ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LII 1971 1

МАТЕМАТИКА

УДК 519.46

В. Г. Мхитарян

О комплексных многообразиях Штифеля

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Александряном 24/XI 1970)

Во всей этой работе через $W_{n,k}$ обозначается комплексное многообразие Штифеля упорядоченных систем k ортонормированных векторов пространства n комплексных переменных C^n и через $SU(n)$ унимодулярная унитарная группа пространства C^n.

Известно, что $SU(n)/SU(n-m)=W_{n,m}$.

В работе А. Л. Онищика ([1]) изучаются компактные группы Ли, транзитивные на многообразиях $W_{n,2}$, и доказывается, что многообразие $W_{2k+1,2}$ $(k>0)$ не разлагается в прямое произведение двух многообразий.

Группы Ли транзитивные на $W_{n,k}$ $(k>2)$ полностью не изучены, и в связы с этой задачей представляет интерес вопрос о разложимости этих многообразий в прямое произведение. В настоящей работе доказывается, что $W_{n,3}$ при $n\equiv 0$ $(mod\ 24)$ не разлагается в прямое произведение однородных пространств. Будем обозначать через $H(M)$ алгебру когомологий многообразия M с вещественными коэффициентами.

Определение 1. — Пусть G связная компактная группа Ли, и U ее связная, замкнутая подгруппа. Пусть $i^*: H(G)\to H(U)$ гомоморфизм, порожденный вложением $i: U\to G$. Будем говорить, что подгруппа U вполне не гомологична нулю в G, если отображение i^* — эпиморфизм.

Пусть $M=G/U$ однородное пространство, где G связная компактная группа Ли, а U ее связная замкнутая подгруппа.

Из работы Ж. П. Серра ([2]) и из теоремы 3. 2. работы А. Л. Онищика ([1]) следует, что следующие условия эквивалентны:

1°. $rg\,\Pi_{2k}(M)=0$.

2°. $H(M)$ внешняя алгебра, порожденная элементами нечетных размерностей.

3°. Подгруппа U вполне не гомологична нулю в G.

Определение 2. Будем говорить, что многообразие M есть многообразие типа S, если имеет место одно из условий 1°, 2°, 3°.

Лемма 1. *Пусть имеем $M = M_1 \times M_2$, где M, M_1 и M_2 однородные пространства компактных групп Ли. Если M многообразие типа S, то M_1 и M_2 тоже многообразия типа S. Верно и обратное утверждение.*

А. Л. Онищик в работе ([1]) ввел понятие ранга односвязного многообразия:

Определение 3. Будем обозначать через $r(M)$ и называть рангом односвязного многообразия M сумму рангов всех групп $\Pi_{2k-1}(M)$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ если эта сумма конечна. Отметим следующее очевидное свойство ранга: $r(M \times N) = r(M) + r(N)$ если $r(M)$ и $r(N)$ определены. Кроме того будет использоваться

Лемма 2. *Пусть M компактное многообразие и пусть $M = M_1 \times M_2$. Если M не имеет p-кручения (p—простое число), то M_1 и M_2 тоже не имеют p-кручения. Верно и обратное утверждение.*

Предложение 1. *Комплексное многообразие Штифеля $W_{n,k}$ есть пространство ранга k и $\Pi_3(W_{n,3}) = 0$ $(n > 4)$.*

Определение 4. Пусть M произвольное многообразие. Будем говорить, что многообразие M является однородно неразложимым многообразием, если оно не разлагается в прямое произведение двух однородных пространств положительных размерностей.

Из леммы 2 работы ([1]) имеем, что если $M = G/U$ однородное пространство, где U собственная замкнутая подгруппа связной компактной группы Ли G, то $r(M) > 0$.

Следовательно, если $W_{n,3}$ разлагается в прямое произведение однородных пространств, то возможны 2 случая:

$$\text{I.}\quad W_{n,3} = M_1 \times M_2 \times M_3$$

$$\text{II.}\quad W_{n,3} = M \times N,$$

где M, M_i $(i = 1, 2, 3)$ однородные пространства ранга 1, а N—однородно неразложимое однородное пространство ранга 2. Известно, что $W_{n,k}$ не имеет кручения и что

$$H(W_{n,k}) = H(S^{2n-1} \times S^{2n-3} \times \cdots \times S^{2n-2k+1}) \quad (4).$$

Из лемм 1 и 2 и предложения 1 следует, что M_i $(i = 1, 2, 3)$, M и N — многообразия типа S, не имеющих кручения, и что

$$\Pi_3(N) = \Pi_3(M) = \Pi_3(M_i) = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Известно, что многообразие $W_{n,n-1} = SU(n)$ не разлагается в прямое произведение ([5]). Поэтому мы будем рассматривать только многообразия $W_{n,3}$ с $n > 4$.

