ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LI 1970 5

УДК 513.7

МАТЕМАТИКА

В. П. Потапов, Т. А. Товмасян

Многомерный гиратор

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 12/X 1970)

1°. В этой статье рассматриваются каскадные соединения многополюсных идеальных трансформаторов и гираторов и дается исчерпывающая характеристика A-матриц таких соединений.

Под многополюсным *идеальным трансформатором* мы понимаем $4n$-полюсный идеальный преобразователь, входные токи и напряжения $i(t)$, $v(t)$ которого связаны с выходными $\tilde{i}(t)$, $\tilde{v}(t)$ следующими соотношениями (рис. 1).

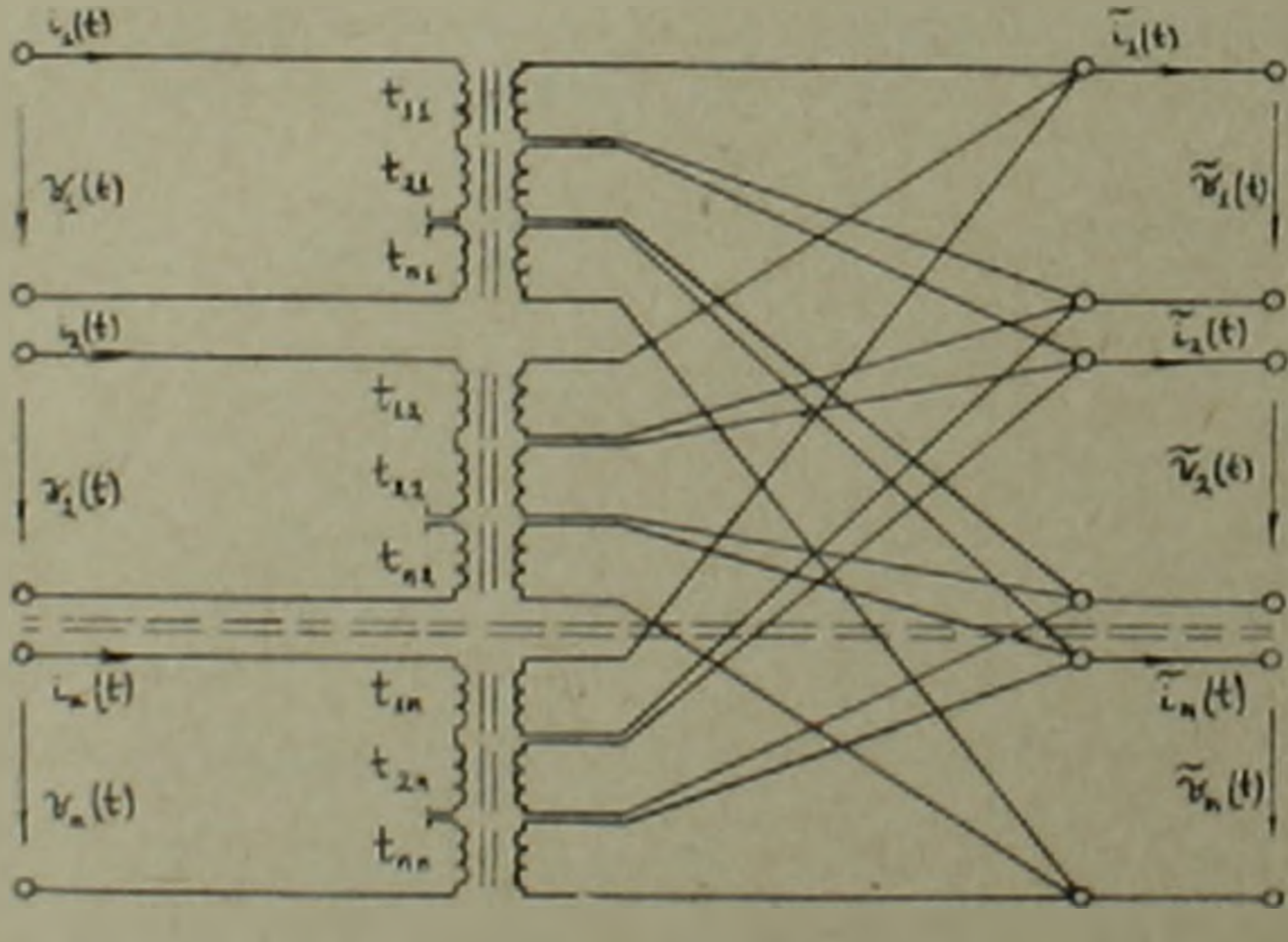


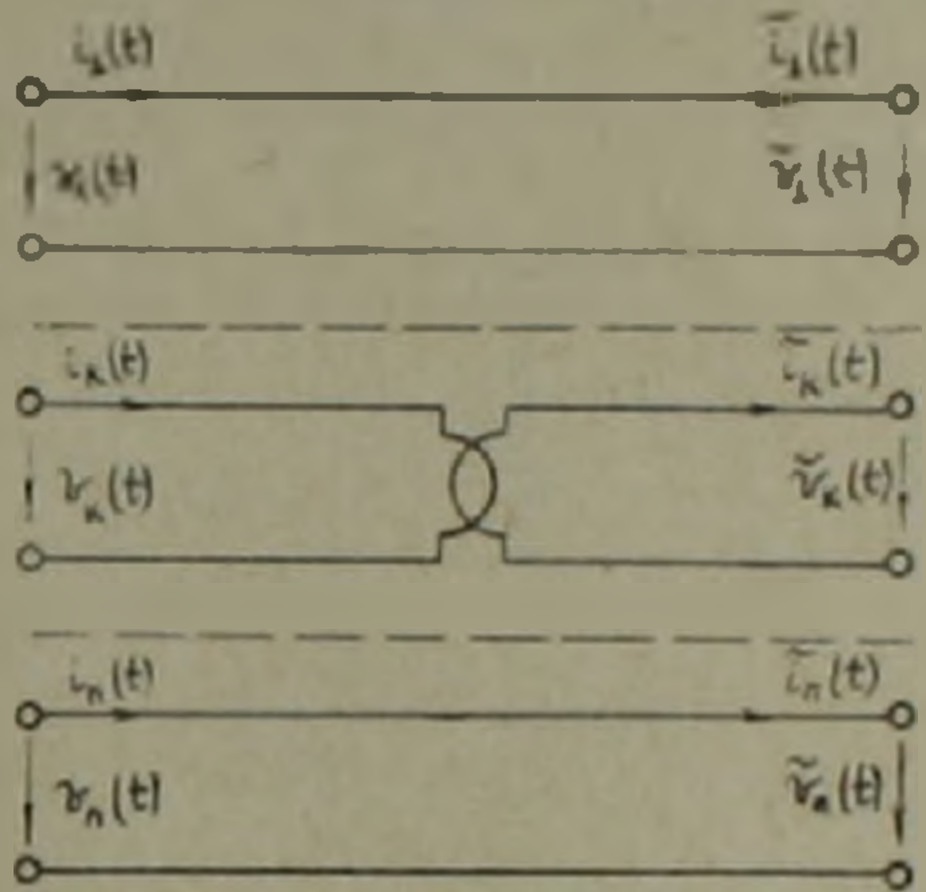
Рис. 1. $4n$-полюсный идеальный преобразователь, входные токи и напряжения $i(t)$, $v(t)$ которого связаны с выходными $\tilde{i}(t)$ $\tilde{v}(t)$

$$v_j(t) = t_{1j}\tilde{v}_1(t) + t_{2j}\tilde{v}_2(t) + \cdots + t_{nj}\tilde{v}_n(t),$$
$$(j = 1, 2, \cdots, n)$$
$$\tilde{i}_j(t) = t_{j1}i_1(t) + t_{j2}i_2(t) + \cdots + t_{jn}i_n(t),$$

где t_{ik} — передаточные числа трансформаторя ([1]). Его A — матрица имеет вид

$$T = \begin{vmatrix} t' & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{vmatrix}, \text{ где } t = \begin{bmatrix} t_{11} \cdots t_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ t_{n1} \cdots t_{nn} \end{bmatrix} \text{ (см. ([2]))}.$$

Под *гиратором* ([3]) понимается идеальный преобразователь, входные и выходные токи и напряжения которого в одном или в нескольких из каналов связаны соотношениями $i(t) = \bar{v}(t)$, $v(t) = \bar{i}(t)$ (рис. 2).



