ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LI 1970 5

УДК 530.1

МЕХАНИКА

Академик АН Армянской ССР А. Г. Назаров

Некоторые свойства трансфинитных действительных чисел

(Представлено 19/X 1970)

Трансфинитные действительные числа, имеющие бесконечно большую величину, будем называть бесконечно большими числами. Трансфинитные действительные числа, величины которых нуль, будем называть бесконечно малыми числами (1).

Каждому положительному бесконечно большому или бесконечно малому числу $f(\omega)$ ставится в соответствие бесконечно большая или бесконечно малая величина $f(n)$ при $n \to \infty$, где $f(n)$ соответственно монотонно возрастающая или монотонно убывающая функция от n. Поэтому для рассматриваемых чисел можно ввести точно такую же классификацию как и для отвечающих им величин.

1. Бесконечно большие числа $f_1(\omega)$ и $f_2(\omega)$ считаются числами одного порядка, если величина их отношения

$$\operatorname{mag}\frac{f_2(\omega)}{f_1(\omega)} = \lim_{n\to\infty}\frac{f_2(n)}{f_1(n)}$$

имеет конечный и отличный от нуля предел.

2. Два бесконечно больших числа $f_1(\omega)$ и $f_2(\omega)$ эквивалентны, если

$$\operatorname{mag}\frac{f_2(\omega)}{f_1(\omega)} = \lim_{n\to\infty}\frac{f_2(n)}{f_1(n)} = 1.$$

3. Бесконечно большое число $f_2(\omega)$ считается числом высшего порядка в сравнении с бесконечно большим числом $f_1(\omega)$, если

$$\operatorname{mag}\frac{f_2(\omega)}{f_1(\omega)} = \lim_{n\to\infty}\frac{f_2(n)}{f_1(n)} = \infty.$$

При желании можно ввести шкалу бесконечно больших чисел, приняв в качестве эталона степени ω, т. е.

$$\omega,\ \omega^2,\ \omega^3, \cdots,\ \omega^n, \cdots\ \omega^\omega, \cdots\ \varphi(\omega)\cdots$$

Здесь число ω является простейшим бесконечно большим числом и его можно рассматривать как единицу для измерения других беско-

нечно больших чисел $f(\omega)$. В основе определения ω есть произвол, заключающийся в том, что какую-то неопределенную бесконечную совокупность единиц мы обозначали через ω. С таким же успехом через ω можно было обозначить ту же бесконечную совокупность, в которой вместо единиц рассматривались элементы, состоящие из 100 единиц, что представляло бы теперь $100\,\omega$ в связи со свойствами ω как действительного числа. Но аналогичный произвол имеется и в выборе единиц для любых конечных величин и мы не испытываем от этого никаких неудобств. Это связано с тем, что в математическом анализе термины не имеют абсолютного значения. Важны лишь соотношения между ними. Например, хотя ω неопределенен, но мы точно знаем, что $\omega + a$ больше, чем ω на a, и что $a\omega$ в a раз больше, чем ω.
Рассмотрим теперь число

$$\frac{1}{\omega} = \varepsilon, \tag{1}$$

где ε — читается повернутое з.
Число это является последним членом следующего отрезка трансфинитной последовательности

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \frac{1}{\omega - k}, \ldots \frac{1}{\omega - 1}, \frac{1}{\omega} = \varepsilon.$$

Всякое другое бесконечно малое число $f_1(\omega)$ можно представить как $f_1(\omega) = f_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = f(\varepsilon)$.

Число ε является простейшим бесконечно малым числом и его можно рассматривать как единицу измерения для любых бесконечно малых чисел $f(\varepsilon)$.

Можно предложить следующую классификацию бесконечно малых чисел.

1. Бесконечно малые числа $f_1(\varepsilon)$ и $f_2(\varepsilon)$ считаются числами одинакового порядка, если величина их отношения

$$\operatorname{mag}\frac{f_2(\varepsilon)}{f_1(\varepsilon)} = \lim_{n\to\infty}\frac{f_2\left(\frac{1}{n}\right)}{f_1\left(\frac{1}{n}\right)}$$

имеет конечный и отличный от нуля предел.

