

ВКЛАД ОТДЕЛЬНЫХ ГАРМОНИК В МОЩНОСТЬ СИНХРОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ КРУГОВОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ

С.Е. БОЙЧЕНКО*

Адыгейский государственный университет,
Кавказский математический центр, Майкоп, Россия

*e-mail: boychenkos@mail.ru

(Поступила в редакцию 5 декабря 2025 г.)

Теоретически и численно исследованы характеристики синхротронного излучения круговой поляризации. Получены аналитические выражения для парциальных вкладов в мощность синхротронного излучения как в нерелятивистском, так и в ультрарелятивистском случаях. Показано, что для каждой гармоники наблюдается максимум её парциального вклада. Как и в случае линейной поляризации, для каждой пары соседних гармоник существует пороговая скорость частицы, при которой вклад гармоники с большим номером становится более существенным.

1. Введение

Недавние обзорные статьи [1–5] свидетельствуют о том, что синхротронное излучение (СИ), благодаря своим уникальным свойствам, продолжает играть важную роль как в фундаментальных исследованиях, так и в прикладных областях – от традиционной астрофизики [1, 2] до современных медицинских приложений [5]. Постоянно открываются новые возможности и обнаруживаются ранее неизученные свойства СИ. Среди многочисленных направлений исследований особое место занимает новый эффект, теоретически предсказанный, как это часто бывает в физике, и ожидающий экспериментального подтверждения. Таким эффектом, открытым в начале XXI века, является эффект деконцентрации [6]. Эффект заключается в отклонении максимальной мощности в угловом распределении каждой гармоники СИ от плоскости орбиты. Это принципиально противоречит известному поведению угловых профилей для полной мощности СИ.

Подробный обзор важных достижений в теоретических исследованиях СИ и обширный список литературы приведены в [7]. Результаты этих работ побудили к более детальному изучению поведения спектрального максимума излучения, а также справедливости этого утверждения для отдельных компонент поляризации [8]. В частности, в [9] рассмотрено спектральное распределение мощности синхротронного излучения круговой поляризации в верхней полуплоскости. В [10] обосновано введение нового понятия эффективной спектральной ширины для точного количественного описания спектральных свойств (СП). Эти характеристики позволяют получить новую физически важную количественную информацию о структуре спектральных распределений. Следует отметить, что описанное

поведение угловых профилей с точки зрения квантовой теории не меняется и подтверждает классический результат [11, 12].

С другой стороны, при исследовании влияния спина электрона на эффект деконцентрации было выявлено различие в приближениях между выводами квантовой и классической теорий. Кроме того, в недавних работах [13] была обоснована новая угловая характеристика для более точного анализа СИ.

Для более глубокого анализа свойств СИ были введены новые параметры, такие как парциальные вклады отдельных гармоник в мощность СИ и точные количественные характеристики степени угловой концентрации СИ (например, эффективный угол излучения и угол отклонения). Поскольку исследования, описанные в [7], были сосредоточены преимущественно на линейной поляризации СИ, ряд вопросов остался нерешённым. В частности, не исследовался вопрос о парциальных вкладах отдельных спектральных гармоник в мощность СИ круговой поляризации. Изучению этого вопроса и посвящена данная работа.

2. Теория

Как известно из классической теории СИ, спектральное распределение мощности излучения круговой поляризации можно представить следующим образом:

$$W_l^{(+)}(v, \beta) = \frac{Q_0}{4\beta^3} \Psi_l(v, \beta), \quad Q_0 = \frac{ce^2\beta^4}{R^2}, \quad (1)$$

$$\Psi_l(v, \beta) = v \left[2\beta^2 J'_{2v}(2v\beta) - (1 - \beta^2) \int_0^{2v\beta} J_{2v}(y) dy + 2l\beta J_v^2(v\beta) \right], \quad (2)$$

$$W_0^{(+)}(v, \beta) = \frac{Q_0}{2\beta^3} \Psi_0(v, \beta), \quad \Psi_0(v, \beta) = \frac{1}{2} (\Psi_{+1}(v, \beta) + \Psi_{-1}(v, \beta)), \quad (3)$$

где e – заряд частицы, $v = \beta c$ – ее скорость, c – скорость света, R – радиус орбиты, v – номер гармоники. Индекс l характеризует поляризацию излучения $l = +1$ соответствует правой круговой поляризации, $l = -1$ – левой круговой поляризации.

