ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LII 1971 3

МАТЕМАТИКА

УДК 512.25

С. Л. Амбарян

Метод определения трассы городского метрополитена

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 3/XI 1970)

Алгоритм определения суммарных пассажироперевозок на отдельных участках улично-магистральной сети города, описанный в работах [1,2], дает возможность определить также сравнительные „преимущества" и „недостатки" двух различных маршрутных схем. Хотя указанный алгоритм в общем случае не приспособлен к отысканию оптимальной схемы маршрутов, однако он достаточно хорошо справляется с подобной задачей, когда число сравниваемых вариантов невелико (для 100 вариантов необходимы примерно сутки машинного времени на ЭВМ „Раздан-3"). При определении общегородских пассажироперевозок с учетом линий метрополитена (может быть рассмотрена не полная схема метрополитена, а лишь „первая очередь") число вариантов находится в приемлемых границах. Однако выбор оптимальной схемы маршрутов путем непосредственного перебора заданного множества вариантов имеет практическое значение лишь тогда, когда „наилучший" или „близкие" к нему варианты окажутся в числе рассматриваемых. Не исключена возможность того, что „наилучший" вариант, а также „близкие" к нему, окажутся вне поля зрения исследователя.

В настоящей статье описывается метод построения линии метрополитена, „близкой" к оптимальной, который не связан с непосредственным перебором различных вариантов. При постановке задачи будем исходить из следующих допущений.

1. Разностороннее развитие города приводит к его реконструкции в транспортном отношении, так как пропускные способности улично-магистральной сети города уже „не достаточны" для перевозки сложившихся потоков (особенно в часы „пик"). Один из путей уменьшения напряженности пассажиропотоков и, в равной мере, создания лучших условий обслуживания пассажиров—это построение в данном городе метрополитена.

2. Задание некоторой схемы метрополитена вызывает дополнительные подвозящие маршруты.

3. Трасса метрополитена зависит в первую очередь от основных ха-

рактеристик узловых точек:

M_i — число всех живущих в узловой точке x_i (т. е. в области D_i);

N_i — число всех прибывающих в узловую точку x_i;

R_i — число живущих в узловой точке x_i, не участвующих в заданный промежуток времени в передвижениях (например, дети дошкольного возраста, большинство школьников и т. д.);

$\rho(x_i, x_j)^*$ — характеристика взаимного расположения узловых точек x_i и x_j, где $i, j = 1, 2, \cdots, n$.

Нам представляется, что при проектировании линий метрополитена может оказаться полезным решение следующей задачи.

Постановка задачи. Пусть на плоскости задана система A из точек $A_i(x_i^{(0)}, y_i^{(0)})$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, каждая из которых соответствует определенной узловой точке города, и множество Ω точек (x, y), принадлежащих прямоугольнику:

$$\min_i x_i^{(0)} \leqslant x \leqslant \max_i x_i^{(0)},$$

$$\min_i y_i^{(0)} \leqslant y \leqslant \max_i y_i^{(0)},$$

Не нарушая общности, можно в качестве этого прямоугольника взять прямоугольник

$$\Omega = \{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b\}.$$

Требуется так выбрать m станций метрополитена ($m \ll n$), чтобы сумма взвешенных расстояний от каждой из узловых точек до ближайшей станции была минимальной. Точнее, пусть $C \subset \Omega$ система m произвольных точек $C_1, C_2, \cdots, C_m \in \Omega$. Требуется найти такую систему $C^* = \{C_1^*, C_2^*, \cdots, C_m^*\}$, для которой:

$$\sum_{i=1}^{n} \min_{1 \leqslant j \leqslant m} \rho(A_i, C_j^*) = \min_{C \subset \Omega} \sum_{i=1}^{n} \min_{1 \leqslant j \leqslant m} \rho(A_i, C_j), \tag{1}$$

где

$$\rho(A_i, C_j) = S_i |(x_i^{(0)} - x_j)^2 + (y_i^{(0)} - y_j)^2|^{1/2};$$

$$S_i = (M_i - R_i) + N_i.$$

Найдя точки $C_1^*, C_2^*, \cdots, C_m^*$ при заданном m, мы затем проверяем — удовлетворяет ли выбранное число m дополнительному условию:

$$|f - (m \cdot p + l \cdot q)| \leqslant \lambda f, \tag{2}$$

где:

p — средняя стоимость строительства одной станции метрополитена;

---

* Здесь и в дальнейшем под $\rho(x_i, x_j)$ подразумевается расстояние или время перемещения между узлами x_i и x_j по улично-магистральной сети города.

q — средняя стоимость строительства линии метрополитена единичной длины;

f — заданный объем капиталовложений;

ε — коэффициент, выражающий допустимые пределы отклонения от заданного объема капиталовложений (например, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 0{,}1$);

l — сумма длин звеньев кратчайшей связывающей сети или кратчайшего пути (см. ниже), соединяющих станций $C_1^*, C_2^*, \cdots, C_m^*$.

Если это условие выполнено, то задача решена. В противном случае мы меняем число m некоторым образом и весь счет повторяется.

