ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LII 1971 2

МАТЕМАТИКА

УДК 513.7

Л. Г. Пикулева

Проективное изгибание m-сопряженных систем

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 28/XII 1970)

1. В проективном пространстве P_n $(n = mp - 1 + \sigma,\ \sigma = 0, 1, \cdots, m-1)$ рассмотрим вполне фокальную псевдоконгруенцию [1] $L(m-1)$-плоскостей p_{m-1}. К каждой плоскости $p_{m-1} \subset L$ присоединим подвижной репер $\{A_u\}$ $(u = 1, \cdots, n+1)$ такого вида: точки A_i $(i = 1, \cdots, m)$ являются фокусами p_{m-1}; $\tau_{mh-1} = [A_1, \cdots, A_m] - (h-1)$ — соприкасающееся пространство L вдоль p_{m-1} $(h = 1, \cdots, p)$; (τ_{mh-1}, A_{mh+i}) — линейная оболочка τ_{mh-1} и h — соприкасающегося $(h = 1, \cdots, p-1)$ пространства в точке A_i той кривой сопряженной сети (A_i), касательная к которой не лежит в p_{m-1}; A_s $(s = mp+1, \cdots, mp+\sigma)$ — произвольные точки, линейно независимые между собой и с точками $A_1, \cdots, A_{mp}$. Уравнения инфинитезимальных перемещений репера имеют вид: $dA_u = \omega_u^v A_v$, причем формы ω_u^v удовлетворяют уравнениям структуры $P_n: d\omega_u^v = \omega_u^w \wedge \omega_w^v$ $(u, v, w = 1, \cdots, n+1)$. При указанном выборе репера и некоторой дополнительной специализации имеем:

$$\left\{\begin{aligned}
&\omega_{m(h-1)+i}^{mh+j} = 0 \quad (j \neq i,\ h = 2, \cdots, p-1),\\
&\omega_{m(h-1)+i}^{s} = 0 \quad (s = m(h+1)+1, \cdots, mp+\sigma),\\
&\omega_{m(h-1)+i}^{mh+i} = \omega^i \quad (h = 2, \cdots, p-1),\\
&\omega_{m(p-1)+i}^{s} = a_i^s \omega^i \quad (s = mp+1, \cdots, mp+\sigma),\\
&\omega_{m(h-1)+i}^{m(h-1)+j} = 0 \quad (i \neq j,\ h = 2, \cdots, p-1),\\
&\omega_{m(p-1)+i}^{m(p-1)+j} = a_i^j \omega^j,\quad \omega_i^j = b_i^j \omega^j, && (1)\\
&\left(-\omega_{m(h-1)+i}^{m(h-1)+i} + \omega_{mh+i}^{mh+i} + \omega_i^i - \omega_{m+i}^{m+i}\right) \wedge \omega^i = 0,\\
&\omega^j \wedge \left[db_i^j + b_i^j(2\omega_j^j - \omega_i^i) - \omega_{m+j}^{m+j}) - \sum_{k \neq i, j} b_i^k b_k^j \omega^k\right] + \omega^i \wedge \omega_{m+i}^j = 0,\\
&\omega^j \wedge \omega_{m(h-1)+i}^{m(h-2)+j} - \omega^i \wedge \omega_{mh+i}^{m(h-1)+j} = 0,\\
&\omega^j \wedge \omega_{m(p-1)+i}^{m(p-2)+j} - \omega^i \wedge \Big[da_i^j + a_i^j\big(\omega_{m(p-1)+j}^{m(p-1)+j} - \omega_{m(p-1)+i}^{m(p-1)+i} + \omega_i^i -
\end{aligned}\right.$$

$$
\left.-\omega_{m+i}^{m+i}) + \sum_{k \neq i,\, l} a_i^k a_k^l \omega^k \right] = 0,
$$

$$
\omega^i \wedge [da_i^s + a_i^s(\omega_s^s - \omega_{m(p-1)+i}^{m(p-1)+i} + \omega_i^i - \omega_{m+i}^{m+i})] = 0.
$$

В (1) и в дальнейшем по индексам $i, j, k = 1, \cdots, m$, если не стоит знак суммы, суммирование не производится.