После суммирования по спектру из (1)–(3) можно получить выражения для поляризационных компонент и полной мощности СИ как функции скорости:

$$W_l^{(+)}(\beta) = \sum_{v=1}^{\infty} W_l^{(+)}(v, \beta), \quad l = 0, +1, -1, \quad (4)$$

$$W_l^{(+)}(\beta) = \frac{1}{2} W_0(\beta) \eta_l(\beta), \quad W_0(\beta) = \frac{2Q_0}{3(1-\beta^2)^2},$$

$$\eta_l(\beta) = \frac{1}{2} + l \frac{3}{8} \chi_1(\beta), \quad \chi_1(x) = \frac{4(1-x^2)}{x^2} \sum_{v=1}^{\infty} v J_v^2(vx), \quad (5)$$

$$W_0^{(+)}(\beta) = W_{+1}^{(+)}(\beta) + W_{-1}^{(+)}(\beta) = \frac{1}{2} W_0(\beta) \quad (6)$$

Также как и в [7] будем определять парциальный вклад гармоники v в мощность излучения по формуле:

$$P_v^{(l)}(\beta) = W_l(v)/W_l, \quad l = 0, +1, -1. \quad (7)$$

Парциальный вклад представляет собой долю, вносимую излучением на v -гармонике в общую излучаемую мощность при заданном значении β . Очевидно, что для фиксированного номера гармоники v парциальный вклад левой и правой круговой поляризации синхротронного излучения $P_v^{(l)}(\beta)$ является функцией скорости.

Имеет место следующее равенство:

$$\sum_{v=1}^{\infty} P_v^{(l)}(\beta) = 1. \quad (8)$$

В работе [14] проведен полный анализ зависимости парциального вклада линейной составляющей СИ от номера гармоники ν , поляризации излучения и энергии частицы. В частности, численно исследован парциальный вклад основной и высших гармоник. При этом обнаружены новые особенности, а именно, скорости $\beta_\nu^{(l)}$, в которых достигаются максимальные значения парциального вклада, существенно отличаются от тех значений скоростей, при которых в сумме $W_i = \sum_{\nu=1}^{\infty} W_i(\nu)$ максимальным является слагаемое $W_i(\nu)$. Здесь индекс i характеризует линейную поляризацию СИ.

Несмотря на обширное исследование в [14] не рассматривался вопрос о поведении парциального вклада в мощность синхротронного излучения для круговой поляризации. Поэтому, следуя логике работы [14], имеет смысл рассматривать СИ круговой поляризации только в верхней (нижней) полуплоскости.

Изучим поведение функции $P_\nu^{(l)}(\beta)$ во всей области изменения параметров $1 \leq \nu < \infty$, $0 \leq \beta \leq 1$ для круговой поляризации излучения.

Для этого будем использовать обозначения, принятые в [14]

$$P_\nu^{(l)}(\beta) = (1 - \beta^2)q_\nu^{(l)}(\beta), \quad l = 0, \pm 1. \quad (9)$$

Тогда из (1) и (3) получим, что

$$q_\nu^{(l)}(\beta) = \frac{3\Psi_l(\nu, \beta)}{4\beta^3\eta_l(\beta)}, \quad l = \pm 1, \quad q_\nu^{(0)}(\beta) = \frac{3\Psi_0(\nu, \beta)}{2\beta^3}. \quad (10)$$

Используя представления функций Бесселя [15] степенными рядами

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \quad (11)$$

$$J_\nu^2(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(2\nu+2k+1)}{\Gamma(2\nu+k+1)\Gamma^2(\nu+k+1)k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

а также то, что выражение $q_\nu^{(0)}(\beta)$ из (10) совпадает с выражением (7) работы [14]

$$q_\nu^{(0)}(\beta) = 3\nu^2 \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [2(\nu+k)^3 - (\nu+k)^2 - \nu - k + 2\nu^2]}{[4(\nu+k)^2 - 1]k!\Gamma(2\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \quad x = 2\nu\beta \quad (12)$$

