

МАТЕМАТИКА

УДК 519.1

А. Г. Маркосян

О числе внутренней устойчивости в декартовом произведении графов

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. А. Шагиняном 1/XII 1970)

Понятие внутренне устойчивого множества и связанные с ним понятия ядра и числа внутренней устойчивости графа играют очень важную роль в многочисленных приложениях теории графов: в теории игр, в теории транспортных сетей, в теории информации и т. д. Особенно хочется отметить известную задачу теории информации⁽¹⁻³⁾, поставленную Шенноном, о богатстве кода, составленного символами данного алфавита, которая сводится к нахождению максимального внутренне устойчивого множества в декартовом произведении графов. Здесь важно знать число внутренней устойчивости в декартовом произведении графов, которое и определяет наибольшее число не путающихся между собой сигналов. Шеннон нашел достаточное условие, с помощью которого можно вычислить число внутренней устойчивости в декартовом произведении графов. Однако надо отметить, что практически проверить это условие для конкретного графа почти невозможно. В настоящей статье найдено легко проверяемое достаточное условие для вычисления числа внутренней устойчивости в декартовом произведении.

Пусть дан граф $G = (X, U) = (X, \Gamma)^*$. Подмножество вершин $S \subset X$ называется внутренне устойчивым, если никакие две вершины S не смежны, т. е.

$$\Gamma S \cap S = \emptyset.$$

Числом внутренней устойчивости графа G называется

$$\alpha(G) = \max_s |S|,$$

где максимум берется по внутренне устойчивым множествам графа G .

Декартово произведение двух графов $G = (X, U)$ и $H = (Y, V)$ это граф $G \times H$, вершинами которого служат элементы множества $X \times Y$,

* Мы придерживаемся, в основном, терминологии и обозначений (1).

т. е. пары xu , где $x \in X$, $u \in U$ и две вершины xu и $x'u'$ смежны, если они удовлетворяют одному из следующих условий:

1. $x = x'$, $(u, u') \in V$;
2. $(x, x') \in U$, $u = u'$;
3. $(x, x') \in U$, $(u, u') \in V$.

Аналогичным образом можно определить декартово произведение $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ графов $G_1, G_2, \dots, G_n$ и, в частности, когда $G_1 = G_2 = \dots = G_n = G$, получим $G^n = G \times G \times \dots \times G$.

Однозначное отображение α , переводящее множество $X, \subseteq X$ в себя называется сохранным, если

$$y \neq x, y \in \Gamma x \longrightarrow \alpha(y) \neq \alpha(x), \alpha(y) \in \Gamma \alpha(x).$$

Ясно, что это отображение сохраняет несмежность вершин.

Сохранное отображение называется сжато-сохранным, если

$\alpha(X_s) = \{\alpha(x) / x \in X_s\}$ — внутренне устойчивое множество.

Сжато-сохранное отображение называется полным, если $X_s = X$.

Очевидно, что если α полное сжато-сохранное отображение, то $|\alpha(X)| = \alpha(G)$.

Шеннон доказал следующую теорему:

Если хотя бы для одного из графов G и H существует полное сжато-сохранное отображение α , то

$$\alpha(G \times H) = \alpha(G) \times \alpha(H).$$

Используя результат Шеннона, мы докажем теорему, которая даст возможность очень просто найти число внутренней устойчивости и множество внутренней устойчивости, содержащее наибольшее число элементов для одного класса декартова произведения графов.

Теорема 1. *Если граф $G = (X, U)$ не содержит простых циклов нечетной длины, большей или равной пяти, то для него существует полное сжато-сохранное отображение.*

Доказательство. Предположим обратное: пусть граф G не обладает циклами нечетной длины, большей или равной пяти, но для него не существует полного сжато-сохранного отображения.

