ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LII 1971 1

МЕХАНИКА

УДК 539.37

Ю. С. Ншанян

О двух задачах, связанных с кручением составной сферы

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 12/X 1970)

В работе рассматриваются две задачи кручения составной сферы, когда сфера скручивается произвольной осесимметричной нагрузкой. В первой задаче скручивается сфера, составленная из различных материалов и соединенных вдоль диаметральной поверхности. Решение этой задачи дается в замкнутом виде. Во второй задаче соединение двух полусфер из различных материалов ослаблено экваториальным кольцевым разрезом. Решение этой задачи сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Простейший случай, когда сплошная сфера скручивается сосредоточенными моментами, рассматривается в работах [1, 2]. В постановке аналогичной нашей, задача кручения двухслойной полой полусферы исследуется в работе [3], а когда часть торца закреплена— в работах [4, 5]. Некоторым контактным задачам, связанным с кручением упругой сферы, посвящены работы [6–11].

1°. Задачу будем решать в координатной системе (ξ, t) при помощи функции перемещения $\Psi(t, \xi)$. Координаты t, ξ связаны со сферической системой (ρ, θ) (рис. 1) соотношениями

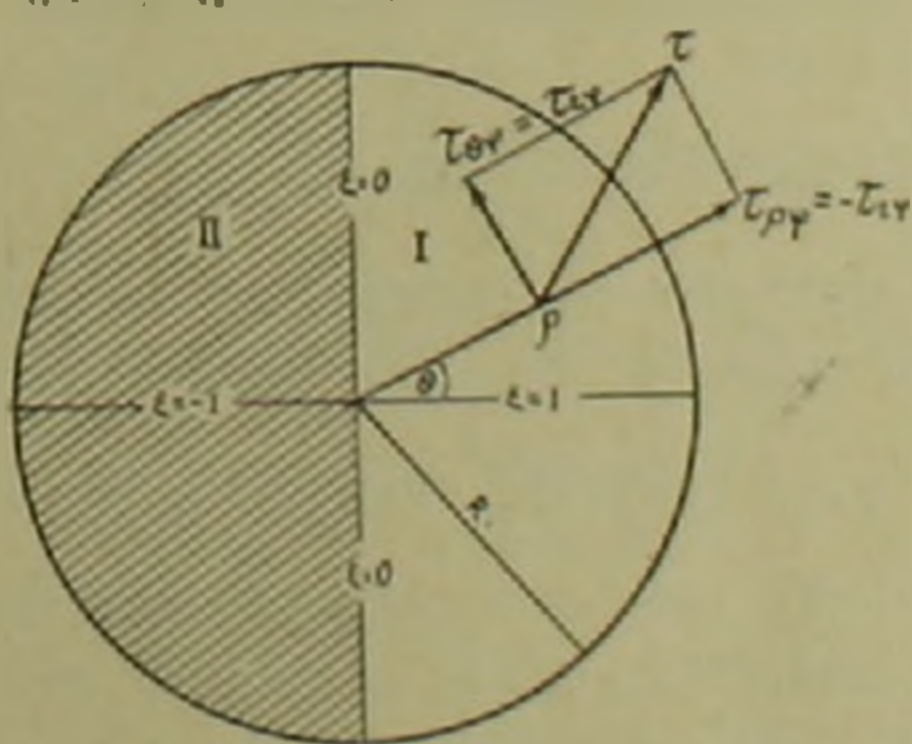

Рис. 1.

$$\xi = \cos\theta, \quad t = \ln\frac{R}{\rho}; \quad (R\text{—радиус сферы}) \qquad (1.1)$$

Функция перемещения $\Psi(t, \xi)$, которая в области осевого сечения тела вращения удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - 3\frac{\partial \Psi}{\partial t} + (1-\xi^2)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - 4\xi\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = 0, \qquad (1.2)$$