получим следующие разложения в ряд для функций $\Psi_l(\nu, \beta)$, $l = 0, \pm 1$:

$$\Psi_0(\nu, \beta) = \frac{2\beta^3}{3} q_\nu^{(0)}, \quad \Psi_l(\nu, \beta) = \Psi_0(\nu, \beta) + 2l\nu\beta J_\nu^2(\nu\beta) \quad (13)$$

$$\Psi_0(\nu, \beta) = 2\beta \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(2\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} M_0, \quad M_0 = \frac{2(\nu+k)^3 - (\nu+k)^2 - \nu - k + 2\nu^2}{4(\nu+k)^2 - 1}.$$

$$2\nu\beta J_\nu^2(\nu\beta) = \frac{1}{2^{2\nu-1}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu} \nu\beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(2\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} M_1,$$

$$M_1 = \frac{\Gamma(2\nu+2k+1)}{\Gamma^2(\nu+k+1) \cdot 2^{2k}},$$

$$\Psi_l(\nu, \beta) = \beta \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(2\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \left(\frac{2^{2\nu}M_0 + lM_1\nu}{2^{2\nu-1}}\right), \quad (14)$$

$$q_\nu^{(l)}(\beta) = \frac{3\nu^2}{4\eta_l(\beta)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(2\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \left(\frac{2^{2\nu}M_0 + lM_1\nu}{2^{2\nu-1}}\right). \quad (15)$$

Так как ряды (12) и (15) сходятся абсолютно и равномерно для всех комплексных x , то их удобно использовать для качественного и численного исследования поведения функций $q_\nu^{(l)}(\beta)$, $P_\nu^{(l)}(\beta)$.

В нерелятивистском случае ($\beta \ll 1$), имеем:

$$q_v^{(l)}(\beta) = \frac{3v^2(v\beta)^{2v-2}}{\eta_l(\beta)\Gamma(v)2^{2v+1}} \left[\frac{(v+1)\sqrt{\pi}}{2\Gamma(v+3/2)} + \frac{l}{v\Gamma(v)} \right].$$

Значение выражения $P_v^{(0)}(\beta)$ берем из [7]

$$\begin{aligned} q_v^{(l)}(\beta) &\approx P_v^{(l)}(\beta), P_v^{(0)}(\beta) \approx \frac{3(v+1)v^2(v\beta)^{2v-2}}{2(2v+1)\Gamma(2v)}, \\ P_v^{(l)}(\beta) &\approx \frac{3v^3(v\beta)^{2v-2}(2^{2v}(v+1)\Gamma^2(v+1)+l\Gamma(2v+2))}{\eta_l(\beta)\Gamma(2v+2)\cdot 2^{2v+1}\Gamma^2(v+1)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (16) следует, что в нерелятивистском случае для первой гармоники получаем такой же результат, как и при линейной поляризации СИ: $P_1^{(l)}(0) = q_1^{(l)}(0) = 1$, а для других гармоник ($v > 1$)

$$P_v^{(l)}(0) = q_v^{(l)}(0) = 0, \quad l = \pm 1, 0. \quad (17)$$

Сравним $q_v^{(+1)}(\beta)$, $q_v^{(-1)}(\beta)$, $q_v^{(0)}(\beta)$ в нерелятивистском случае. Преобразуем $q_v^{(l)}$, $l = \pm 1$ к виду:

$$q_v^{(l)}(\beta) \approx \left[\frac{1}{2\eta_l(\beta)} + l \frac{\Gamma(2v+2)}{(v+1)2^{2v+1}\Gamma^2(v+1)\eta_l(\beta)} \right] q_v^{(0)}(\beta).$$

Для больших номеров гармоник ($v \rightarrow \infty$) имеем, что $\frac{\Gamma(2v+2)}{(v+1)2^{2v+1}\Gamma^2(v+1)\eta_l(\beta)} \rightarrow 0$, и тогда $q_v^{(l)} \approx \frac{q_v^{(0)}}{2\eta_l(\beta)}$. Учитывая, что $\eta_{+1}(0) = \frac{7}{8}$, $\eta_{-1}(0) = \frac{1}{8}$, окончательно получаем:

$$\begin{aligned} q_v^{(+)}(\beta) &\approx \frac{4}{7}q_v^{(0)}, \quad q_v^{(-)}(\beta) \approx 4q_v^{(0)} \\ q_v^{(+1)}(\beta) &< q_v^{(0)}(\beta) < q_v^{(-1)}(\beta) \Rightarrow P_v^{(+1)}(\beta) < P_v^{(0)}(\beta) < P_v^{(-1)}(\beta), \\ &v > 1, \quad 0 < \beta \ll 1. \end{aligned} \quad (18)$$