Рассмотрим множество сжато-сохранных отображений. Пусть α_0 — такое сжато-сохранное отображение, которое определено на наибольшем числе вершин графа G . Другими словами, если X_s — множество вершин, на которых определено отображение α , то $|X_s| \leq |X_{\alpha_0}|$ для любого отображения α . Ясно, что $X_s \neq X$ для любого α , в противном случае α было бы полным сжато-сохранным отображением, и теорема была бы доказана. Следовательно, существует такая вершина $a \in X$, которая не принадлежит множеству X_s . Обозначим через Σ_s множество всех таких максимальных путей

$$\mu = [a = y_0^{\mu}, x_1^{\mu}, y_1^{\mu}, x_2^{\mu}, y_2^{\mu}, \dots],$$

где $x_1^{\mu}, x_2^{\mu}, \dots$ принадлежит $\sigma_0(X_2)$, а $\sigma_0(y_i^{\mu}) = x_i^{\mu}$, $(y_i^{\mu}, y_{i+1}^{\mu}) \in U$. Максимальность пути здесь понимается в том смысле, что не существует пути, принадлежащего множеству Σ_2 , и содержащего путь μ . Существование таких путей следует из того, что вершина a смежна хотя бы с одной вершиной из множества $\sigma_0(X_2)$.

Заметим, что пути μ не могут кончаться вершиной x_k^{μ} , $\sigma_0(x_k^{\mu}) = x_k^{\mu}$, т. е. $x_k^{\mu} \in \sigma_0(X_2)$. В противном случае, определим сжато-сохранное отображение σ_0' следующим образом

$$\sigma_0'(y_{k-1}^{\mu}) = x_k^{\mu} \text{ для всех } \mu,$$

$$\sigma_0'(x) = x, \text{ если } x \in X_2, x \neq y_{k-1}^{\mu}.$$

мы получим новое множество путей Σ_{σ_0}' , которое уже не содержит путей, оканчивающихся вершиной x_k^{μ} . Если еще существуют пути, конец которых принадлежит множеству $\sigma_0'(X_2)$, то повторив эту операцию несколько раз, в конце концов получим такое сжато-сохранное отображение σ_0 , для которого конец всех путей не принадлежит $\sigma_0(X_2)$. Но тогда, выбирая для каждого x_i^{μ} однозначным образом некоторое определенное y_i^{μ} , можно определить следующее отображение σ_0' :

$$\sigma_0'(x) = y_i^{\mu}, \text{ если } \sigma_0(x) = x_i^{\mu}, i = 1, 2, \dots, \text{ для всех путей } \mu \in \Sigma_{\sigma_0},$$

$$\sigma_0'(x) = \sigma_0(x), \text{ если вершина } x \text{ не принадлежит никакому из путей } \Sigma_{\sigma_0}, \text{ т. е. } \sigma_0(x) \neq x_i^{\mu}, \sigma_0'(a) = a.$$

Очевидно что σ_0' будет однозначным отображением.

Пусть S_1 — множество всех вершин y_i^{μ} , а $S_2 = \sigma_0'(X_2) \setminus \{S_1 \cup \{a\}\}$. Покажем, что множество $\sigma_0' = S_1 \cup S_2 \cup \{a\}$ — внутренне устойчиво.

Во-первых, множество вершин S_2 не содержит в себе смежных вершин, в силу того, что множество $S_2 \subset \sigma_0(X_2)$, а $\sigma_0(X_2)$ внутренне устойчиво. S_2 не содержит смежных вершин с S_1 , так как $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Во-вторых, множество S_1 внутренне устойчиво: если две вершины одного пути $y_i^{\mu}, y_j^{\mu} \in S_1$, то $(y_i^{\mu}, y_j^{\mu}) \in U$ в силу того, что в графе не существует простого цикла нечетной длины, а часть цикла от y_i^{μ} до y_j^{μ} — $\mu[y_i^{\mu}, y_j^{\mu}]$ — простой путь четной длины, откуда простой цикл $\mu[y_i^{\mu}, y_j^{\mu}] \cup (y_i^{\mu}, y_j^{\mu})$ имеет нечетную длину, большую или равную 5.