связывается с перемещением и напряжениями следующими формулами:

$$\tau_{\xi\varphi} = G(1-\xi^2)\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}; \quad \tau_{t\varphi} = G\sqrt{1-\xi^2}\frac{\partial \Psi}{\partial t};$$

$$v = Re^{-t}\sqrt{1-\xi^2}\cdot\Psi(t, \xi). \qquad (1.3)$$

Решая уравнение (1.2) методом разделения переменных, функцию $\Psi(t, \xi)$ представим в виде

$$\Psi(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k-1}e^{-2(k-1)t}P'_{2k-1}(\xi) + \int_0^{\infty} B(\mu)P'_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\xi)T_\mu(t)\,d\mu, \quad (1.4)$$

где $T_\mu(t) = e^{\frac{3}{2}t}\left(\frac{3}{2}\sin\mu t - \mu\cos\mu t\right)$, $P_n(\xi)$ полиномы Лежандра $P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\xi)$ конические функции $P'_n(\xi) = \frac{dP_n(\xi)}{d\xi}$; $P'_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\xi) = \frac{dP_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\xi)}{d(\xi)}$, а A_{2k-1} и $B(\mu)$ неопределенные коэффициенты.

2°. Рассмотрим задачу кручения сферы радиуса R составленной из двух полусфер, изготовленных из различных материалов и соединенных вдоль плоскости $\xi = 0$, когда на сферической поверхности действуют крутящие напряжения (рис. 1). Пусть G_1 модуль сдвига первого материала, G_2 — второго. Для такой задачи граничные условия примут вид

$$\tau^{(1)}_{t\varphi}(0, \xi) = f_1(\xi)\ (0 < \xi \leqslant 1); \quad \tau^{(2)}_{t\varphi}(0, \xi) = f_2(\xi)\ (-1 \leqslant \xi < 0), \qquad (2.1)$$

где f_1 и f_2 известные функции ξ. Должны иметь место также условия сопряжения на поверхности раздела материалов.

$$\tau^{(1)}_{\xi\varphi}\big|_{\xi=0} = \tau^{(2)}_{\xi\varphi}\big|_{\xi=0};\ v_1(t, 0) = v_2(t, 0)\ (0 \leqslant t \leqslant \infty) \qquad (2.2)$$

Здесь и далее значок (1) означает, что соответствующие величины относятся к правой области $0 < \xi \leqslant 1$, а (2) к левой — $-1 \leqslant \xi < 0$. Функцию перемещения $\Psi(t, \xi)$ ищем в виде

$$\Psi(t, \xi) = \begin{cases} \Psi_1(t, \xi) & \text{в области 1} \quad 0 < \xi \leqslant 1 \\ \Psi_2(t, \xi) & \text{в области 2} \quad -1 \leqslant \xi < 0 \end{cases} \qquad (2.3)$$

Причем функции $\Psi_i(t, \xi)$ берем в виде (1, 4), где вместо коэффициентов A_{2k-1} и $B(\mu)$ берем соответственно $A^{(1)}_{2k-1}$ и $B^{(1)}(\mu)$ в первой области и $A^{(2)}_{2k-1}$ и $B^{(2)}(\mu)$ во второй. Для касательных напряжений и перемещения v согласно (1.3) будем иметь:

$$\tau^{(i)}_{t\varphi} = G_i \sqrt{1-\xi^2} \left\{ -\sum_{k=1}^{\infty} 2(k-1) A^{(i)}_{2k-1} e^{-2(k-1)t} P'_{2k-1}(\xi) + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\infty} B^{(i)}_{(\mu)} T'_{\mu}(t) P'_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\xi)\, d\mu \right\}, \tag{2.4}$$

$$\tau^{(i)}_{\xi\varphi} = G_i \sqrt{1-\xi^2} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} A^{(i)}_{2k-1} e^{-2(k-1)t} P''_{2k-1}(\xi) + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\infty} B^{(i)}_{(\mu)} T_{\mu}(t) P''_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\xi)\, d\mu \right\}, \tag{2.5}$$

$$v_i(t, \xi) = Re^{-t} \sqrt{1-\xi^2} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} A^{(i)}_{2k-1} e^{-2(k-1)t} P'_{2k-1}(\xi) + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\infty} B^{(i)}_{(\mu)} P'_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\xi) T_{\mu}(t)\, d\mu \right\}, \quad (i = 1, 2), \tag{2.6}$$