В ультрарелятивистском случае $\gamma \gg 1$ ($\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$) при нахождении асимптотики получаем такое же выражение, как и формула (12) из [7]:

$$P_v^{(l)}(\beta \leq 1) \approx \frac{q_v^{(l)}}{\gamma^4}, \quad P_v^{(l)}(1) = 0. \quad (19)$$

Как следует из (17) и (19), на концах отрезка $[0, 1]$ неотрицательные функции $P_v^{(l)}(\beta)$ ($v > 1$) обращаются в нуль, поэтому внутри этого отрезка найдется такая точка $\beta = \beta_v^{(l)} \left(\gamma = \gamma_v^{(l)} = 1/\sqrt{1 - (\beta_v^{(l)})^2} \right)$, в которой всякая функция $P_v^{(l)}(\beta)$ ($v > 1$) достигает максимального значения $\overline{P_v^{(l)}} = P_v^{(l)}(\beta_v^{(l)})$ ($v > 1$).

Для больших значений номера гармоники в ультрарелятивистском случае воспользуемся аппроксимацией функций Бесселя и их производных модифицированными функциями Бесселя $K_{2/3}$, $K_{1/3}$ [15]. Тогда, с учетом обозначений, получим:

$$\begin{aligned} y = \frac{2v}{3\gamma^3} &\Rightarrow \gamma = v^{1/3}(2/3y)^{1/3}, \\ P_v^{(l)}(\beta) &\approx \frac{1}{v}\psi_l(y), \quad q_v^{(l)}(\beta) \approx (2/3)^{4/3}y^{-4/3}\psi_l(y)v^{1/3}. \end{aligned} \quad (20)$$

$$J_{2\nu}(2\nu\beta) \approx \frac{1}{\gamma\pi\sqrt{3}}K_{1/3}(\gamma), J_{2\nu}(2\nu\beta) \approx \frac{1}{\gamma^2\pi\sqrt{3}}K_{2/3}(\gamma),$$

$$\int_0^{2\nu\beta} J_{2\nu}(\gamma) d\gamma \approx \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_\gamma^\infty K_{1/3}(x) dx. \quad (21)$$

Отметим, что аппроксимация $\psi_0(\gamma)$ была получена в [7]

$$\psi_0(\gamma) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \gamma^2 \left[2K_{2/3}(\gamma) - \int_\gamma^\infty K_{1/3}(x) dx \right], \quad (22)$$

$$\psi_l(\gamma) = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \gamma^2 \left(2K_{2/3}(\gamma) - \int_\gamma^\infty K_{1/3}(x) dx + 2l \frac{K_{1/3}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\pi\sqrt{3}} \right). \quad (23)$$

Используя (22) и (23) при больших ν , находим следующие асимптотики:

$$q_\nu^{(0)}(\beta) \approx \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{6}{3^7} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{2\pi} \approx 0.776458\nu^{\frac{1}{3}}, \quad (24)$$

$$q_\nu^{(l)}(\beta) \approx \frac{2}{3} q_\nu^{(0)}(\beta) + l \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right) \sqrt[3]{36}}{6\pi^2} \nu^{\frac{1}{3}},$$

$$q_\nu^{(+)}(\beta) \approx 0.874389\nu^{\frac{1}{3}}, q_\nu^{(-)}(\beta) \approx 0.3927302\nu^{\frac{1}{3}}. \quad (25)$$

В результате при $\gamma \gg 1$, неравенства (18) заменяются на противоположные:

$$q_\nu^{(-)}(1) < q_\nu^{(0)}(1) < q_\nu^{(+)}(1) \Rightarrow P_\nu^{(-1)}(\beta) < P_\nu^{(0)}(\beta) < P_\nu^{(+1)}(\beta). \quad (26)$$

