{2\alpha}{d}\left[T_0^{(2)}(b) - (-1)^k T_1^{(2)}(b)\right].$$

Решая уравнения (10) и удовлетворяя условиям (12), для $f_k^{(1)}(\eta)$ и $g_k^{(1)}(\eta)$ получаем следующие выражения:

$$f_k^{(1)}(\eta) = \frac{2}{\nu\gamma_k d \operatorname{sh}\nu\gamma_k b}\left\{\operatorname{sh}\nu\gamma_k(b-\eta)\int_0^\eta \left[P_k^{(1)}(\eta_1)\cos\alpha\gamma_k(\eta-\eta_1) - \right.\right.$$

$$\left. - Q_k^{(1)}(\eta_1)\sin\alpha\gamma_k(\eta-\eta_1)\right]\operatorname{sh}\nu\gamma_k\eta_1\, d\eta_1 + \operatorname{sh}\nu\gamma_k\eta\int_\eta^b \left[P_k^{(1)}(\eta_1)\cos\alpha\gamma_k(\eta_1-\eta) + \right.$$

$$\left.\left. + Q_k^{(1)}(\eta_1)\sin\alpha\gamma_k(\eta_1-\eta)\right]\operatorname{sh}\nu\gamma_k(b-\eta_1)\, d\eta_1\right\}; \qquad (13)$$

$$g_k^{(1)}(\eta) = \frac{2}{\nu\gamma_k d \operatorname{sh}\nu\gamma_k b}\left\{\operatorname{sh}\nu\gamma_k(b-\eta)\int_0^\eta \left[P_k^{(1)}(\eta_1)\sin\alpha\gamma_k(\eta-\eta_1) + \right.\right.$$

$$\left. + Q_k^{(1)}(\eta_1)\cos\alpha\gamma_k(\eta-\eta_1)\right]\operatorname{sh}\nu\gamma_k\eta_1\, d\eta_1 - \operatorname{sh}\nu\gamma_k\eta\int_\eta^b \left[P_k^{(1)}(\eta_1)\sin\alpha\gamma_k(\eta_1-\eta) - \right.$$

$$\left.\left. - Q_k^{(1)}(\eta_1)\cos\alpha\gamma_k(\eta_1-\eta)\right]\operatorname{sh}\nu\gamma_k(b-\eta_1)\, d\eta_1\right\};$$

$$g_0^{(1)}(\eta) = \frac{2}{d}\left|\left(1-\frac{\eta}{b}\right)\int_0^{\eta} Q_0^{(1)}(\tau_0)\,\tau_0 d\tau_0 + \eta\int_{\eta}^{b} Q_0^{(1)}(\tau_0)\left(1-\frac{\tau_0}{b}\right)d\tau_0\right|.$$

Здесь обозначено $\nu = \sqrt{1-\alpha^2}$. Аналогично для $f_k^{(2)}(\tau_i)$ и $g_k^{(2)}(\tau_i)$ имеем

$$f_k^{(2)}(\tau_i) = \frac{2}{\nu\gamma_k d \operatorname{sh}\nu\gamma_k b}\left\{\operatorname{ch}\nu\gamma_k(b-\tau_i)\left|\int_0^{\tau_i}(P_k^{(2)}(\tau_0)\cos\alpha\gamma_k(\tau_i-\tau_0)-\right.\right.$$

$$-Q_k^{(2)}(\tau_0)\sin\alpha\gamma_k(\tau_i-\tau_0))\operatorname{ch}\nu\gamma_k\tau_0 d\tau_0 - \alpha\left(T_0^{(2)}(0)-(-1)^k T_1^{(2)}(0)\right)\sin\alpha\gamma_k\tau_i\Bigg| +$$

$$+\operatorname{ch}\nu\gamma_k\tau_i\left|\int_{\tau_i}^{b}(P_k^{(2)}(\tau_i)\cos\alpha\gamma_k(\tau_0-\tau_i)-Q_k^{(2)}(\tau_0)\sin\alpha\gamma_k(\tau_0-\tau_i))\operatorname{ch}\nu\gamma_k(b-\tau_0)d\tau_0-\right.$$

$$\left.\left.-\alpha\left(T_0^{(2)}(b)-(-1)^k T_1^{(2)}(b)\right)\sin\alpha\gamma_k(b-\tau_i)\right|\right\},$$

