ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LII 1971 1

УДК 513.7

МАТЕМАТИКА

Н. Г. Галстян

Инвариантное оснащение изотропных поверхностей одного класса

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 28/IX 1970)

В предыдущих статьях ([1-3]) автора указывается метод конкретного выбора вектора нормали и дается общий метод инвариантного оснащения для случая просто-регулярных и просто-нерегулярных изотропных гиперповерхностей, за исключением некоторых особых классов, требующих специального изучения. В работе ([4]), с помощью произвольных векторов $\underset{a}{n}^{\alpha}$, производится оснащение V^p_m, вводится версор, определяются компоненты вторых квадратичных форм, коэффициенты аффинной связности, тензор кривизны изотропной поверхности.

В данной работе автору удается указать метод инвариантного оснащения для случая просто-регулярных изотропных поверхностей V^1_m*

Формулы из работы ([4]) будут приведены с сохранением нумерации формул соответственно в виде (4. 1.5), (4. 2.1.) и т. д.

1. *Преобразование оснащения.* Как видно из формулы (4. 1.6), из $(n-m)$ векторов, нормальных к изотропной поверхности V^p_m, p вектора лежат на касательной гиперповерхности E_m к V^p_m и для оснащении V^p_m появилась необходимость взять произвольные P-вектора $\underset{a}{n}^{\alpha}$, не лежащие на E_m, так, чтобы они с векторами $\underset{q}{n}^{\alpha}$ образовали базис оснащающего E_{n-m}.

Так как векторы $\underset{q}{n}^{\alpha}$ определяются однозначно, с точностью до автоморфизмов

$$\overline{\underset{q}{n}}^{\alpha} = t^s_q n^{\alpha} \quad \text{ранг} \quad (t^s_q) = n - m - \tag{1.1}$$

при котором не меняются коэффициенты аффинной связности, контравариантные компоненты метрического тензора и другие величины, то

---

* Предполагается, что $\alpha, \beta, \gamma, \rho, \sigma, \nu = 1, 2, \cdots, n$;

$i, j, k, l, h \cdots = 1, 2, \cdots, m$,

$a, b, c, d \cdots = 1, 2, \cdots, p$; $q, r, s \cdots = p+1, p+2, \cdots$

$t, f, g = 1, 2, \cdots, (n-m)$

мы будем рассматривать преобразование оснащения в самом общем случае

$$\text{а)}\quad \overline{\underset{q}{n}}{}^{\alpha} = \underset{q}{n}{}^{\alpha};$$

$$\text{б)}\quad \overline{\underset{a}{n}}{}^{\alpha} = q^c_a \underset{c}{n}{}^{\alpha} + t^l_a y^{\alpha}_l; \quad \text{ранг} \quad (q^c_a) = p.$$

$$\text{в)}\quad \overline{\overset{a}{\mu}}{}^{\alpha} = p^a_c \overset{c}{\mu}{}^{\alpha}; \quad \text{ранг} \quad (p^a_c) = p. \tag{1.2}$$

$$\text{г)}\quad \overline{\underset{a}{\lambda}}{}_l = q^c_a \underset{c}{\lambda}{}_l + g_{lk} t^l_a.$$

$$\text{д)}\quad \overline{\overset{a}{\mu}}{}^l = p^a_c \overset{c}{\mu}{}^l.$$

Предположим, что при любом оснащении выполняются условия (4. 1.7), (4. 1.8б), (4. 1.8с), т. е. коэффициенты преобразования удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\text{а)}\quad a_{\alpha\beta} \overline{\underset{a}{n}}{}^{\alpha} \overline{\underset{c}{n}}{}^{\beta} = \sum_d l_d q^d_a q^d_c + 2q^d_c t^h_a \underset{d}{\lambda}{}_h + $$

$$+ g_{eh} t^l_a t^h_c = \begin{cases} l_a; & a = c \\ 0; & a \neq c \end{cases}; \tag{1.3}$$

$$\text{б)}\quad a_{\alpha\beta} \overline{\underset{a}{n}}{}^{\alpha} \overline{\overset{c}{\mu}}{}^{\beta} = p^c_d q^d_a = \delta^c_a.$$

Ввиду того, что матрицы (p^a_b) и (q^b_c) невырожденные и являются взаимно обратными, имеем

$$p^d_a q^c_d = \delta^c_a. \tag{1.4}$$

Законы преобразований коэффициентов аффинной связности и тензоров вторых квадратичных форм имеют вид

$$\overline{\Gamma}{}^l_{ij} = \Gamma^l_{ij} - t^l_a p^a_c \overset{c}{b}{}_{ij} \tag{1.5}$$

$$\overline{\overset{q}{b}}{}_{ij} = \overset{q}{b}{}_{ij}; \tag{1.6}$$

$$\overline{\overset{a}{b}}{}_{ij} = p^a_c \overset{c}{b}{}_{ij}. \tag{1.7}$$

Закон преобразования основных тензоров запишется в виде

$$\overline{g}{}^{ij} = g^{ij} + 2p^a_c \left(t^h_a \underset{d}{\lambda}{}_h \overset{d}{\mu}{}^i \overset{c}{\mu}{}^j - \overset{c}{\mu}{}^{(i} t^{j)}_a\right); \tag{1.8}$$

$$\overline{c}{}^{ij} = g^{ij} - 2p^a_c \left(t^h_a \underset{d}{\lambda}{}_h \overset{d}{\mu}{}^i \overset{c}{\mu}{}^j - \overset{c}{\mu}{}^{(i} t^{j)}_a\right) + \sum_a p^a_c p^a_d \overset{c}{\mu}{}^i \overset{d}{\mu}{}^j. \tag{1.9}$$

2. *Инвариантное оснащение* V^1_m. Рассмотрим изотропные поверхности, ранг метрического тензора которых равен $(m-1)$. Оказывается, что в случаях таких поверхностей можно осуществлять инвариантное оснащение таким же способом, как и в случае изотропных гиперповерхностей ([3]).