Определение точек максимума $\gamma_\nu^{(l)}$ в асимптотическом случае сводится, как и в [14], к решению уравнений:

$$\psi_l'(\gamma_l) = 0. \quad (27)$$

Вычислим производную:

$$\left(\gamma^2 \left(2K_{2/3}(\gamma) - \int_\gamma^\infty K_{1/3}(x) dx \right) \right)' =$$

$$= 4\gamma K_{2/3}(\gamma) + 2\gamma^2 K_{2/3}'(\gamma) - 2\gamma \int_\gamma^\infty K_{1/3}(x) dx - \left(\gamma^2 \int_\gamma^\infty K_{1/3}(x) dx \right)'. \quad (28)$$

При этом используем следующие формулы дифференцирования:

$$K_\nu'(x) = -\frac{\nu}{x} K_\nu(x) - K_{1-\nu}(x),$$

$$\int_\gamma^\infty K_{1/3}(x) dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2} \gamma K_{1/3}(\gamma) - \frac{3}{2} \int_0^\gamma x K_{2/3}(x) dx. \quad (29)$$

Окончательно имеем:

$$\phi_0(\gamma) = 8K_{\frac{2}{3}}(\gamma) - 3\gamma K_{\frac{1}{3}}(\gamma) - 6 \int_\gamma^\infty K_{\frac{1}{3}}(x) dx, \quad (30)$$

$$\phi_l(\gamma) = \phi_0(\gamma) + \frac{6l}{\pi\sqrt{3}} \left(\frac{4}{3} K_{1/3}^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) - \gamma K_{1/3}\left(\frac{\gamma}{2}\right) K_{2/3}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \right), l = \pm 1. \quad (31)$$

Отметим, что формула (30) полностью совпадает с выражением (17) из [14].

Определяя из уравнений $\phi_l(\gamma_l) = 0$ числа γ_l , получим

$$\overline{P_\nu^{(l)}} \approx \frac{\psi_l(\gamma_l)}{\nu}, \gamma_\nu^{(l)} = a_l \nu^{1/3}, a_l = \left(\frac{2}{3\gamma_l} \right)^{1/3}, l = \pm 1. \quad (32)$$

Выражение для $\psi_0(\gamma_0)$ имеет такой же вид, как и в работе [14]:

$$\psi_0(\gamma_0) = \frac{3\sqrt{3}}{16\pi} \gamma_0^2 \left(4K_{\frac{2}{3}}(\gamma_0) + 3\gamma_0 K_{\frac{1}{3}}(\gamma_0) \right). \quad (33)$$

Находим $\psi_l(\gamma_l)$:

$$\psi_l(y_l) = \frac{\sqrt{3}}{8\pi} y_l^2 \times \left(4K_{2/3}(y_l) + 3y_l K_{1/3}(y_l) + \frac{l}{\pi\sqrt{3}} \left(4K_{1/3}^2\left(\frac{y_l}{2}\right) + 6y_l K_{1/3}\left(\frac{y_l}{2}\right) K_{2/3}\left(\frac{y_l}{2}\right) \right) \right). \quad (34)$$

Полученные выражения являются основой для последующего численного анализа.

3. Численный анализ парциальных вкладов гармоник

Для основной гармоники $\nu = 1$, результаты численного расчета величин $P_\nu^{(l)}(\beta)$ представлены на рис. 1а. Из рисунка видно, что все функции $P_1^{(l)}(\beta)$ являются монотонно убывающими (от 1 до 0) функциями и на всем интервале $0 < \beta < 1$ выполняются неравенства $P_1^{(-1)}(\beta) < P_1^{(0)}(\beta) < P_1^{(+1)}$, которые аналогичны неравенствам (26) и обратны неравенствам (18).

Графики функций $q_1^{(l)}(\beta)$ представлены на рис. 1б. Из рисунка видно, что все $q_1^{(l)}(\beta)$ ($l = \pm 1, 0, 2$) являются убывающими, выпуклыми вверх функциями. Для этих функций на всем полуинтервале $0 < \beta \leq 1$ справедливо неравенство:

$$q_1^{(-)}(\beta) < q_1^{(0)}(\beta) < q_1^{(+)}(\beta).$$

В точке $\beta = 1$ имеем $q_1^{(+)}(1) \approx 0.807544$, $q_1^{(0)}(1) \approx 0.67167$, $q_1^{(-)}(1) \approx 0.202149$.