2. Бесконечно малые числа $f_1(\varepsilon)$ и $f_2(\varepsilon)$ эквивалентны, если

$$\operatorname{mag}\frac{f_2(\varepsilon)}{f_1(\varepsilon)} = \lim_{n\to\infty}\frac{f_2\left(\frac{1}{n}\right)}{f_1\left(\frac{1}{n}\right)} = 1.$$

3. Бесконечно малое число $f_2(\varepsilon)$ считается числом высшего порядка, чем бесконечно малое число $f_1(\varepsilon)$, если величина отношения

$$\operatorname{mag}\frac{f_2(\varepsilon)}{f_1(\varepsilon)} = \lim_{n\to\infty}\frac{f_2\left(\frac{1}{n}\right)}{f_1\left(\frac{1}{n}\right)} = 0.$$

При желании можно ввести шкалу бесконечно малых чисел, приняв в качестве эталона степени ε, т. е.

$$\varepsilon^1,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3, \cdots \varepsilon^n, \cdots \varepsilon^\omega, \cdots, \varepsilon^{f(\omega)}, \cdots$$

Приведем примеры.

1. Сравнить бесконечно малые числа ε и $\sin\varepsilon$. Имеем

$$\operatorname{mag}\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Следовательно, ε и $\sin\varepsilon$ эквивалентны.

2. Сравнить ω^3 и $5\omega^2 + \omega$. Имеем

$$\operatorname{mag}\frac{\omega^3}{5\omega^2+\omega} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{5n^2+n} = \infty.$$

Следовательно, бесконечно большое число ω^3 высшего порядка, чем бесконечно большое число $5\omega^2 + \omega$.

Из изложенного вытекает, что бесконечно большие и бесконечно малые числа имеют общую единицу измерения так как $\omega = \frac{1}{\varepsilon}$ и в этом отношении они гораздо ближе между собою, чем конечные числа, имеющие другую систему единиц измерения.

Поэтому если при исследовании какой-либо физической проблемы у нас будут фигурировать бесконечно малые, конечные и бесконечно большие числа, имеющие две различные системы единиц измерения, то конечный результат будет реальным лишь в том случае, если в конечном итоге, решающем проблему, останутся только конечные величины (это условие необходимо, но не достаточно)*.

Изложенное выше наводит на мысль о целесообразности введения понятия о трансфинитном пределе. Его можно формулировать разными способами. Остановимся на простейшем. Рассмотрим отрезок трансфинитного натурального ряда, оканчивающимся членом ω:

$$1,\ 2,\ 3, \cdots, n, \cdots, \omega - k, \cdots, \omega - 1,\ \omega$$

и отвечающую ему некоторую трансфинитную последовательность

$$f(1),\ f(2),\ f(3), \cdots,\ f(n), \cdots, f(\omega - k), \cdots, f(\omega - 1),\ f(\omega).$$

---

* При этом в принципе возможны два пути: в процессе математических операций происходят сокращения типа $\frac{a f(\omega)}{f(\omega)} = a$ или $[a + f(\omega)] - f(\omega)$, где $f(\omega)$ – бесконечно большое число. На этом остановимся подробнее в другой работе.

Будем говорить, что член $f(\omega)$ является трансфинитным пределом последовательности

$$f(1),\ f(2),\ f(3), \cdots,\ f(n), \cdots$$

и обозначать его так

$$\lim_{n \to \omega} f(n) = f(\omega).$$

Таким образом, чтобы формально получить трансфинитный предел достаточно взять член последовательности с номером n и заменить n на ω. Как увидим далее, такое представление трансфинитного предела последовательности достаточно удобно*. Существует простая связь между трансфинитным пределом и пределом в классическом смысле. Для данной последовательности предел в классическом смысле есть $\lim\limits_{n \to \infty} f(n)$.

С другой стороны

$$\operatorname{mag} f(\omega) = \operatorname{mag} \lim_{n \to \omega} f(n) = \lim_{n \to \infty} f(n).$$

Итак, чтобы получить из трансфинитного предела классический предел перед первым нужно поставить символ mag. Приведем простейшие примеры трансфинитного перехода к пределу:

$$1,\ 2,\ 3, \cdots,\ n\ n, \cdots$$

$$0,\ 1,\ 2, \cdots,\ n\ (n-1), \cdots$$

$$2,\ 3,\ 4, \cdots,\ n\ (n+1), \cdots$$

$$1,\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{3^3}, \cdots,\ n\ \frac{1}{n^n}, \cdots$$

Их трансфинитные пределы соответственно равны

$$\lim_{n \to \omega} n = \omega, \quad \lim_{n \to \omega} (n-1) = \omega - 1, \quad \lim_{n \to \omega} (n+1) = \omega + 1, \quad \lim_{n \to \omega} \frac{1}{n^n} = \frac{1}{\omega^\omega}.$$