Далее учитывая соотношения

$$\int_0^1 (1-\xi^2) P'_{2k-1}(\xi) P'_{2m-1}(\xi)\, d\xi = \int_{-1}^0 (1-\xi^2) P'_{2k-1}(\xi) P'_{2m-1}(\xi)\, d\xi =$$

$$= \begin{cases} 0, & m \neq k \\ \dfrac{2k(2k-1)}{4k-1}, & m = k \end{cases} \tag{2.7}$$

и удовлетворяя граничным условиям (2.1) получаем

$$A^{(i)}_{2k-1} = -\frac{1}{2(k-1)} \frac{f^{(i)}_k}{G_i} \quad (i = 1, 2), \tag{2.8}$$

где обозначено

$$f^{(i)}_k = \frac{4k-1}{2k(2k-1)} \cdot \int_{\alpha_i}^{\beta_i} (1-\xi^2)^{1/2} f_i(\xi) P'_{2k-1}(\xi)\, d\xi \quad (i=1, 2) \tag{2.9}$$

$$(\alpha_1 = \beta_2 = 0; \quad \alpha_2 = -\beta_1 = 1).$$

Первому из условий сопряжения удовлетворяем, положив

$$B^{(1)}_{(\mu)} = m_0 B^{(2)}_{(\mu)}, \quad \text{где} \quad m_0 = \frac{G_2}{G_1}. \tag{2.10}$$

Предполагая наличие второго из условий контакта приходим к равенству

$$\int_0^\infty B^{(2)}_{(\mu)} P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(0) T_\mu(t)\, d\mu = F(t) \quad (0 < t < \infty), \tag{2.11}$$

где

$$F(t) = \frac{1}{m_0 - 1} \sum_{k=1}^{\infty} [A^{(2)}_{2k-1} - A^{(1)}_{2k-1}]\, e^{-2(k-1)t} P'_{2k-1}(0). \tag{2.12}$$

Далее заметим, что для функции $T_\mu(t)$ имеет место тождество

$$f(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{T_\mu(z)}{\alpha^2 + \mu^2} d\mu \int_0^\infty T_\mu(t) e^{-2\alpha t} f(t)\, dt +$$

$$+ 2\alpha \int_0^\infty e^{-2\alpha t} f(t)\, dt; \quad \left(\alpha = \frac{3}{2}\right) \tag{2.13}$$

подобное соотношение было получено в работе А. А. Баблояна ([11]).

Покажем, что для функции $F(t)$ имеет место соотношение.

$$\int_0^\infty e^{-3t} F(t)\, dt = 0 \quad \text{или что идентично} \quad F'(0) = 0 \tag{2.14}$$

Последнее, как легко видеть, вытекает из условия сопряжения (2.2) в точке $t = 0$, $\xi = 0$

Таким образом из (2.13) имеем

$$B^{(2)}_{(\mu)} = \frac{2}{\pi\left(\mu^2 + \frac{9}{4}\right) P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(0)} \cdot \int_0^\infty e^{-3t} F(t)\, T_\mu(t)\, dt \tag{2.15}$$

или

$$B^{(2)}(\mu) =$$

$$\frac{2\mu}{\pi(m_0 - 1)\left(\frac{9}{4} + \mu^2\right) P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(0)} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{f_k^{(2)}}{G_2} - \frac{f_k^{(1)}}{G_1}\right] \frac{P'_{2k-1}(0)}{\left(2k - \frac{1}{2}\right)^2 + \mu^2}; \tag{2.16}$$

и окончательно

$$B^{(2)}(\mu) = \frac{2\mu}{\pi(m_0 - 1)\left(\frac{9}{4} + \mu^2\right) P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(0)} \cdot \int_{-1}^{1} \varphi(\xi) f(\xi)\, d\xi, \tag{2.17}$$

где

$$f(\xi)=\begin{cases}\dfrac{f_1}{G_1} & 0<\xi\leqslant 1\\ \dfrac{f_2}{G_2} & -1\leqslant\xi<0\end{cases}\quad;\quad \varphi(\xi)=(1-\xi^2)^{1/2}\,\frac{P'_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\xi)}{P'_{-\frac{1}{2}+i\mu}(0)}\quad\text{при } 0<\xi\leqslant 1,$$

а на отрезок $-1<\xi<0$ продолжается нечетно.

