ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LII 1971 1

МАТЕМАТИКА

УДК 51.01:518.5

Г. Б. Маранджян

Структуры блоков рекурсивных функций

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 19/XI 1970)

В заметке исследуются некоторые теоретико-структурные свойства систем множеств одноместных частично-рекурсивных функций (ЧРФ), на которых определено некоторое отношение частичного порядка, связанное с определением сложности натурального числа относительно ЧРФ, введенным в (1).

Все термины и утверждения понимаются конструктивно (2-4), хотя из соображений краткости иногда будет опускаться прилагательное „конструктивный". Так, например, будет использоваться термин „множество" вместо термина „конструктивное множество".

Введем предикат M следующим образом (4):

$$M(\alpha, \beta, c) \rightleftharpoons \forall x(!\beta(x) \supset \exists y(\alpha(y) = \beta(x) \,\&\, \lambda(y) \leqslant \lambda(x) + c)),$$

где α и β — переменные, допустимыми значениями которых являются одноместные ЧРФ, x, y, c — переменные для натуральных чисел, символы ! и $\rightleftharpoons$ понимаются как в (3) и λ — примитивно-рекурсивная функция, такая, что

$$\lambda(x) = [\log_2(x+1)].$$

Пусть A — некоторое множество одноместных ЧРФ и α — одноместная ЧРФ (не обязательно принадлежащая A). Определим множество E_α^A следующим образом:

$$E_\alpha^A \rightleftharpoons \urcorner\beta(\exists c M(\alpha, \beta, c) \,\&\, \exists d M(\beta, \alpha, d)),$$

где символ $\urcorner$ используется в том смысле, в каком он введен в (3). Множество E_α^A будем называть блоком, определяемым в A функцией α. Нетрудно убедиться в том, что блок E_α^A, определяемый функцией α, состоит из ЧРФ, обладающих следующими двумя свойствами:

1) все ЧРФ, принадлежащие E_α^A, имеют одну и ту же область значений, совпадающую с областью значений функции α;

2) для любой пары функций из E_α^A найдется такая константа c,

что для любого натурального числа n, принадлежащего области значений функции α, сложности числа n относительно выбранных функций (в смысле определения сложности, данного в ([1]), отличаются не более чем на c. Таким образом, функции, принадлежащие одному и тому же блоку, эквивалентны в том смысле, что они определяют один и тот же тип кодирования натуральных чисел.

Пусть A есть множество одноместных ЧРФ, α и β — ЧРФ. Введем обозначение $E^A_\alpha \leqslant E^A_\beta$ в качестве сокращения для следующего суждения: „E^A_α и E^A_β непусты и выполнено условие $\exists c M(\alpha, \beta, c)$". $E^A_\alpha \leqslant E^A_\beta$ содержательно означает, что функции из E^A_α кодируют натуральные числа „не хуже", чем функции из E^A_β.

Используя рассмотренные в ([4]) свойства предиката M, нетрудно убедиться в том, что введенное отношение $\leqslant$ рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. Введем обозначение A_E для множества таких блоков E^A_α, что $\alpha \in A$.

Теорема 1. *Каково бы ни было примитивно-рекурсивно замкнутое множество A одноместных ЧРФ, можно построить такую двуместную операцию* $\inf_A$, *определенную на A_E, что система* $\langle A_E, \leqslant, \inf_A \rangle$ *будет нижней полуструктурой, обладающей тем свойством, что по каждой финитной структуре S найдется такой правый отрезок множества A_E, в который изоморфно вложима структура S.*

Обозначим через $Ч^1$ множество всех одноместных ЧРФ.