Рассмотрим какие компактные однородные пространства ранга 1 могут участвовать в разложениях I и II.

В работе А. Л. Онищика ([1]) с точностью до изоморфизма перечислены все компактные однородные пространства ранга 1. Разбор всевозможных случаев показывает, что имеет место следующее

Предложение 2. *Из однородных пространств ранга 1 в разложениях $W_{n,3}$ в прямое произведение однородных пространств, могут участвовать только нечетномерные сферы.*

Так как $H(W_{n,3}) = H(S^{2n-1} \times \mu_{2n-3} \times S^{2n-5})$ то ясно, что в однородных разложениях $W_{n,3}$ могут участвовать только сферы размерностей $2n-1$, $2n-3$, $2n-5$.

Ф. Сигрист в своих работах ([6,7]) вычислил гомотопические группы многообразий Штифеля вида $\Pi_{2k+p}(W_{k+m,m})$ где

$$k = 0, 1, 2, 3, \cdots, \text{а} \quad p = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

При сравнении гомотопических групп многообразия $W_{n,3}$ с соответствующими гомотопическими группами сфер соответствующих размерностей, оказывается, что

$$\Pi_q(W_{n,3}) \neq \Pi_q(S^{2n-1}) + \Pi_q(S^{2n-3}) + \Pi_q(S^{2n-5})$$

для некоторых q.

Отсюда следует, что для $n > 4$

$$W_{n,3} \neq S^{2n-1} \times S^{2n-3} \times S^{2n-5}.$$

Получили, что $W_{n,3}$ не разлагается в прямое произведение трех однородных пространств ранга 1.

Из сравнения гомотопических групп следует также, что возможны лишь следующие разложения типа II.

$$\text{II (1).} \quad W_{2k+6,3} = S^{4k+11} \times N_1$$

$$\text{II (2).} \quad W_{24k+3,3} = S^{48k+1} \times N_2,$$

где N_1 и N_2 однородно неразложимые однородные пространства ранга 2.

Теперь рассмотрим, какие однородные пространства ранга 2 могут участвовать в разложениях $W_{n,3}$ в прямое произведение однородных пространств. В работе А. Л. Онищика ([1]) перечислены все компактные однородные пространства ранга 2.

Разбор всевозможных случаев показывает, что имеет место следующее.

Предложение 3. *Из однородных пространств ранга 2 в разложениях $W_{n,3}$ в прямое произведение однородных пространств может участвовать только $W_{m,2}$.*

Дальнейшее сравнение соответствующих гомотопических групп показывает, что если $W_{n,3}$ разлагается в прямое произведение однородных пространств, то возможно лишь следующее разложение

$$W_{24m,3} = S^{48m-1} \times W_{24m-1,2}.$$

Резюмируя все результаты этой работы, мы можем утверждать, что имеет место следующая

Теорема. *Если $n \not\equiv 0 \pmod{24}$, то комплексное многообразие Штифеля $W_{n,3}$ является однородно неразложимым.*

В заключение автор приносит благодарность А. Л. Онищику за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ереванский государственный университет

Վ. Հ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

Շտիֆելի կոմպլեքս բազմաձևությունների մասին

Դիտարկվում են $W_{n,k}$ Շտիֆելի կոմպլեքս բազմաձևությունները։ Լիի այն խմբերը, որոնք տրանզիտիվ են $W_{n,k}$-ի վրա, դեռևս լրիվ ուսումնասիրված չեն։ Այդ պատճառով հետաքրքրություն է ներկայացնում այն հարցը, թե հնարավոր է արդյոք $W_{n,k}$-ն վերլուծել ուղիղ արտադրյալի։

Ապացուցվում է, որ եթե $n \not\equiv 0 \pmod{24}$, ապա $W_{n,3}$-ը չի կարող վերլուծվել համասեռ տարածությունների ուղիղ արտադրյալի։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Л. Онищик*, Матем. сб., 60 (102) 447—485 (1963). [2] *Ж. П. Серр*, Расслоенные пространства, М., ИЛ, 1958, 124—162. [3] *А. Л. Онищик*, Матем. сб. 44 (86) 3—53 (1958). [4] *А. Борель*, Расслоенные пространства, М., ИЛ, 1958, 163—246. [5] *А. Л. Онищик*, Матем. сб., 83 (125), 407—428, (1970). [6] *F. Sigrist*, Comment. Math. Helv., vol. 43, fasc. 2, p. 121—131 (1968). [7] *F. Sigrist*, C. R. Acad. Sci. Paris, Serie A, t. 269, p. 1061—1062 (1969).