2. Идеальный преобразователь, входные и выходные токи и напряжения которого в одном или в нескольких из каналов связаны соотношениями $i(t) = \bar{v}(t)$, $v(t) = \bar{i}(t)$

Так, например, для гираторов, расположенных в первом и во втором каналах 8-полюсника, A-матрицы соответственно имеют вид:

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Легко видеть, что как A-матрица трансформатора, так и A-матрица гиратора являются вещественными J-унитарными матрицами, т. е. обладают свойствами: $\bar{A} = A$, $A'JA = J$, где $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Это же верно и для A-матрицы любого каскадного соединения этих устройств.

Целью настоящей работы является доказательство обратного факта. Именно, мы покажем, что любая вещественная J-унитарная матрица представляется в виде произведения конечного числа A-матриц идеальных трансформаторов и гираторов. Тем самым каждая такая матрица допускает реализацию в виде каскадного соединения идеальных трансформаторов и гираторов.

Мы приходим к общему результату, рассмотрев предварительно J-унитарную положительную и J-унитарную ортогональную матрицы.

2°. Пусть A—произвольная вещественная J-унитарная матрица порядка $2n$. Рассмотрим матрицу

$$\Omega = AA' = \begin{vmatrix} a & b \\ b' & c \end{vmatrix} > 0.$$

В силу того, что блок $c > 0$, существует неособенная матрица t, такая, что $tct' = I$. С другой стороны, матрица $\tilde{a} = t'^{-1} a t^{-1} > 0$ и, следовательно, существует ортогональная матрица u, приводящая $\tilde{a}$ к диагональному виду:

$$u\tilde{a}u' = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \lambda_k I_k \end{bmatrix}.$$

Полагая

$$T_1 = \begin{bmatrix} ut'^{-1} & 0 \\ 0 & ut \end{bmatrix},$$

получим

$$\Omega_1 = T_1 \Omega T_1' = \left[\begin{array}{c:c} D & b_1 \\ \hdashline b_1' & I \end{array} \right], \tag{2}$$

Так как Ω_1—вещественная J-унитарная матрица, то

$$b_1 D + D b_1' = 0, \tag{3}$$

$$b_1^2 + D = I, \tag{4}$$

$$b_1 - b_1' = 0. \tag{5}$$

Из условий (3), (5) следует что b_1 перестановочна с D, поэтому b_1-квазидиагональна и

$$\Omega_1 = \left[\begin{array}{cccc:cccc} \lambda_1 I_1 & & & & B_1 & & & \\ & \cdot & & & & \cdot & & \\ & & \cdot & & & & \cdot & \\ & & & \lambda_k I_k & & & & B_k \\ \hdashline B_1' & & & & & & & \\ & \cdot & & & & I & & \\ & & \cdot & & & & & \\ & & & B_k' & & & & \end{array} \right],$$

т. е. Ω_1 является прямой суммой клеток вида

$$C = \left[\begin{array}{c:c} \nu I & B \\ \hdashline B' & I \end{array} \right]. \tag{6}$$

Очевидно, для матриц $D_1 = \lambda I$ и B остаются в силе соотношения (3)—(5). Следовательно, вытекает, что

$$BB' = D_1 - I \geqslant 0, \tag{7}$$

откуда $\lambda \geqslant 1$.

В случае $\lambda = 1$, имеем $BB' = 0$, $B = 0$ и

$$C = \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix}. \tag{8}$$

В случае $\lambda > 1$, обозначая $\frac{1}{\sqrt{\lambda - 1}} B = H$, из (7) получим $HH' = I$, а из (5): $H = -H'$, т. е. H является одновременно ортогональной и кососимметрической матрицей. Но тогда ортогональным преобразованием V матрица H приводится к виду ([4]):

$$H_1 = VHV' = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix}.$$

Далее, умножая (6) слева на матрицу $T_2 = \begin{vmatrix} V & 0 \\ 0 & V \end{vmatrix}$, справа на T_2', получим

$$C_1 = T_2CT_2' = \left[\begin{array}{c|c} \lambda I & \sqrt{\lambda - 1}\, H_1 \\ \hline \sqrt{\lambda - 1}\, H_1 & I \end{array}\right]$$