Таким образом имея (2.17), (2.10), (2.8) и пользуясь соотношениями (2.4) — (2.8) можно определить напряжение $\tau^{(i)}_{t\varphi}$ и $\tau^{(i)}_{\xi\varphi}$ перемещения $v_i\,(i=1,\ 2)$ в любой точке осевого сечения шара.

3°. Рассмотрим теперь задачу о кручении составной сплошной сферы при условии, что соединение из двух полусфер ослаблено кольцевым разрезом на плоскости $\xi=0$, $0<t<t_1$. Для такой задачи граничными условиями будут:

на сферической поверхности заданные касательные напряжения

$$\tau^{(1)}_{t\varphi}=f_1(\xi)\quad(0<\xi\leqslant 1);\quad \tau^{(2)}_{t\varphi}=f_2(\xi)\quad(-1\leqslant\xi<0)\tag{3.1}$$

на поверхности разреза

$$\tau^{(1)}_{\xi\varphi}=\tau^{(2)}_{\xi\varphi}=0\quad(0\leqslant t<t_1)\tag{3.2}$$

и наконец условиями сопряжения материалов будут

$$\tau^{(1)}_{\xi\varphi}=\tau^{(2)}_{\xi\varphi};\quad v_1(t,\ \xi)=v_2(t,\ \xi)\quad(t_1<t\leqslant\infty).\tag{3.3}$$

Как и в 2° функцию перемещения возьмем в виде (1.4). Удовлетворяя (3.1) для коэффициентов $A^{(i)}_{2k-1}$ получаем выражение

$$A^{(i)}_{2k-1}=-\frac{1}{2(k-1)}\,\frac{f^{(i)}_k}{G_i}\quad(i=1,\ 2).\tag{3.4}$$

Здесь для $f^{(i)}_k$ и G_i использованы такие же обозначения как и в 2°. Первое из условий сопряжения удовлетворим, положив

$$B^{(1)}(\mu)=m_0B^{(2)}(\mu),\ \text{ где }\quad m_0=\frac{G_2}{G_1}\tag{3.5}$$

далее из (3.2) и (3.3), получим

$$\int\limits_0^\infty B^{(2)}(\mu)\,P'_{-\frac{1}{2}+i\mu}(0)\,T_\mu(t)\,d\mu=0\quad(0\leqslant t<t_1)\tag{3.6}$$

$$\int\limits_0^\infty B^{(2)}(\mu)\,P'_{-\frac{1}{2}+i\mu}(0)\,T_\mu(t)\,d\mu=F(t)\quad(t_1<t<\infty),\tag{3.7}$$

где

$$F(t)=\frac{1}{m_0-1}\sum_{k=1}^{\infty}\left[A^{(2)}_{2k-1}-A^{(1)}_{2k-1}\right]e^{-2(k-1)t}\,P'_{2k-1}(0).\tag{3.8}$$

Системой (3, 6), (3,7) представляются парные интегральные уравнения. Для разрешения этих уравнений поступим следующим образом. Умножаем уравнение (3.6) на e^{-3t} и полученное выражение интегрируем по t в пределах от нуля до t, а уравнение (3.7) дифференцируем по t, тогда система (3,6) — (3,7) представится в виде:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty A(\mu)\,[1+N(\mu)]\sin\mu t\,d\mu = 0 \quad (0 \leqslant t < t_1), \\ &\int_0^\infty A(\mu)\sin\mu t\,d\mu = F_1(t) \quad (t_1 < t \leqslant \infty), \end{aligned} \tag{3.9}$$

где использованы обозначения

$$A(\mu) = B^{(2)}(\mu)\,P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(0)\left(\mu^2+\frac{9}{4}\right); \quad F_1(t) = e^{-\frac{3}{2}t}\,F'(t)$$

$$1+N(\mu) = \left(\mu^2+\frac{9}{4}\right)^{-2}\frac{P'_{-\frac{1}{2}+i\mu}(0)}{P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(0)}.$$