$$g_k^{(2)}(\tau_i) = \frac{2}{\nu\gamma_k d\operatorname{sh}\nu\gamma_k b}\left\{\operatorname{ch}\nu\gamma_k(b-\eta)\left|\int_0^{\eta}(P_k^{(1)}(\tau_0)\sin\alpha\gamma_k(\tau_i-\tau_0)+\right.\right.$$

$$+Q_k^{(2)}(\tau_0)\cos\alpha\gamma_k(\tau_i-\tau_0))\operatorname{ch}\nu\gamma_k\tau_0 d\tau_0+\alpha\left(T_0^{(2)}(0)-(-1)^k T_1^{(2)}(0)\right)\cos\alpha\gamma_k\tau_i\Bigg| -$$

$$-\operatorname{ch}\nu\gamma_k\eta\left|\int_{\eta}^{b}(P_k^{(2)}(\tau_0)\sin\alpha\gamma_k(\tau_0-\tau_i)-Q_k^{(2)}(\tau_0)\cos\alpha\gamma_k(\tau_0-\tau_i))\operatorname{ch}\nu\gamma_k(b-\tau_0)d\tau_0+\right.$$

$$\left.\left.+\alpha\left(T_0^{(2)}(b)-(-1)^k T_1^{(2)}(b)\right)\cos\alpha\gamma_k(b-\tau_i)\right|\right\}; \qquad (14)$$

$$g_0^{(2)}(\tau_i) = C_0 - \frac{2}{d}\int_0^{\tau_i}\left|(\tau_i-\tau_0)\right|\frac{1}{\lambda}\int_0^{d}\varpi_2(\xi,\tau_0)\,d\xi - T_2^{(2)}(\tau_0)+T_3^{(2)}(\tau_0)+$$

$$+\alpha\left(T_0^{(2)'}(\tau_0)-T_1^{(2)'}(\tau_0)\right)\Big| + \alpha\left[T_0^{(2)}(\tau_0)-T_1^{(2)}(\tau_0)\right]\Big| d\tau_0,$$

где C_0 — постоянная, которая определится в дальнейшем. При этом должно выполняться следующее условие:

$$\int_0^{b}\left|T_2^{(2)}(\tau_i)-T_3^{(2)}(\tau_i)-\alpha\left(T_0^{(2)'}(\tau_i)-T_1^{(2)'}(\tau_i)\right)-\frac{1}{\lambda}\int_0^{d}\varpi_2(\xi,\tau_i)\,d\xi\right| d\tau_i = 0. \qquad (15)$$

В выражения (13) и (14) входят неизвестные значения $T_2^{(1)}(\tau_l)$, $T_3^{(1)}(\tau_l)$, $T_2^{(2)}(\tau_l)$ и $T_3^{(2)}(\tau_l)$. Для их определения потребуем выполнения первой группы граничных условий (7) вторым из представлений (9) функций $U_l(\xi, \tau_l)$:

$$\frac{g_0^{(l)}(\tau_l)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k^{(l)}(\tau_l) = T_0^{(l)}(\eta); \quad \frac{g_0^{(l)}(\tau_l)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k g_k^{(l)}(\tau_l) = T_1^{(l)}(\tau_l). \quad (16)$$

Рассмотрим сначала случай, когда $l = 1$. Умножим оба соотношения (16) на $\frac{2}{b}\sin \delta_j \tau_l d\tau_l$, где $\delta_j = \frac{j\pi}{b}$, и проинтегрируем от 0 до b.

Замечая, что ряды в (16) сходятся равномерно при $0 \leqslant \tau_l \leqslant b$, вследствие чего возможна перестановка знаков суммы и интеграла, а также учитывая (10) и (12), для коэффициентов Фурье функций $T_2^{(1)}(\tau_l)$ и $T_3^{(1)}(\tau_l)$ получаем

$$B_j^{(s)} = -4\alpha\nu\delta_j^3 \frac{\operatorname{ch} \nu\delta_j d - (-1)^s \cos \alpha\delta_j d}{d \operatorname{sh} \nu\delta_j d} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{k+s}]\, N_k^{(l)}}{(\gamma_k^2 + \delta_j^2)^2 - 4\alpha^2\gamma_k^2\delta_j^2} + p_j^{(s)}. \quad (17)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$B_j^{(s)} = 2\delta_j \int_0^b |T_2^{(1)}(\tau_l) - (-1)^s T_3^{(1)}(\tau_l)| \sin \delta_j \tau_l d\tau_l;$$