и, следовательно, C_1 является прямой суммой матриц 4-го порядка вида

$$E_1 = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda & \\ & \lambda \end{matrix} & \sqrt{\lambda - 1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \sqrt{\lambda - 1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 & \\ & 1 \end{matrix} \end{array}\right].$$

E_1 — J-унитарная положительная матрица. Положим, наконец,

$$T_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda}} I & \\ & \sqrt[4]{\lambda}\, I \end{bmatrix}, \quad \lambda = \operatorname{ch}^2 \alpha.$$

Тогда

$$E_2 = T_3E_1T_3' = \left[\begin{array}{cc|cc} \operatorname{ch}\alpha & & & \operatorname{sh}\alpha \\ & \operatorname{ch}\alpha & -\operatorname{sh}\alpha & \\ \hline & -\operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha & \\ \operatorname{sh}\alpha & & & \operatorname{ch}\alpha \end{array}\right].$$

Если теперь преобразовать матрицу E_2 с помощью матрицы гиратора G_2 (1), то получим

$$E_3 = G_2 E_2 G_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} \operatorname{ch}\alpha & \operatorname{sh}\alpha & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \operatorname{ch}\alpha & -\operatorname{sh}\alpha \\ & & -\operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha \end{array}\right], \tag{9}$$

где последняя является, очевидно, матрицей трансформатора.

Таким образом, объединяя результаты действий над клетками, приходим к равенству для матриц $2n$-го порядка:

$$G\tilde{T}\Omega\tilde{T}'G = E, \tag{10}$$

где $\tilde{T}$ — произведение матриц трансформатора, G — матрица гиратора, E — прямая сумма клеток вида (8), (9).

Равенство (10) можно переписать так:

$$G\tilde{T}AA'\tilde{T}'G' = \tilde{E}\tilde{E}',$$

где $\tilde{E} = \sqrt{\overline{E}}$ получается из E заменой α на $\frac{\alpha}{2}$ в соответствующих клетках. Отсюда ([4])

$$G\tilde{T}A = \tilde{E}U, \tag{11}$$

где U — ортогональная и, очевидно, J-унитарная матрица, т. е.

$$UU' = I, \quad UJU' = J. \tag{12}$$

3°. Нетрудно убедиться, что $J = TjT'$, где

$$j = \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{vmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} \frac{I}{\sqrt{2}} & -\frac{I}{\sqrt{2}} \\ \frac{I}{\sqrt{2}} & \frac{I}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

и $TT' = 1$. Учитывая эти равенства, соотношения (12) можно переписать в виде:

$$\tilde{U}\tilde{U}' = I, \quad \tilde{U}j\tilde{U}' = j,$$

где $\tilde{U} = T^{-1}UT$. Отсюда $\tilde{U}j = j\tilde{U}$ и, следовательно, $\tilde{U} = \begin{vmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{vmatrix}$, где u, v — ортогональные матрицы. Далее, имеем

$$U = T\tilde{U}T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{I}{\sqrt{2}} & -\frac{I}{\sqrt{2}} \\ \frac{I}{\sqrt{2}} & \frac{I}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{I}{\sqrt{2}} & \frac{I}{\sqrt{2}} \\ -\frac{I}{\sqrt{2}} & \frac{I}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{u+v}{2} & \frac{u-v}{2}\\[4pt] \frac{u+v}{2} & \frac{u-v}{2}\end{bmatrix} \qquad (13)$$

Умножая (13) справа на $R=\begin{vmatrix}u' & 0\\ 0 & u'\end{vmatrix}$, получим

$$UR=\begin{bmatrix}\frac{I+W}{2} & \frac{I-W}{2}\\[4pt] \frac{I-W}{2} & \frac{I+W}{2}\end{bmatrix},$$