Известно ([1]), что все фокальные поверхности (A_k) вполне фокальной псевдоконгруенции L являются m-сопряженными системами.

2. Рассмотрим в пространстве $\overline{P}_n$ псевдоконгруэнцию $\overline{L}(m-1)$—плоскостей $\overline{p}_{m-1}$, реперы которой специализированы также, как для L. Тогда имеют место уравнения $(\overline{1})$, полученные из (1), если над всеми буквами ω поставить черту. Соответствие $C:(A_i) \to (\overline{A}_i)$ (i-фиксировано) назовем *проективным изгибанием порядка h*, если для каждой точки A_i существует коллинеация $K: P_n \to \overline{P}_n$ такая, что поверхности $(\overline{A}_i)$ и (KA_i) имеют в точке $\overline{A}_i = CA_i$ аналитическое касание порядка h, т. е.

$$
Kd^\lambda A_i = \sum_{\mu=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\mu} \sigma_\mu d^{\lambda-\mu} \overline{A}_i \quad (\lambda = 0, 1, \cdots, h),
$$

где $\sigma_0 = 1$, σ_μ $(\mu = 1, \cdots, h)$ — некоторые формы. Коллинеацию K назовем *h—соприкасающейся* (она совмещает дифференциальные окрестности порядка h у (A_i) и $(\overline{A}_i)$).

Проективное изгибание двумерных сопряженных систем изучено в ([2]). В настоящей статье рассматривается проективное изгибание m-сопряженных систем при $m \geqslant 2$.

Имеет место следующая

Теорема 1. *Для каждой h-соприкасающейся коллинеации ($3 \leqslant h \leqslant p$, $n > 2m$), реализующей проективное изгибание порядка h, имеет место*

$$
KA_i = \overline{A}_i,\ KA_{m\lambda+i} = \overline{A}_{m\lambda+i} (\lambda = 1, \cdots, h-1),\ KA_{m\lambda+j} =
$$
$$
= \overline{A}_{m\lambda+j} \ (j \neq i,\ \lambda = 0, \cdots, h-2).
$$

3. Пусть $\sigma > 0$ и C-проективное изгибание порядка p между m-сопряженными системами V_m и $\overline{V}_m$. Тогда, используя теорему 1, для пары $(\overline{V}_m, C)$ мы получим следующую систему уравнений:

$$
\begin{cases}
\tau_{m\lambda+i}^{m\mu+i} = \tau_{m\lambda+j}^{m\mu+j} = 0 \ (\lambda = 0, \cdots, q-1;\ \mu \leqslant \lambda;\ j \neq i), \\
\tau_{m\lambda+j}^{m\mu+i} = \tau_{m\lambda+j}^{m\mu+k} = 0 \ (\lambda = 0, \cdots, q-2;\ \mu \leqslant \lambda;\ k \neq i), \\
\tau_{m(p-2)+k}^{m\lambda+i} = 0 \ (\lambda = 0, \cdots, p-1;\ k \neq i), \\
\tau_{m(p-1)+i}^{m\lambda+k} \wedge \omega^j = 0 \ (\lambda = 0, \cdots, p-1;\ k \neq j),
\end{cases} \qquad (2)
$$

$$\left|\begin{array}{l} \omega^k \wedge \tau^{m\lambda+l}_{m(p-1)+k} = 0 \ (\lambda = 0, \cdots, p-1;\ k \neq l), \\ \tau^s_{m(p-1)+l} \wedge \omega^l = 0 \ (s = mp+1, \cdots, mp+\sigma). \end{array}\right. \qquad (2)$$

Здесь $\tau^v_u = \overline{\omega}^v_u - \omega^v_u$.