Для последовательности

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_n, \cdots$$

трансфинитный предел есть a_ω, при оговоренном условии, что каждый из членов a_n определяется непосредственно в функции от номера n [1]. В частности действительное число можно представить в виде

$$a,\ a, \cdots,\ a, \cdots,\ n\ a, \cdots$$

и оно имеет трансфинитный предел

$$a_\omega = a$$

причем

$$\operatorname{mag} a = \lim_{n \to \infty} a = a.$$

---

* При более тонком подходе к некоторым вопросам трансфинитного анализа приходится рассматривать не отрезок трансфинитной последовательности [1, ω], а и его продолжение.

Бесконечно малые числа обладают следующими простыми свойствами:

1) сумма конечного числа бесконечно малых чисел есть бесконечно малое число;

2) произведение конечного числа на бесконечно малое число есть бесконечно малое число;

3) произведение бесконечно малых чисел есть бесконечно малое число;

4) обращенное бесконечно малое число есть бесконечно большое число.

В этих формулировках бесконечно малые величины классического анализа заменены бесконечно малыми числами.

Остановимся теперь на трансфинитных пределах последовательностей, имеющих общий предел:

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

$$b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots$$

причем

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

Отвечающие им трансфинитные пределы суть a_ω и b_ω причем

$$\operatorname{mag} a_\omega = \operatorname{mag} b_\omega = c.$$

Вместе с тем, если начиная с некоторого $n > N$

$$a_n < b_n, \text{ то } a_\omega \prec b_\omega.$$

Поэтому a_ω и b_ω могут различаться между собою лишь на бесконечно малое число. Обстоятельство это можно представить нагляднее, приняв

$$a_n = c + \alpha_n,$$

$$b_n = c + \beta_n,$$

где

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0.$$

Мы видим, что

$$b_\omega - a_\omega = \beta_\omega - \alpha_\omega$$

представляет собою бесконечно малое число.

Рассмотрим последовательность n-ый член которого n $(a + k\varepsilon_n)$, причем a — постоянное действительное число, ε_n — положительное число, причем $\varepsilon_n \to 0$, а k – переменное действительное число, непрерывно пробегающее все значения от $-N$ до $+N$, где N сколь угодно большое натуральное число (не трансфинитное). Здесь по существу имеем множество последовательностей мощности континуум. Все они имеют общий предел a. Трансфинитный предел этой последовательности есть

$$\lim_{n\to\omega} (a + k\varepsilon_n) = a + k\varepsilon_\omega.$$

Величина его равна

$$\operatorname{mag}(a + k\varepsilon_\infty) = \lim_{n\to\infty}(a + k\varepsilon_n) = a.$$

В результате получим множество трансфинитных чисел мощности континуум, содержащихся в „нулевом промежутке" $(a - N\varepsilon_\infty,\ a + N\varepsilon_\infty)$. Величина всех этих чисел равна a. Среди этого множества содержится лишь одно действительное число a (при $k = 0$). Все эти трансфинитные числа упорядочены в точности так, как переменное действительное число k, пробегающее все свои значения от $-N$ до $+N$. Они отличаются от a на бесконечно малые числа. Целесообразность введения понятия о трансфинитных действительных числах покажем на примерах, которые поневоле не будут очень строгими из-за недостатка места.

Рассмотрим классическую числовую прямую. На точку $x = a$ мысленно насадим полученный выше нулевой отрезок $(a + k\varepsilon_\infty)$. Для этого точка $x = a$ должна совпасть с точкой $(a + k\varepsilon_\infty)$ при $k = 0$. В результате этой операции не произойдет никакого нарушения в расположениях точек нулевой и числовой прямых.