Далее положим

$$\int_0^\infty A(\mu)\,N(\mu)\sin\mu t\,d\mu = G(t) \quad \text{и} \quad f(t) = \begin{cases} -G(t); & 0 \leqslant t < t_1 \\ F_1(t); & t_1 < t \leqslant \infty \end{cases} \tag{3.10}$$

откуда

$$A(\mu) = \Phi(\mu) - \frac{2}{\pi}\int_0^{t_1} G(t)\sin\mu t\,dt. \tag{3.11}$$

Здесь

$$\Phi(\mu) = \frac{2}{\pi}\int_{t_1}^\infty F_1(t)\sin\mu t\,dt.$$

и если положить

$$K(s,\mu) = k(s,\mu)\,N(\mu), \quad \text{где} \quad k(s,\mu) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\mu-s)t_1}{\mu-s} - \frac{\sin(\mu+s)t_1}{\mu+s}\right], \tag{3.12}$$

то для определения $A(\mu)$ получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$A(\mu) = \Phi(\mu) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} A(s) K(s, \mu) ds. \tag{3.13}$$

Заметим, что ядро уравнения (3.13) суммируемо в L_2, это с очевидностью вытекает из неравенства

$$|1 + N(\mu)| \leqslant \left| \frac{P'_{-\frac{1}{2}+i\mu}(0)}{P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(0)} \left(\mu^2 + \frac{9}{4} \right)^{-2} \right| < \frac{1}{3} \tag{3.14}$$

и полученного выражения для $k(s, \mu)$

Автор выражает признательность Б. Л. Абрамяну за постановку задачи и ценные указания в ходе ее решения.

Ереванский государственный университет

ՅՈՒ. Ս. ՆՃԱՆՅԱՆ

Բաղադրյալ գնդի ոլորման հետ կապված երկու խնդիրների մասին

Հոդվածում դիտարկվում են բաղադրյալ գնդի ոլորման հետ կապված երկու խնդիրներ։ Ոլորումն իրագործվում է գնդի մակերևույթի վրա կիրառված կամայական առանցքասիմետրիկ բեռով։

Առաջին խնդրում ոլորվող գունդը կազմված է երկու տարբեր կիսագնդերի միացումով։ Խնդրի լուծումը տրվում է փակ տեսքով։

Երկրորդ խնդրում դիտարկվում է երկու կիսագնդերից կազմված բաղադրյալ գնդի ոլորումը, երբ միացումը թուլացված է գնդի եզրից սկսվող տրամագծային օղակաձև ճեղքով։

Խնդրի լուծումը բերվում է զույգ ինտեգրալ հավասարումների։ Այդ հավասարումների լուծումը իր հերթին բերվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը։ Ցույց է տրվում, որ այդ հավասարման կորիզը գումարելի է L_2*-ում։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *C. Snell*, Mathematica, vol., 1, № 8 (1957). [2] *A. Huber*. Quart. Appl. Math. vol. 13 (1955). [3] *Б. Л. Абрамян, Н. О. Гулканян*, „Известия АН Арм. ССР", сер. физ. мат. наук, т. XIV, № 6 (1961). [4] *Б. Л. Абрамян, А. А. Баблоян*. ПММ, т XXVI (1962). [5] *А. А. Баблоян, Н. О. Гулканян*, „Известия АН Арм. ССР", Механика, т 19, № 5 (1966). [6] *R. S. Srivastav*. Narain Prem. J. Math. and Mech. № 4, vol. 14 (1965). [7] *А. А. Баблоян, Н. О. Гулканян*, „Известия АН Армянской ССР", Механика, т. 20, № 20 (1967). [8] *А. А. Баблоян*, ДАН Арм. ССР, т. 39, № 3 (1964). [9] *А. А. Баблоян*. ПММ, т. 28, в. № 6 (1964). [10] *Н. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян, А. А. Баблоян*, ПММ, т. 28, в. 4 (1964). [11] *А. А. Баблоян*, ПММ, т. 31, в. 4 (1967).