$$N_k^{(s)} = \gamma_k d\, |f_k^{(1)'}(0) - (-1)^s f_k^{(1)'}(b)|;$$

$$p_j^{(s)} = -\frac{2\delta_j}{\operatorname{sh} \nu\delta_j d} \left\{ [\operatorname{ch} \nu\delta_j d - (-1)^s \cos \alpha\delta_j d] \int_0^b |T_0^{(1)'}(\tau_l) + (-1)^s T_1^{(1)'}(\tau_l)| \times \right. \quad (18)$$

$$\times \cos \delta_j \tau_l d\tau_l - [\alpha \operatorname{sh} \nu\delta_j d + (-1)^s \nu \sin \alpha\delta_j d] \int_0^b |T_0^{(1)'}(\tau_l) - (-1)^s T_1^{(1)'}(\tau_l)| \times$$

$$\times \sin \delta_j \tau_l d\tau_l - \frac{1}{\lambda} \int_0^b \int_0^d w_1'(\xi, \tau_l) |\sin \delta_j (\tau_l + \alpha\xi) \operatorname{sh} \nu\delta_j (d - \xi) +$$

$$\left. + (-1)^s \sin \delta_j (\tau_l - \alpha d - \alpha\xi) \operatorname{sh} \nu\delta_j \xi| \, d\xi \, d\tau_l \right\}.$$

В свою очередь, $N_k^{(s)}$, согласно (13) и (18), выразятся посредством $B_j^{(s)}$ из следующей системы:

$$N_k^{(s)} = -4\alpha\nu\gamma_k^3 \frac{\operatorname{ch} \nu\gamma_k b - (-1)^s \cos \alpha\gamma_k b}{b \operatorname{sh} \nu\gamma_k b} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{|1 + (-1)^{l+s}|\, B_l^{(k)}}{(\gamma_k^2 + \delta_l^2)^2 - 4\alpha^2\gamma_k^2\delta_l^2} + \tau_k^{(s)}, \quad (19)$$

где

$$\ldots = \frac{2\gamma_k}{\operatorname{sh} \nu\gamma_k b}\left\{\int_0^b [T_0^{(1)}(\eta_i) - (-1)^k T_1^{(1)}(\eta_i)]\,[\alpha \sin \alpha\gamma_k\eta_i \operatorname{sh} \nu\gamma_k(b-\eta_i) + \right.$$

$$+ \nu \cos \alpha\gamma_k\eta_i \operatorname{ch} \nu\gamma_k(b-\eta_i) - (-1)^s(\alpha \sin \alpha\gamma_k(b-\eta_i) \operatorname{sh} \nu\gamma_k\eta_i -$$

$$- \nu \cos \alpha\gamma_k(b-\eta_i) \operatorname{ch} \nu\gamma_k\eta_i)]\,d\eta_i + \frac{1}{\lambda}\int_0^b\int_\delta^d w_1(\xi, \eta)\,[\sin \gamma_k(\alpha\eta_i + \xi) \operatorname{sh} \nu\gamma_k(b-\eta_i) -$$

$$\left. - (-1)^s \sin \gamma_k(\alpha b - \alpha\eta_i - \xi) \operatorname{sh} \nu\gamma_k\eta_i]\,d\xi\,d\eta_i\right\}. \qquad (20)$$

Таким образом, для определения неизвестных $B_j^{(1)}$ и $N_k^{(1)}$ получили совокупность двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (17) и (19). Займемся исследованием полученных систем. Определим вначале суммы модулей коэффициентов в каждом из уравнений. Сумма модулей коэффициентов в j-м уравнении системы (17) равна

$$\sigma_j^{(1)} = |\alpha|\left|1 - (-1)^s \frac{\nu \sin \alpha\delta_j d}{\alpha \operatorname{sh} \nu\delta_j d} - \right.$$

$$\left. - 2\nu \frac{1 + (-1)^s}{\delta_j d}\left(\operatorname{cth} \nu\delta_j d - \frac{\cos \alpha\delta_j d}{\operatorname{sh} \nu\delta_j d}\right)\right|. \qquad (21)$$

Аналогичные значения получаются и для суммы модулей коэффициентов системы (19). Второе слагаемое в выражении (21) убывает с экспоненциальной быстротой и, начиная с некоторого j, s_j, вследствие неравенства $|\alpha| < 1$, становится меньше 1. Заметим, что при $|\alpha| < \frac{2}{\sqrt{5}}$ суммы модулей коэффициентов систем (17) и (19) строго меньше единицы для всех j и k и при любых отношениях $\frac{d}{b}$, т. е. системы вполне регулярны. Свободные члены $p_j^{(1)}$ и $q_k^{(1)}$, как легко видеть из (18) и (20), ограничены в своей совокупности. Из теории бесконечных систем ([3]) следует единственность ограниченного решения систем (17) и (19) и сходимость методов последовательных приближений.