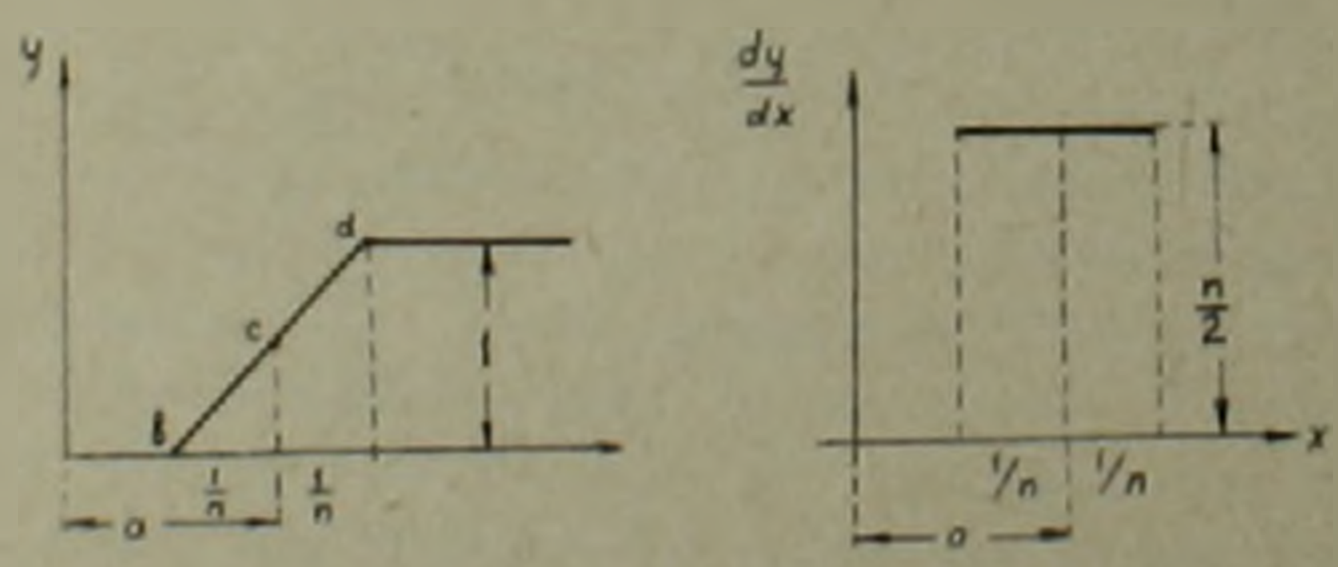
Теперь приведем пример трансфинитного анализа поведения неравномерно сходящейся последовательности функций при простейшем значении $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$.

Рассмотрим последовательность функций $n\ y_n(x)$, заданную следующим образом:

$$x \leqslant a - \frac{1}{n},\ y_n = 0;\quad a - \frac{1}{n} < x \leqslant a + \frac{1}{n},$$

$$y_n = \frac{n}{2}\left[x - \left(a - \frac{1}{n}\right)\right]\quad x > a + \frac{1}{n},\ y_n = 1. \qquad (*)$$

На рис. 1, приведено графическое изображение этой функции (a) и ее производной ($б$).



а Рис. 1 *б*

С точки зрения классического анализа после перехода к пределу получим следующую функцию $y(x)$:

при

$$x < a, \quad y = 0;$$

$$x = a, \quad y = \frac{1}{2};$$

$$x > a, \quad y = 1.$$

Таким образом в точке $x = a$ имеет место скачок функции, причем

$$y(a-0) = 0, \; y(a) = \frac{1}{2}, \quad y(a+0) = 1.$$

Осуществим теперь трансфинитный переход к пределу. Мы знаем, что

$$\lim_{n \to \omega} n = \omega, \; \lim_{n \to \omega} \frac{1}{n} = \frac{1}{\omega} = \varepsilon.$$

Поэтому в пределе получим функцию:

$$x \leq a - \varepsilon, \quad y = 0;$$

$$a - \varepsilon < x \leq a + \varepsilon, \; y = \frac{\omega}{2}[x - (a - \varepsilon)];$$

$$x > a + \varepsilon, \quad y = 1.$$

Производная этой фукции $\dfrac{dy}{dx}$ повсюду равна нулю, кроме интервала $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$, где

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{n \to \omega} \frac{dy_n}{dx} = \frac{\omega}{2}.$$

В результате, как видим, *после трансфинитного перехода к пределу получили функцию, непрерывную и дифференцируемую в точке* $x = a$. Принимая во внимание, что $\omega\varepsilon = 1$, нетрудно подсчитать $y(x)$ в нулевой окрестности точки $x = a$.

x	$a - \varepsilon$	$a - \frac{3}{4}\varepsilon$	$a - \frac{\varepsilon}{2}$	$a - \frac{\varepsilon}{4}$	a	$a + \frac{\varepsilon}{4}$	$a + \frac{\varepsilon}{2}$	$a + \frac{3\varepsilon}{4}$	$a + \varepsilon$
y	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	1

Здесь рассмотренным трансфинитным значениям x отвечают действительные значения y.