Парциальные вклады высших гармоник представлены графиками функций $P_\nu^{(l)}(\beta)$ ($\nu = 2 - 10$) на рис. 2–3, графиками функций $q_1^{(l)}(\beta)$ ($\nu = 2 - 10$) – рис. 4–5. Численные значения параметров этих функций приведены в табл. 1.

Из этих графиков, таблицы и асимптотической формулы (32) следует, что для $\beta \leq \beta_\nu^{(i)}$ функции $P_\nu^{(i)}(\beta)$ с ростом ν убывают

$$P_{\nu+1}^{(i)}(\beta) < P_\nu^{(i)}(\beta), \beta \leq \beta_\nu^{(i)}, \quad (35)$$

но при приближении β к правому концу интервала ($\beta \rightarrow 1$) для каждого значения β возникает конечная область значений $\nu < \nu_0(\beta)$, для которых неравенство (35) меняется на противоположное:

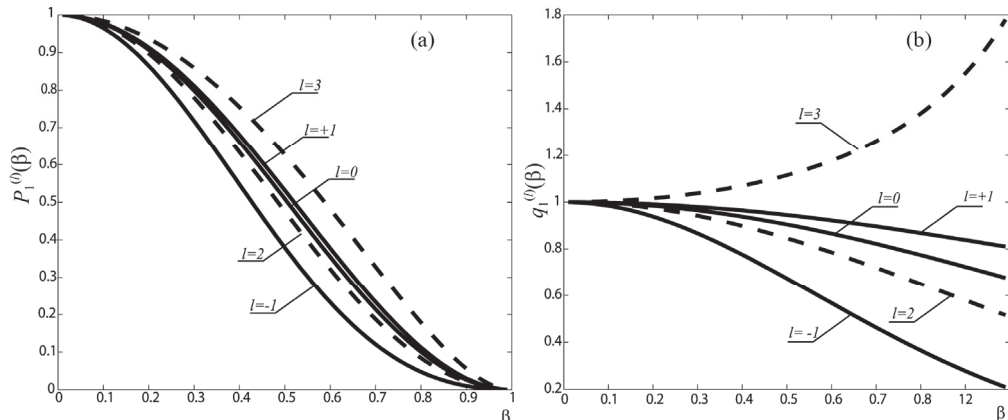


Рис.1. (а) Парциальный вклад первой гармоники в мощность СИ круговой поляризации. (б) Графики функций $q_1^{(l)}(\beta)$.

Табл.1. Численные значения характерных параметров функций $\psi_l(y)$, $P_v^{(l)}(\beta), l = \pm 1$

v	l = 1			l = -1		
	$\beta_v^{(+)}$	$\gamma_v^{(+)}$	$\overline{P_v^{(+)}}$	$\beta_v^{(-)}$	$\gamma_v^{(-)}$	$\overline{P_v^{(-)}}$
2	0.53197	1.18097	0.26296	0.45927	1.12575	0.29801
3	0.64799	1.31294	0.15899	0.58263	1.23041	0.18544
4	0.70999	1.42003	0.11446	0.65291	1.32024	0.13466
5	0.74988	1.51153	0.08954	0.69949	1.39930	0.10559
6	0.77818	1.59225	0.07358	0.73307	1.47026	0.08677
7	0.79952	1.66489	0.06247	0.75863	1.53487	0.07359
8	0.81631	1.73126	0.05428	0.77884	1.59433	0.06386
9	0.82994	1.79259	0.04800	0.79531	1.64961	0.05638
10	0.84126	1.84969	0.04302	0.80902	1.70131	0.05045
11	0.85085	1.90328	0.03898	0.82065	1.74999	0.04565
12	0.85910	1.95386	0.03564	0.83066	1.79604	0.04167
13	0.86629	2.00184	0.03282	0.83939	1.83983	0.03832
14	0.87262	2.04750	0.03042	0.84707	1.88153	0.03547
15	0.87824	2.09109	0.02834	0.85390	1.92146	0.03301
16	0.88327	2.13281	0.02653	0.86001	1.95972	0.03087
17	0.88782	2.17301	0.02494	0.86552	1.99651	0.02899
18	0.89194	2.21164	0.02353	0.87053	2.03204	0.02732
19	0.89570	2.24891	0.02227	0.87509	2.06629	0.02583
20	0.89914	2.28487	0.02114	0.87927	2.09941	0.02450
$y_{(+)} = 1.24806$	$\psi_{(+)}(y_{(+)}) = 0.42988$			$a_{(+)} = 0.81138$		
$y_{(-)} = 1.58365$	$\psi_{(-)}(y_{(-)}) = 0.13880$			$a_{(-)} = 0.74946$		

$$P_{v+1}^{(i)}(\beta) > P_v^{(i)}(\beta), \beta_v^{(i)} < \beta < 1. \quad (36)$$