Рассмотрим далее случай $l = 2$. Умножим соотношения (16) на $\frac{2}{b}\cos \delta_j \eta_i\, d\eta_i$ и проинтегрируем от 0 до b. Поступая аналогично предыдущему, получаем

$$A_j^{(2)} = -2\alpha\delta_j \frac{\operatorname{ch} \nu\delta_j d - (-1)^s \cos \alpha\delta_j d}{d \operatorname{sh} \nu\delta_j d} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|1 + (-1)^{k+s}|(\delta_j^2 - \gamma_k^2)M_k^{(2)}}{(\gamma_k^2 + \delta_j^2)^2 - 4\alpha^2\gamma_k^2\delta_j^2} + q_j^{(2)}; \qquad (22)$$

$$M_k^{(s)} = -2\alpha\gamma_k \frac{\operatorname{ch}\nu\gamma_k b - (-1)^s \cos\alpha\gamma_k b}{b \operatorname{sh}\nu\gamma_k b}\left\{\frac{1+(-1)^s}{2\gamma_k^2} A_0^{(s)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[1+(-1)^{j+s}](\gamma_k^2 - \delta_j^2) A_j^{(s)}}{(\gamma_k^2+\delta_j^2)^2 - 4\alpha^2\gamma_k^2\delta_j^2}\right\} + \zeta_k^{(s)},$$

где введены следующие обозначения:

$$A_j^{(s)} = 2\int_0^b [T_0^{(2)}(\eta) - (-1)^s T_1^{(2)}(\eta)] \cos\delta_j \eta\, d\eta;$$

$$M_k^{(s)} = \nu\gamma_k d\,|f_0^{(2)}(0) - (-1)^s f_0^{(2)}(b)| + 2\nu[T_0^{(2)}(0) - (-1)^s T_1^{(2)}(0) -$$

$$- (-1)^s (T_0^{(2)}(b) - (-1)^s T_1^{(2)}(b))];$$

$$q_j^{(s)} = \frac{2}{\operatorname{sh}\nu\delta_j d}\left\{\frac{1}{\lambda}\int_0^b\int_0^d w_2(\xi, \eta_1)[\cos\delta_j(\eta_1+\alpha\xi)\operatorname{sh}\nu\delta_j(d-\xi) + \right.$$

$$+ (-1)^s \cos\delta_j(\eta_1 - \alpha d + \alpha\xi)\operatorname{sh}\nu\delta_j\xi]\, d\xi\, d\eta + |\alpha\operatorname{sh}\nu\delta_j d +$$

$$+ (-1)^s \nu\operatorname{sh}\alpha\delta_j d]\int_0^b [T_0^{(2)'}(\eta) - (-1)^s T_1^{(2)'}(\eta)]\cos\delta_j\eta\, d\eta + \nu[\operatorname{ch}\nu\delta_j d -$$

$$- (-1)^s \cos\alpha\delta_j d]\left|\int_0^b (T_0^{(2)'}(\eta) + (-1)^s T_1^{(2)'}(\eta))\sin\delta_j\eta\, d\eta + \right. \qquad (23$$

$$\left. + \frac{\alpha}{\delta_j d}(1+(-1)^s)(T_0^{(2)}(0) - T_1^{(2)}(0) - (-1)^j T_0^{(2)}(b) + (-1)^j T_1^{(2)}(b))\right|;$$

$$\zeta_k^{(s)} = \frac{2}{\operatorname{sh}\nu\gamma_k b}\left\{\frac{1}{\lambda}\int_0^b\int_0^d w_1(\xi, \eta)[\sin\gamma_k(\xi+\alpha\eta)\operatorname{ch}\nu\gamma_k(b-\eta) + \right.$$

$$+ (-1)^s \sin\gamma_k(\alpha b - \alpha\eta - \xi)\operatorname{ch}\nu\gamma_k\eta]\, d\xi\, d\eta + \int_0^b |T_0^{(2)'}(\eta) - (-1)^s T_1^{(2)'}(\eta)|$$

$$\times [\alpha\sin\alpha\gamma_k\eta\operatorname{ch}\nu\gamma_k(b-\eta) + \nu\cos\alpha\gamma_k\eta\operatorname{sh}\nu\gamma_k(b-\eta) +$$

$$\left. + (-1)^s(\alpha\sin\alpha\gamma_k(b-\eta)\operatorname{ch}\nu\gamma_k\eta + \nu\cos\alpha\gamma_k(b-\eta)\operatorname{sh}\nu\gamma_k\eta)]\, d\eta\right|.$$