Итак, с точки зрения классического анализа при возрастании n, наклонная часть bd рассматриваемой функции вращается вокруг точки c постепенно занимая все более вертикальное положение, определяемое тангенсом угла наклона

$$\frac{dy_n}{dx} = \frac{n}{2}.$$

Длины отрезков $(\overline{ab})_n$ для функций $y_n(x)$ равны

$$(\overline{ab})_n = \sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}$$

образуют последовательность, предельное значение которой $(\overline{ab})_\infty = 1$. Вместе с тем в пределе наклонная часть рассматриваемой кривой вместо того, чтобы занять вертикальное положение, исчезает вовсе. От нее остается лишь точка $x = a$, $y = \frac{1}{2}$.

Переведем теперь результаты с языка трансфинитного анализа на язык анализа классического. Для этого перед выкладками трансфинитного анализа следует поставить символ mag. Тогда выражения (*) соответственно примут значения:

$$\operatorname{mag} x < a, \quad \operatorname{mag} y = 0;$$

$$\operatorname{mag} x = a, \quad \operatorname{mag} y = \operatorname{mag}\frac{\omega_0}{2} = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{mag} x > a, \quad \operatorname{mag} y = 1,$$

что находится в полном соответствии с результатами классического анализа.

С точки зрения трансфинитного анализа наклонная часть кривой сохраняется и в пределе при переходе в вертикальное положение,

$$\operatorname{mag}\frac{dy}{dx} = \operatorname{mag}\frac{\omega}{2} = \infty,$$

но она попросту выпадает из поля зрения классического анализа из-за исчезновения трансфинитных чисел в окрестности точки $x = a$. Сохраняется лишь точка $x = a$, которая фиксирует ординату $y = \frac{1}{2}$. Это единственная точка вертикальной части кривой, которая сохранилась, так как ее абсцисса оказалась действительным числом.

Что же касается производной $\frac{dy}{dx}$, то при трансфинитном пределе, согласно рис. 1, *б*, при $n = \omega$ получим функцию Дирака $\delta(x-a)$.* Интересно отметить, что δ-функция в трансфинитной интерпретации полностью сохраняет индивидуальные черты функций, образовавших

* Она же импульсивная функция Хевисайда, она же мгновенный прерыватель Н. М. Герсеванова (2-4).

трансфинитную последовательность.

Приведем еще один пример δ-функции.

На рис. 2 изображен n-член последовательности функций.