Очевидно, что сформулированная задача отыскания системы точек $C_1^*, C_2^*, \cdots, C_m^*$ является обобщением задачи Штейнера (3), заключающейся в следующем. Пусть в r-мерном евклидовом пространстве задана система A из n точек $A_i(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \cdots, x_r^{(i)})(i = 1, 2, \cdots, n)$ и некоторое выпуклое множество Ω. Требуется найти такую точку $C_1^* \in \Omega$, для которой сумма ее расстояний до всех точек системы A была бы минимальной:

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(A_i, C_1^*) = \min_{C_1 \in \Omega} \sum_{i=1}^{n} \rho(A_i, C_1). \tag{3}$$

Так как функция

$$\rho(A_i, C_1) = \left[\sum_{k=1}^{r} (x_k^{(i)} - x_k)^2 \right]^{1/2}$$

является выпуклой, а сумма выпуклых функций также выпукла, то задача Штейнера является задачей выпуклого программирования и, следовательно, может быть успешно решена, например методом наискорейшего спуска (2). В дальнейшем задачу отыскания системы точек $C_1^*, C_2^*, \cdots, C_m^*$ будем называть обобщенной задачей Штейнера.

Решение задачи. Опишем приближенный метод, при помощи которого обобщенная задача сводится к обычной задаче Штейнера. Суть этого метода заключается в отыскании в системе A набора m „наиболее разрозненных" точек этой системы (4). Приводимое ниже построение уточняет смысл этого выражения.

Рассмотрим матрицу $\|\rho(A_i, A_k)\|_{n,n}$, в которой на пересечении i-ой строки и k-ого столбца стоит число, равное $\rho(A_i, A_k)$. Пусть J — множество значений, принимаемых индексом $i = 1, 2, \cdots, n$. С помощью этой таблицы находим точки A_{i_1} и $A_{i_2} \in A$, для которых

$$\rho(A_{i_1}, A_{i_2}) = \max_{i, k \in J} \rho(A_i, A_k).$$

Если таких пар несколько, то берем какую-нибудь из них. Ищем далее точку $A_{i_3} \in A$, наиболее удаленную от множества $\{A_{i_1}, A_{i_2}\}$:

$$\rho(A_{i_3}, \{A_{i_1}, A_{i_2}\}) = \max_{\substack{i = i_1, i_2 \\ i \in J}} \rho(A_i, \{A_{i_1}, A_{i_2}\}) \leqslant \rho(A_{i_1}, A_{i_2}).$$

Поиск точки A_{i_3} осуществляется следующим способом. Из каждой пары чисел $\rho(A_i, A_{i_1})$ и $\rho(A_i, A_{i_2})$, $i = 1, 2, \cdots, n$, выбираем наи-

меньшее, и из полученных таким образом n чисел выбираем наибольшее. В качестве A_{i_2} выбираем ту точку, которой обозначена строка, содержащая выбранное наибольшее число. Аналогично, в качестве A_{i_k}: $k = 4, 5, \cdots, m$ выбираем точку, наиболее удаленную от множества $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_{k-1}}\}$. Полученные в результате точки $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_m}$ образуют искомый набор „наиболее разрозненных" m точек системы A.

С помощью набора $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_m}\}$ разобьем систему $A = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ на m непересекающихся классов

$$K_1, K_2, \cdots, K_m$$

по следующему правилу. Если для некоторого $i = 1, 2, \cdots, n$

$$\min_{1 \le k \le m} \rho(A_i, A_{i_k}) = \rho(A_i, A_{i_j}),$$

то $A_i \in K_j$. Если это равенство удовлетворяется для нескольких i_j, то выбирается любое из них.

Всякое решение обобщенной задачи Штейнера разбивает систему $A = \{A_1, A_2, \cdots A_n\}$ на такие непересекающиеся классы $K_1^*, K_2^*, \cdots, K_m^*$, для которых:

$$\min_{C \subset \Omega} \sum_{i=1}^{n} \min_{1 \le j \le m} \rho(A_i, C_j) = \sum_{j=1}^{m} \min_{C_j \in \Omega} \sum_{A_i \in K_j^*} \rho(A_i, C_j). \qquad (4)$$

Исходя из примененного нами метода разбиения, можно надеяться (конечно, в эвристическом смысле), что при замене разбиения $K_1^*, \cdots, K_m^*$ на разбиение $K_1, \cdots, K_m$ строгое равенство (4) заменится на приближенное равенство

$$\min_{C \subset \Omega} \sum_{i=1}^{n} \min_{1 \le j \le m} \rho(A_i, C_j) \approx \sum_{j=1}^{m} \min_{C_j \in \Omega} \sum_{A_i \in K_j} \rho(A_i, C_j). \qquad (5)$$

достаточно близкое к равенству (4). Таким образом, решение обобщенной задачи Штейнера свелось к поиску решений m обычных задач Штейнера

$$\min_{C_j \in \Omega} \sum_{A_i \in K_j} \rho(A_i, C_j), \; j = 1, 2, \cdots, m.$$

Решив эти задачи, мы найдем приближенное решение задачи (1), которое вновь обозначим через

$$C^* = \{C_1^*, C_2^*, \cdots, C_m^*\}.$$

Проверка условия (2). Для проверки этого условия требуется предварительно соединить точки системы $C^* = \{C_1^*, C_2^*, \cdots, C_m^*\}$ кратчайшей связывающей сетью, т. е. объединить их системой прямых

звеньев, идущих от станции к станции, и имеющих наименьшую суммарную длину. Здесь можно применить метод ([5]), хорошо приспособленный для автоматического счета. Обозначим через l длину кратчайшей связывающей сети.