Для $j = 0$ имеем:

$$A_0^{(1)} = 2\int_0^b \left[\frac{1}{\lambda}\int_0^d w_2(\xi,\ \eta)\, d\xi + \alpha\left(T_0^{(2)'}(\eta) - T_1^{(2)'}(\eta)\right)\right] d\eta;$$

$$A_0^{(1)} = \frac{4\alpha}{\nu d^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^k}{\gamma_k^2} M_k^{(0)} + \frac{2}{d}\int_0^b \left[\frac{1}{\lambda}\int_0^d w_2(\xi,\ \eta)(d-2\xi)\, d\xi - \right.$$

$$\left. - T_0^{(2)}(\eta) + T_1^{(2)}(\eta)\right] d\eta;$$

$$C_0 = \frac{1}{bd}\int_0^b \left[\frac{1}{\lambda}\int_0^d w_2(\xi,\ \eta)\, d\xi + 2\alpha\left(T_0^{(2)'}(\eta) - T_1^{(2)'}(\eta)\right)\right]\eta^2\, d\eta +$$

$$+ \frac{1}{\lambda bd}\int_0^b\int_0^d w_2(\xi,\ \eta)\,\xi(d-\xi)\, d\xi\, d\eta + \frac{1}{b}\int_0^b \left[T_0^{(2)}(\eta) + T_1^{(2)}(\eta)\right] d\eta - \tag{24}$$

$$- \frac{\alpha b}{d}\left[T_0^{(2)}(b) - T_1^{(2)}(b)\right] - \frac{\alpha d}{2b}\left[T_0^{(2)}(0) - T_1^{(2)}(0) - T_0^{(2)}(b) + T_1^{(2)}(b)\right] -$$

$$- \frac{1}{bd}\left[\frac{A_0^{(0)} b^2}{6} + 2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j A_j^{(0)}}{\delta_j^2} + \frac{\alpha}{\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^k}{\gamma_k^2} M_k^{(0)}\right].$$

Таким образом, для определения $A_j^{(1)}$ и $M_k^{(1)}$ получили совокупность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (22) и (24). Исследование полученных уравнений показывает, что при $|\alpha| \leqslant 0{,}9$ суммы модулей коэффициентов в каждом из уравнений (22), начиная от $k > 2$; $j > 2$, строго меньше единицы. Свободные члены $q_j^{(1)}$ и $\zeta_k^{(1)}$, как легко видеть из (23), оставаясь ограниченными в своей совокупности, стремятся к нулю с быстротой $0\left(\frac{1}{j}\right)$ и $0\left(\frac{1}{k}\right)$. Согласно теории бесконечных систем [3], совокупность систем (22) и (24) имеет единственное ограниченное решение, которое может быть получено методом последовательных приближений.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Որոշ կորագիծ աստղաձև մարմիններում ստացիոնար ջերմային դաշտի մասին

Հոդվածում դիտարկվում է երկկապ կորագիծ աստղաձև կտրվածք ունեցող գլանային մարմիններում ջերմության հարթ կայունացած հոսանքի խնդիրը։ Կոորդինատական սիստեմի ձևափոխման շնորհիվ խնդիրը բերվում է չտրոհ-

վող փոփոխականներով (6) հավասարման լուծմանը։ Լուծումը տրվում է ըստ ճոանկյունային և ցուցիչային ֆունկցիաների շարքերի միջոցով, որոնց անհայտ գործակիցները որոշվում են գծային հանրահաշվական հավասարումների լիովին ռեգուլյար անվերջ սիստեմներից։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *Г. Гребер, С. Эрк и У. Григуль.* Основы учения о теплообмене, М., ИЛ. 1958
2 *Р. С. Мнацакян.* ДАН Арм. ССР. т. XXIII. № 4. (1956) 3*Л. В. Канторович и В. И Крылов,* Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, М.—Л., 1962