Определение: изотропную поверхность V^1_m будем называть а) регулярной, если ранг $(\overset{a}{b}_{ij}) = (m-1)$, и б) нерегулярной, если ранг $(\overset{a}{b}_{ij}) = m-1-k,\ k > 0$.

Аналогичным образом определяются тензор $\overset{a}{b}{}^{ij}$, скаляры σ и ρ и производится конкретный выбор — „нормирование" изотропного вектора нормали $\overset{a}{\bar{\mu}}{}^{\alpha} = \frac{1}{\sigma}\overset{a}{\mu}{}^{\alpha}$.

С помощью скаляра ρ, который является инвариантом, однозначно, инвариантным образом определяется вектор $\underset{a}{n}{}^{\alpha}$ из уравнений

$$\text{а)}\quad a_{\alpha\beta}\underset{a}{n}{}^{\alpha}y^{\beta}_{i} = \lambda_i; \qquad \text{б)}\quad a_{\alpha\beta}\underset{a}{n}{}^{\alpha}\underset{p}{n}{}^{\beta} = 0; \tag{2.1}$$

$$\text{в)}\quad a_{\alpha\beta}\underset{a}{n}{}^{\alpha}\underset{a}{n}{}^{\beta} = l_a,\ \text{где}\ l_a = \pm 1\ \lambda_i = \frac{\partial\rho}{\partial x^i} \Big/ \mu^i\frac{\partial\rho}{\partial x^i},$$

который с векторами $\underset{p}{n}{}^{\alpha}$ образует базис оснащающего E_{n-m}.

Укажем также и второй способ инвариантного оснащения. После конкретного выбора изотропного вектора нормали из уровней

$$\mu^k\mu^i_{,k} = \tau\mu^i \tag{2.2}$$

следует, что τ является инвариантом. Имеет место следующая

Теорема 1: *Если для случая просто-регулярных V^1_m скаляр $\tau = 0$, то уравнения*

$$\begin{aligned} &\text{а)}\quad a_{\alpha\beta}n^{\alpha}\mu^{\beta}_{,1}y^{1}_{k} = 0;\\ &\text{б)}\quad a_{\alpha\beta}n^{\alpha}\underset{q}{n}{}^{\beta} = 0;\\ &\text{в)}\quad a_{\alpha\beta}n^{\alpha}n^{\beta} = 1;\\ &\text{г)}\quad a_{\alpha\beta}n^{\alpha}\mu^{\beta} = 1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

однозначно определяют вектор n^{α}, который с векторами $\underset{q}{n}{}^{\alpha}$ образует базис оснащающего E_{n-m}.

Решить задачу инвариантного оснащения $V^p_m\ (p > 1)$ таким способом, как для V^1_m, не удается, так как

$$\overset{c}{\mu}{}^i\overset{a}{b}_{ij} \neq 0,\quad a \neq c$$

и скаляр σ — не является инвариантом

В заключение автор выражает искреннюю благодарность профессору А. З. Петрову за ценные замечания.

Ереванский государственный
университет

Ն. Գ. ԳԱԼՍՏՅԱՆ

Իզոտրոպ մակերևույթների մի դասի ինվարիանտ հագեցումը

Այս հոդվածը, ըստ էության, հանդիսանում է ([1]) աշխատության շարունակությունը, որտեղ դիտարկվում էր ռիմանյան V_n տարածության իզոտրոպ V_m^p մակերևույթները, որոնց մետրիկական տենզորի ռանգը փոքր էր m-ից։ V_m^p-ի ոչ ինվարիանտ հագեցման միջոցով որոշված էին մակածված կապակցության գործակիցները, երկրորդ տենզորները, ներմուծված էր վերսոր, որը կարևոր դեր է խաղում մակերևույթների երկրաչափության մեջ։

Այս հոդվածում դիտարկվում է հագեցման ձևափոխությունը։ Արտածվում է հիմնական տենզորների ձևափոխության օրենքը՝ հագեցման ձևափոխման ժամանակ և նշվում է V_m^1 տարածության ինվարիանտ հագեցման երկու մեթոդ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Г. Галстян*, Сб. «Гравитация и теория относительности», вып. 4—5, изд. КГУ, 1968. [2] *Н. Г. Галстян*, ДАН Арм. ССР, т. XLIX, № 4 (1969). [3] *Н. Г. Галстян*, ДАН Арм. ССР, т. L, № 3 (1970). [4] *Н. Г. Галстян*, ДАН Арм. ССР, т. L, № 5 (1970). [5] *А. Е. Либер*, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. 13, М., 407—446, 1968. [6] *В. А. Атанасян*, ДАН СССР, 98, 15, 701—704 (1954).