О чем свидетельствуют также асимптотические формулы (19), (25) и графики функций $q_v^{(l)}(\beta)$.

Точки максимумов $\overline{P_v^{(l)}}$ всегда расположены в следующем порядке:
 $\overline{P_v^{(+)}} < \overline{P_v^{(-)}}, v > 1.$

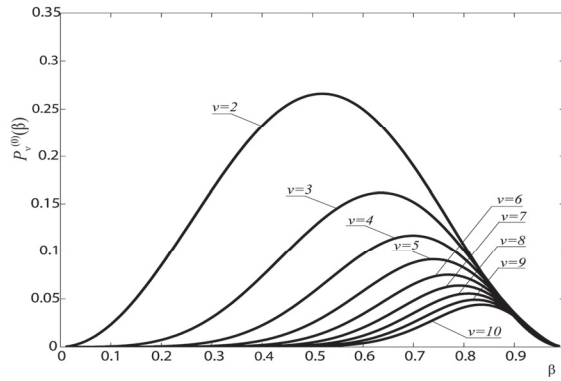


Рис.2. Парциальные вклады в полную мощность круговой поляризации СИ.

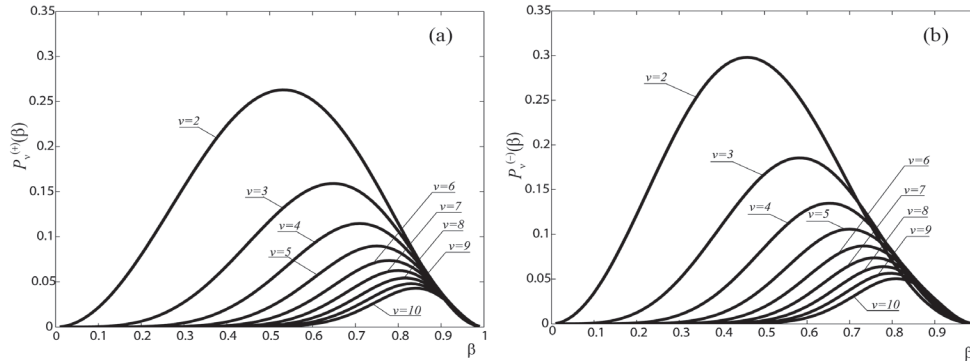


Рис.3. Парциальные вклады $P_v^{(+)}(\beta)$ и $P_v^{(-)}(\beta)$ в соответственно правую и левую компоненты круговой поляризации СИ.

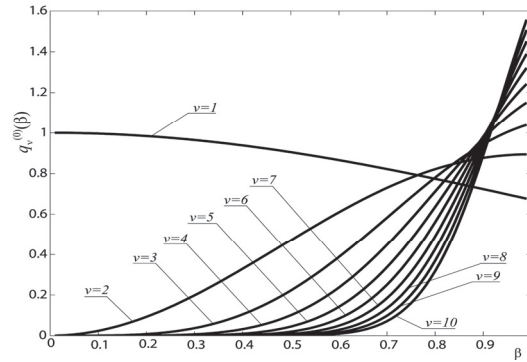


Рис.4. График функций $q_v^{(0)}(\beta)$ для различных номеров гармоник.

4. Заключение

Таким образом, в данной работе получены аналитические выражения для парциальных вкладов отдельных гармоник в мощность СИ круговой поляризации как в нерелятивистском, так и в ультрарелятивистском приближениях. Численными методами определены пороговые скорости частиц, при которых для двух соседних гармоник вклад гармоники с более высоким номером становится более существенным. Также найдены максимальные значения парциальных вкладов для гармоник с номерами от 1 до 20. При этом максимальное излучение на более высоких гармониках достигается при более высоких скоростях частиц.