Теорема 2. *Существуют такие двуместные операции* $\inf_Ч$ *и* $\sup_Ч$, *определенные на $Ч^1_E$, что система* $\langle Ч^1_E, \leqslant, \inf_Ч, \sup_Ч \rangle$ *оказывается дистрибутивной структурой, имеющей наибольший и наименьший элементы и какова бы ни была финитная дистрибутивная структура S, найдется такой правый и такой левый отрезки множества $Ч^1_E$, в каждый из которых изоморфно вложима структура S.*

Структуру будем называть плотно упорядоченной в широком смысле, если можно построить такую двуместную операцию int, определенную на носителе структуры, что выполнено следующее условие:

$$\forall xy\, (x < y \supset (x < \mathrm{int}\,(x, y)\,\&\,\mathrm{int}\,(x, y) < y)),$$

где x, y — переменные, допустимой областью значений которых является носитель структуры, а $<$ — отношение строгого порядка в структуре.

Обозначим через Q множество всех одноместных общерекурсивных функций, принимающих все натуральные значения.

Теорема 3. *Существуют такие двуместные операции* $\sup_Q$, $\inf_Q$ *и* int_Q, *определенные на Q_E, что система* $\langle Q_E, \leqslant, \sup_Q, \inf_Q, \mathrm{int}_Q \rangle$ *является дистрибутивной плотно упорядоченной в широком* *смысле структурой, не имеющей ни минимальных, ни максимальных элементов.*

Обозначим через P множество всех одноместных примитивно-рекурсивных функций.

Теорема 4. *Существует такая операция* $\inf_P$, *что система* $\langle P_E, <, \inf_P \rangle$ *— нижняя полуструктура, имеющая бесконечное множество максимальных элементов, но не имеющая минимальных элементов.*

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Հ. Բ. ՄԱՐԱՆՋՅԱՆ

Ռեկուրսիվ ֆունկցիաների խմբակցությունների ցանցեր

Հոդվածում ուսումնասիրվում են մասնակի ռեկուրսիվ ֆունկցիաների (ՄՌՖ) խմբակցությունների որոշ հանրահաշվական հատկություններ։ Մասնակի ռեկուրսիվ ֆունկցիաների տվյալ դասի խմբակցություն կանվանենք տվյալ դասին պատկանող ՄՌՖ-ների ամեն մի բազմություն, որը կազմված է բոլոր այն և միայն այն ֆունկցիաներից, որոնք ունեն արժեքների միևնույն բազմություն և այդ բազմությանը պատկանող բոլոր թվերի բարդությունները նշված ֆունկցիաների նկատմամբ համընկնում են հաստատունի ճշտությամբ։ Խմբակցությունների դասի վրա բնական եղանակով սահմանված է մասնակի կարգավորվածություն։

Ապացուցված է, որ ամեն մի պարզագույն-ռեկուրսիվ փակ ՄՌՖ-ների բազմության խմբակցությունները կազմում են ստորին կիսացանց։ Բոլոր ՄՌՖ-ների բազմության խմբակցությունները կազմում են այնպիսի բաշխական ցանց, որն ունի ամենամեծ և ամենափոքր տարրեր և ցանկացած վերջավոր բաշխական ցանց կարելի է ներդնել այդ ցանցի և ձախ և աջ հատվածների մեջ։

Երրորդ թեորեմում ապացուցված է, որ բոլոր ամենուրեք որոշված ՄՌՖ-ների բազմության խմբակցությունների դասը կազմում է բաշխական խիտ ցանց, որը չունի նվազագույն և առավելագույն տարրեր։

Չորրորդ թեորեմում ապացուցված է, որ պարզագույն ռեկուրսիվ ֆունկցիաների բազմության խմբակցությունների դասը կազմում է ստորին կիսացանց, որն ունի առավելագույն տարրեր, բայց չունի նվազագույն տարրեր։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Н. Колмогоров.* Проблемы передачи информации, т. 1, вып. 1, 3—11, М., 1965. [2] *А. А. Марков.* Труды Математического института им. В. А. Стеклова, т. LXVII, 8—14, М.—Л. (1962). [3] *Н. А. Шанин.* Труды Математического института им. В. А. Стеклова, т. LXVII, 15—294, М.—Л. (1962). [4] *Г. Б. Маранджян,* «Известия АН Арм. ССР», сер. математика, т. 4, № 1, 3—22 (1969)