Последнее вытекает из того, что в путях множества Σ_2 не существует дуг $(y_i^{\mu}, y_{i+1}^{\mu})$. Если $y_i^{\mu_1}, y_j^{\mu_2} \in S_2$, $\mu_1, \mu_2 \in \Sigma_{\sigma_0'}$, то опять $(y_i^{\mu_1}, y_j^{\mu_2}) \in U$, потому что, если x последняя общая вершина на путях μ_1 и μ_2 до вершины $y_i^{\mu_1}, y_j^{\mu_2}$, то часть путей $\mu_1[x, y_i^{\mu_1}]$ и $\mu_2[x, y_j^{\mu_2}]$ имеют длину одинаковой четности, независимо от того $x = x_k^{\mu}$ или $x = y_{k-1}^{\mu}$. Откуда простой цикл $\mu_1[x, y_i^{\mu_1}] \cup (y_i^{\mu_1}, y_j^{\mu_2}) \cup \mu_2[x, y_j^{\mu_2}]$ опять имеет нечет-

ную длину, большую или равную 5. Получим, что α_0^* — сжато-сохранное отображение. Последнее вытекает из внутренней устойчивости $\alpha_0^*(X_{\alpha_0^*})$ и из определения α_0^* . Но $X_{\alpha_0^*} = X_1 \cup \{a\}$ и отсюда $|X_1| < |X_{\alpha_0^*}|$, что противоречит определению сжато-сохранного отображения α_0 . Теорема доказана.

Очевидно, что обратная теорема неверна.

Из теоремы 1 и из теоремы Шеннона вытекает.

Теорема 2. *Если хотя бы один из графов G и не содержит простых циклов нечетной длины, большей или равной 5, то $\alpha(G \times H) = \alpha(G) \cdot \alpha(H)$.*

Ясно, что теорема 2 верна и для декартова произведения графов $G_1, G_2, \dots, G_n$; в частности, если

$$G_1 = G_2 = \dots = G_n = G, \text{ то } \alpha(G^n) = \alpha^n(G).$$

Последнее утверждение имеет важное применение в теории информации и дает возможность тривиальным образом найти самый богатый код, имеющий длину n . Для этого достаточно взять элементы множества

$$S_0 = S \times S \times \dots \times S,$$

где S — внутренне устойчивое множество в графе G , содержащее наибольшее число элементов. S_0 будет внутренне устойчивым множеством, содержащим наибольшее число элементов в декартовом произведении $G \times G \times \dots \times G = G^n$. Это следует из теоремы 2, так как $|S_0| = \alpha(G^n)$, а $|S| = \alpha(G)$. Следуя Шеннону, обозначим через

$$\theta(G) = \sup_n \sqrt[n]{\alpha(G^n)},$$

и назовем ее емкостью графа G .

Кстати, заметим, что для большинства графов, например, для простого цикла длины 5, определение $\theta(G)$ представляет собой очень трудную задачу.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие. *Если граф G не содержит простых циклов нечетной длины ≥ 5 , то $\theta(G) = \alpha(G)$.*

Очевидно, что теоремы 1, 2 и последнее следствие верны и тогда, когда граф, вообще, не содержит циклов нечетной длины.

Ереванский политехнический институт

Ա. Կ. ՄԱՐԿՈՍՅԱՆ

Դրաֆների դեկարտյան արտադրյալի ներքին կայունության բիլի մասին

Հոդվածում դրված է ներքին կայունության թիվը կենտ երկարության սիկլեր չպարունակող դրաֆներին դեկարտյան արտադրյալի համար: Ապացուցված է, որ ներքին կայունության թիվը արտադրյալ դրաֆի համար հավասար է

արտադրիչ գրաֆների ներքին կայունության թվերի արտադրյալին, հթե արտադրիչներից զոնե մեկը չի պարունակում կենտ երկարության ցիկլեր: Վերջին փաստը ունի շատ կարևոր կիրառություն ինֆորմացիայի տեսության մեջ՝ անցուղու թողունակությունը որոշելու ժամանակ:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ К. Берж, Теория графов и ее применения, ИЛ, М., 1962 ² О. Орс, Теория графов, Изд. «Наука», М., 1968. ³ К. Шеннон, Работы по теории информации и кибернетике, Изд. ИЛ, М., 1963.