Из (2) получается

Теорема 2. *Пара* $(C, (\overline{A}_l))$, *где* $C: (A_l) \to (\overline{A}_l)$ — *проективное изгибание порядка* p, $(A_l) \subset P_n$, $(\overline{A}_l) \subset \overline{P}_n$, $n = mp - 1 + \sigma$, $\sigma > 0$, *определяется с произволом* $m^2p + \sigma$ *функцией одного аргумента.*

4. Пусть теперь $\sigma = 0$. Тогда для пары $(C, (\overline{A}_l))$, где C—проективное изгибание порядка p между (A_l) и $(\overline{A}_l)$, получается следующая система пфаффовых уравнений:

$$\left|\begin{array}{l} \tau^v_u = 0 \ (u \neq m(p-1)+l); \ \tau^l_{m(p-1)+l} = \lambda_l \omega^l; \ \tau^j_{m(p-1)+j} = \lambda_j \omega^j; \\ \tau^{m\lambda+j}_{m(p-1)+l} = \tau^{m\lambda+l}_{m(p-1)+j} = 0 \ (\lambda = 0, \cdots, p-1;\ j \neq i); \\ \tau^{m\lambda+k}_{m(p-1)+j} = 0 \ (\lambda = 0, \cdots, p-1;\ k, j \neq i;\ k \neq j); \\ \tau^{m\lambda+l}_{m(p-1)+l} = \tau^{m\lambda+j}_{m(p-1)+j} = 0 \ (\lambda = 1, \cdots, p-1;\ j \neq i). \end{array}\right. \qquad (3)$$

Внешнее дифференцирование (3) дает:

$$[d\lambda_l + \lambda_l(2\omega^l_l - \omega^{m(p-1)+l}_{m(p-1)+l} - \omega^{m+l}_{m+l})] \wedge \omega^l = 0 \qquad (4)$$

и

$$b^l_i\lambda_i + a^l_i\lambda_l = 0, \quad b^l_j\lambda_j + a^l_j\lambda_l = 0, \quad b^k_j\lambda_j + a^k_j\lambda_k = 0. \qquad (5)$$

Равенства (5) эквивалентны соотношениям:

$$a^l_k a^k_l = b^l_k b^k_l, \quad a^l_k a^l_j a^k_l = - b^l_k b^l_j b^k_l. \qquad (6)$$

Более того из (4) видно, что все λ_l можно привести к единицам. Тогда (5) принимает вид:

$$a^l_k + b^l_k = 0. \qquad (7)$$

5. Если p — соприкасающееся пространство некоторой кривой $l \subset (A_l)$ совпадает с $(p-1)$ — соприкасающимся пространством (A_l), то кривую l назовем $\gamma_{p-1,\overline{p}}$ *асимптотической*. Уравнения таких кривых на (A_l)

$$b^l_i(\omega^l)^p + a^l_i(\omega^l)^p = 0 \quad (l \text{ — фиксировано})$$

Если $\gamma_{p-1,\,p}$ — асимтотические кривые соответствуют на всех фокальных поверхностях псевдоконгруэнции L, то L назовем *псевдоконгруэнцией* W.

Необходимые и достаточные условия такого соответствия выражаются равенствами (6).

Псевдоконгруэнцию W назовем *псевдоконгруэнцией* R, если одна (а тогда и все остальные) ее фокальная поверхность будет изотермически—асимптотической, т. е. если уравнения $\gamma_{p-1,p}$ — асимптотических (A_l) имеют вид:

$$(\omega^j)^p - (\omega^l)^p = 0 \quad (l\text{-фиксировано}).$$

Отсюда вытекает, что псевдоконгруэнция R характеризуется условиями (7).

В P_{mp-1} псевдоконгруэнции R зависят от $m(mp-1)$ функций одного аргумента. Фокальные поверхности псевдоконгруэнции R назовем *поверхностями* R.

6. Таким образом, равенства (6) означают, что L — псевдоконгруэнция W, и более того, в силу (7) L — псевдоконгруэнция R. Из (3) и (7) получаем $\overline{a}_k^l + \overline{b}_k^l = 0$, т. е. $\overline{L}$ — псевдоконгруэнция R.