Автор благодарит профессора В.Г. Багрова за полезное обсуждение и ценные замечания в ходе Ломоносовской конференции по физике элементарных частиц в Московском государственном университете.

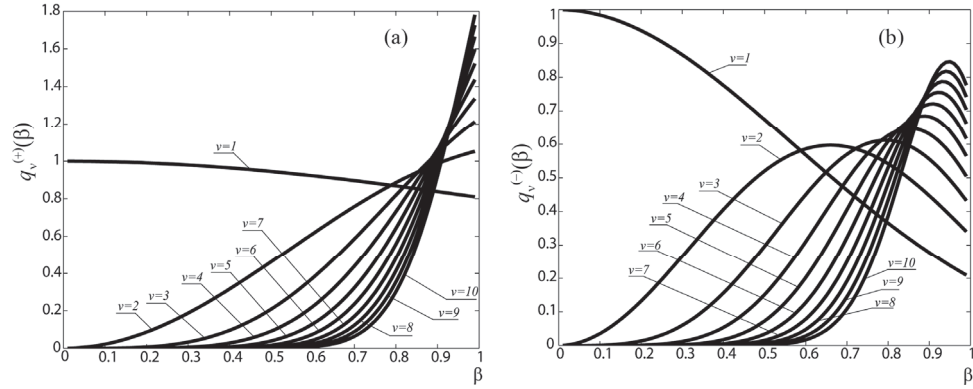


Рис.5. Графики функций $q_V^{(+)}(\beta)$, $q_V^{(-)}(\beta)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **D. Khangulyan, F. Aharonian, C. Romoli, A. Taylor.** The Astrophysical J., **76**, 914 (2021).
2. **E. Orlando, V. Petrosian, A. Strong.** The Astrophysical J., **173**, 943 (2023).
3. **C. Xiao, J. Zhang, Y. Li, M. Xie, D. Sun.** Biomedicines, **1419**, 13 (2025). <https://doi.org/10.3390/biomedicines13061419>.
4. **W. Lu, L. Zhao, Z. Su, J. Li, Q. Hu.** J. Materials Science & Technology, **217**, 29 (2025).
5. **Q. Li, R. Xing, L. Li, H. Yao, L. Wu, L. Zhao.** Artificial Intelligence Chemistry, **2**, 100045 (2024).
6. **V. Bagrov, V. Bulenok, D. Gitman, J. Jara, V. Tlyachev, A. Jarovoi.** Phys. Rev. E, **69**, 046502 (2004).
7. **V. Bagrov.** Russ. Phys. J., **51**, 335 (2008).
8. **A. Loginov, A. Saprykin.** Russ. Phys. J., **61**, 534 (2018).
9. **S. Boychenko.** Russ. Phys. J., **54**, 822 (2011).
10. **V. Bagrov, D. Gitman, A. Levin, A. Loginov, A. Saprykin.** Eur. Phys. J., C **75**, 555 (2015).
11. **M. Dolzhin, A. Yarovoi.** Russ. Phys. J., **48**, 833 (2005).
12. **A. Burimova.** Russ. Phys. J., **55**, 1197 (2013).
13. **V. Bagrov, A. Kasatkina, A. Pecheritsyn.** Symmetry, **12**, 1095 (2020).
14. **V. Bagrov, M. Dolzhin, K. Seravkin, V. Shakhmatov.** Russ. Phys. J., **7**, 49 (2006).
15. **I. Gradshteyn, I. Ryzhik.** Table of Integrals, Series, and Products. Academic press, 2014.

CONTRIBUTION OF INDIVIDUAL HARMONICS TO THE POWER OF CIRCULARLY POLARIZED SYNCHROTRON RADIATION

S.E. BOICHENKO

The characteristics of circularly polarized synchrotron radiation are studied theoretically and numerically. Analytical expressions for partial contributions to the synchrotron radiation power are derived in both the non-relativistic and ultra-relativistic limits. It is demonstrated that for each harmonic exhibits a maximum in its partial contribution. As in the case of linear polarization, for each pair of adjacent harmonics, there is a threshold particle velocity at which the contribution of the harmonic with the higher number becomes more significant.