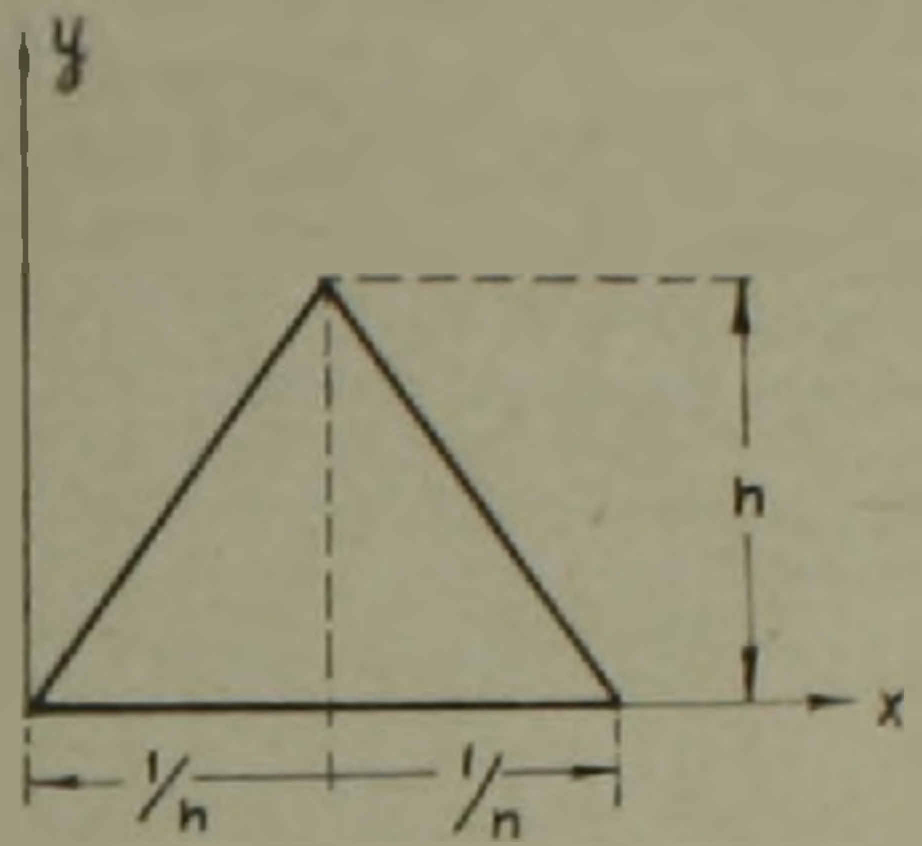


Рис. 2

С точки зрения классического анализа при $n \to \infty$ получаем предельную функцию, тождественно равную нулю и площадь, равную нулю. С другой стороны, при любом n площадь рассматриваемой функции равна 1. Стало быть, площади всех функций образуют последовательность, все члены которой 1. И в пределе площадь равна 1, что противоречит предельному значению функции. С точки же зрения трансфинитного анализя следует n заменить на ω. В результате получим функцию, повсюду тождественно равную нулю, за исключением „нулевого интервала" $0 < x < \frac{2}{\omega}$, где она сохраняет „форму" треугольника с максимальной ординатой ω. „Площадь" этого треугольника есть

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\omega} \cdot \omega = 1,$$

т. е. рассматриваемый трансфинитный предел функций представляет собою δ-функцию.

Здесь мы нарочно не подготовили окрестность точки $x=0$ в смысле насадки на нее трансфинитного нулевого отрезка. Это произошло автоматически по ходу проведенных соображений.

Если теперь применить символ mag, то все значащие ординаты, отвечающие только трансфинитным значениям абсциссы x, исчезнут и придем к классической точке зрения, что предельная функция повсюду тождественно равна нулю.

У физиков и техников сложилось четкое представление о переходе к пределу от распределенной величины к величине, сосредоточенной в точке. Например, переход от распределенной массы к сосредоточенной массе. Для интерпретации сосредоточенных величин большую роль играет δ-функция, являющаяся „математическим уродом*, с точки зрения теории функций действительного переменного. Только в последнее время она нашла свое законное место в теории обобщенных функций, являющейся ветвью функционального анализа (см. напр. ([5,6])).

Как видно из изложенного, трансфинитный переход к пределу подходящих последовательностей функций приводит к образованию δ-функций в их обняженной форме, и является, по-видимому, одним из возможных математических образов способа перехода к пределу, давно применяющегося в физике и технике.

Ордена Трудового Красного Знамени Институт
геофизики и инженерной сейсмологии
Академии наук Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ

Տրանսֆինիտային իրական թվերի մի քանի հատկություններ

Տրվում է անսահման մեծ ու անսահման փոքր թվերի սահմանում: Նրանց համապատասխանեցվում են կլասիկ անալիզի անսահման մեծ և անսահման փոքր մեծությունները: Այդ թվերը նույնպես և նրանց համապատասխանող մեծությունները դասակարգվում են: Սահմանվում է տրանսֆինիտիվ սահմանի հասկացողությունը ըստ հաջորդականության ո անդամի: Օրինակների վրա ցույց է տրվում, որ անհամասարաչափ զուգամիտվող հաջորդականությունների տրանսֆինիտիվ սահմանները իրենց պահում են ինչպես անընդհատ ֆունկցիաները խզման կետում և նրանց կարելի է դիֆերենցել և ինտեգրել: Տրվում է δ ֆունկցիաների բացատրությունը ինչպես տրանսֆինիտիվ սահմանների, նրանց հաջորդականությունների համապատասխան:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *А. Г. Назаров*, Трансфинитные числа наделенные свойствами действительных чисел, ДАН Арм ССР, т. LI, № 3 (1970). 2 *П. А. М. Дирак*, Основы квантовой механики пер. с английского под ред. М. П. Бронштейна ОНТИ НКТП СССР, Л.—М., 1937. 3 *А. И. Лурье*, Операционное исчисление в приложениях к задачам механики, ОНТИ, 1938. 4 *Н. М. Герсеванов*, Функциональные прерыватели и их применение в строительной механике. Труды ВИОС, № 2, М.—Л., 1934. 5 *И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов*, Обобщенные функции и действия над ними. Гос. изд. физ.-мат. лит., М., 1958. 6 *Я. Микусинский, Р. Сикорский*, Элементарная теория обобщенных функций (библиотека сборника по математике). Изд. иностр. лит., М., 1959. ЭТОФ-I и II