Итак, установлена

Теорема 3. *Пусть $C: V_m \to \overline{V}_m$ — проективное изгибание порядка p m — сопряженных систем V_m и $\overline{V}_m$ пространств P_{mp-1} и $\overline{P}_{mp-1}$. В этом, и только в этом случае V_m и $\overline{V}_m$ будут обе поверхностями R. Пара $(C, \overline{V}_m)$ зависит от m функций одного аргумента.* Заметим еще, что если C — проективное изгибание порядка $p+1$, то V_m и $\overline{V}_m$ проективно эквивалентны.

Из симметричности системы (4) относительно фиксированного индекса i и индекса $j \neq i$ вытекает.

Теорема 4. *Соответствия $C_j: (A_j) \to (\overline{A}_j)$ и индуцированные проективным изгибанием $C: (A_i) \to (\overline{A}_i)$ (i—фиксировано, $j \neq i$) порядка p, будут проективными изгибаниями порядка p.*

7. Имеют место также следующие теоремы.

Теорема 5. *Тройка $(V_m, \overline{V}_m, C)$, где $C: V_m \to \overline{V}_m$ — проективное изгибание порядка p, m — сопряженных систем V_m и $\overline{V}_m$ пространств P_{mp-1} и $\overline{P}_{mp-1}$ зависит от m^2p функций одного аргумента.*

Теорема 6. *Если одна из псевдоконгруэнций некоторой последовательности Лапласа из псевдоконгруэнций $(m-1)$-плоскостей является псевдоконгруэнцией R, то и все другие псевдоконгруэнции этой последовательности того же типа (получаем последовательность R).*

Из теоремы 6 следует, что фокальные поверхности всех псевдоконгруэнций последовательности R будут поверхностями R и что если соответствие $C: V_m \to \overline{V}_m$ — проективное изгибание порядка p, то соответствия, индуцированные на всех соответствующих преобразованиях Лапласа V_m и $\overline{V}_m$, также будут проективными изгибаниями порядка p.

Всесоюзный заочный финансово-экономический институт

Լ. Գ. ԳԻԿՈՒԼԵՎԱ

m-համալուծ սիստեմների պրոեկտիվ ծռումը

Ուսումնասիրվում է m-համալուծ $(m > 2)$ V_m և $\overline{V}_m$ սիստեմների պրոեկտիվ ծռումը P_n և $\overline{P}_n$ պրոեկտիվ տարածություններում։ Հետազոտությունը հանդիսանում է (2) աշխատանքի ընդհանրացումը։

Դիցուկ $\sigma > 0$ և C-ն p կարգի m-համալուծ V_m և $\overline{V}_m$ սիստեմների պրոեկտիվ ծռումն է։ Այս պայմանների դեպքում տեղի ունի հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 2: $(C, (\overline{A}_1))$ զույգը՝ որտեղ $C:(A_1) \to (\overline{A}_1)$ p կարգի պրոեկտիվ ծռում է, $(A_1) \subset P_n$, $(A_1) \subset \overline{P}_n$, $n = mp - 1 + \sigma, \sigma > 0$, որոշվում է մեկ արգումենտից $m^2p + \sigma$ ֆունկցիաների կամայականությամբ։

Եթե $\sigma = 0$ ցույց է տրվում, որ W փոխդոկոնգրուենցիան հանդիսանում է R փոխդոկոնգրուենցիա հետևյալ պայմանի

$$a_k^l + b_k^l = 0$$

կատարման դեպքում։ Այնուհետև, երբ $\sigma = 0$ և $n = mp - 1$, ապացուցվում է, որ P կարգի ծռում թույլատրում են միայն m-համալուծ R սիստեմները և այդ հատկությունը պահպանվում է նրանցով առաջացած Լապլասի հաջորդականություններում։ Այս փաստից հետևում է, որ R հաջորդականության բոլոր փոխդոկոնգրուենցիաների ֆոկալ մակերևույթները կլինեն R մակերևույթները։

Բոլոր անհրաժեշտ դեպքերում ապացուցվում են գոյության թեորեմները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. М. Гейдельман*, Матем. сб., 36 (78), 209—232 (1955). [2] *A. Švec*, Projective differential geometry of line congruences, Prague, 1965.