Если число m станций невелико, то вместо кратчайшей связывающей сети можно соединить станции $C_1^*, C_2^*, \cdots, C_m^*$ кратчайшим путем, проходящим через все станции. Эта задача близка к задаче о коммивояжере (странствующем торговце), но без возвращения в начальный пункт. В этом случае можно применить метод „ветвей и границ" ([6]) (см. также ([7]), исходя из постановки задачи на плоскости) при условии, что искомому оптимальному объезду принадлежит дуга $(C_{j_1}^*, C_{j_2}^*)$, где $C_{j_1}^*$ и $C_{j_2}^*$ удовлетворяют условию

$$\rho(C_{j_1}^*, C_{j_2}^*) = \max_{j,k=1,2,\ldots,m} \rho(C_j^*, C_k^*).$$

Тогда длина l кратчайшего пути будет:

$$l = l_0 - \rho(C_{j_1}^*, C_{j_2}^*),$$

где l_0—найденная длина замкнутого пути коммивояжера.

Полученные таким образом сеть или путь образуют трассу метрополитена, для которой проверяется условие (2). Если оно не выполнено, то пусть

$$\Delta f = f - (m \cdot p + l \cdot q).$$

Введем условный коэффициент δ, характеризующий допустимую среднюю длину линии метрополитена на одну станцию. Рассмотрим величину z, которая удовлетворяет равенству

$$z \cdot p + \delta z q = |\Delta f|,$$

и изменим m на величину $\operatorname{sign}(\Delta f)\,[z]$. Этот процесс повторяется до тех пор, пока не будет выполнено условие (2). Чтобы избежать возможного здесь „зацикливания" алгоритма, было решено прекращать счет при том значении m, при котором $\Delta f < 0$.

Начальное значение m выбирается из того же условия (2) при некотором a'priori заданном δ.

Улучшение разбиения. Опишем в заключение процедуру, эвристически улучшающую построенное выше разбиение. Найдем центры тяжести (при условии равнораспределенной массы) каждого из уже построенных классов K_i. Исходя из набора центров тяжести, принимаемых в качестве нового набора „наиболее разрозненных" точек, проводим новое разбиение системы A, для которого вновь находим его центры тяжести. Физически очевидно, что число таких переразбиений системы A обратно пропорционально найденному числу станций, ибо при этом исходные „разрозненные" точки „перемещаются"

к местам „сгущения“ узловых точек. Остановившись на некотором разбиении, мы вновь решаем обобщенную задачу Штейнера.

Автор выражает благодарность Е. Г. Гольштейну за внимание к работе и помощь.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ս. Լ. ՀԱՄԲԱՐՅԱՆ

Քաղաքային մետրոյի երթուղիների որոշման մի մեթոդ

Աշխատանքում դիտարկվում է քաղաքային մետրոյի կայանների և երթուղիների օպտիմալ տեղաբաշխման ու ընտրման հարցը։ Կայանների տեղորոշման հարցը բերում է Շտեյների հայտնի խնդրի ընդհանրացմանը։ Երթուղիների ընտրությունը կատարվում է ամենակարճ կապակցված ցանցերի օգնությամբ։ Նկարագրվում է մոտավոր ալգորիթմ, որի միջոցով լուծվում է Շտեյների ընդհանրացված խնդիրը՝ այսինքն կայանների տեղաբաշխումը։ Երթուղիների ընտրությունից հետո հաշվի են առնվում մի քանի սահմանափակումներ՝ կապիտալ ներդրումների նկատառումներով։ Օպտիմալ լուծումը ստացվում է հաջորդական մոտարկումների կիրառմամբ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Л. Амбарян,* Экономика и математические методы, III, вып. 6, Изд «Наука», М., 1967. [2] *С. Л. Амбарян,* Сб. УЦВМ «Раздан-3» некоторые технико-эксплуатационные особенности. Изд. «Митк», Ереван, 1967. [3] *С. И. Зуховицкий, Л. И. Авдеева,* Линейное и выпуклое программирование, Изд. «Наука», М., 1967. [4] *С. И. Зуховицкий, Р. А. Поляк, М. Е. Примак,* Тезисы докладов Летней школы по математическому программированию, Дрогобыч, 1968. [5] *Р. К. Прим,* Кратчайшие связывающие сети и некоторые обобщения, Кибернетический сб. 2, Изд. Ин. лит., М., 1961. [6] *Дж. Литл, К. Мурти, Д. Суини, К. Кэрел,* Экономика и математические методы, I, вып. 1, Изд «Наука», М., 1965. [7] *T. A. J. Nicholson,* A Boundary Method for Planar Travelling Salesman Problems, Ops. Res. 19, № 4 (1968).