где $W=vu'$ — ортогональная матрица. Пусть u_0 — ортогональная матрица, такая, что u_0Wu_0' имеет клеточно-диагональный вид:

$$u_0Wu_0'=\begin{bmatrix}1 &&&&&&&&&\\ &\ddots&&&&&&&&\\ &&1&&&&&&&\\ &&&-1&&&&&&\\ &&&&\ddots&&&&&\\ &&&&&-1&&&&\\ &&&&&&\begin{matrix}\cos\tau_1 & \sin\tau_1\\ -\sin\tau_1 & \cos\tau_1\end{matrix}&&\\ &&&&&&&\ddots&\\ &&&&&&&&\begin{matrix}\cos\tau_m & \sin\tau_m\\ -\sin\tau_m & \cos\tau_m\end{matrix}\end{bmatrix},$$

где $0<\tau_i<2\pi$, $\tau_i\neq\pi$, $i=1, 2,\cdots, m$. Тогда матрица

$$L=\begin{vmatrix}u_0 & \\ & u_0\end{vmatrix}UR\begin{vmatrix}u_0' & \\ & u_0'\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{I+u_0Wu_0'}{2} & \frac{I-u_0Wu_0'}{2}\\[4pt] \frac{I-u_0Wu_0'}{2} & \frac{I+u_0Wu_0'}{2}\end{bmatrix}$$

является прямой суммой клеток вида:

$$\begin{vmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}0 & I\\ I & 0\end{vmatrix},$$

$$P=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{c|c}I+\begin{pmatrix}\cos\tau & \sin\tau\\ -\sin\tau & \cos\tau\end{pmatrix} & I-\begin{pmatrix}\cos\tau & \sin\tau\\ -\sin\tau & \cos\tau\end{pmatrix}\\ \hline I-\begin{pmatrix}\cos\tau & \sin\tau\\ -\sin\tau & \cos\tau\end{pmatrix} & I+\begin{pmatrix}\cos\tau & \sin\tau\\ -\sin\tau & \cos\tau\end{pmatrix}\end{array}\right] \quad (0<\tau<2\pi,\ \tau\neq\pi).$$

Матрица $\begin{vmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{vmatrix}$ является матрицей трансформатора, матрица $\begin{bmatrix}0 & I\\ I & 0\end{bmatrix}$ — матрицей гиратора. Наконец, умножая P слева на матрицу G_2Q, где G_2 — матрица гиратора ([1]), а

$$Q = \left[\begin{array}{cc|cc} \cos\frac{\alpha}{2} & -\sin\frac{\alpha}{2} & & \\ \sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & \cos\frac{\alpha}{2} & -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & \sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{array}\right],$$

справа на G_2, получим

$$G_2QPG_2 = Q.$$

Q, очевидно, является матрицей трансформатора.

Объединяя и здесь результаты действий над клетками, мы получим, что U является произведением матриц трансформаторов и гиратора. Но тогда это справедливо и для заданной матрицы A:

$$A = \Theta_1\Gamma_1\Theta_2\Gamma_2\Theta_3\Gamma_3\Theta_4,$$

где Θ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — матрица трансформатора, Γ_k ($k = 1, 2, 3$) — матрица гиратора. Таким образом доказана

Теорема. *Произвольная вещественная J-унитарная матрица является A-матрицей некоторой линейной цепи, состоящей из каскадно соединенных трансформаторов и гираторов.*

Если под многомерным гиратором подразумевать упомянутое устройство, то эта *теорема устанавливает адекватность вещественной, J-унитарной матрицы и проходной (A-матрица) матрицы многомерного гиратора.*

Одесский технологический
институт холодильной
промышленности

Վ. Գ. ԳՈՏԱԳՈՎ, Թ. Ա. ԹՈՎՄԱՍՅԱՆ

Բազմաչափ գիրատոր

Հոդվածում ապացուցված է կասկադորեն միացված տրանսֆորմատորներից և գիրատորներից կազմված շղթաների սինթեզի համար սկզբունքային նշանակություն ունեցող փաստ, այն է՝ նշված միավորումների A-մատրիցը ադեկվատ է իրական J-ունիտար մատրիցի, այսինքն՝ $\bar{A} = A$, $A'JA = J$, *որտեղ* $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$.

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *W. Cauer*, Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, Berlin, 1954. [2] *А. В. Ефимов*, Об одном применении теоремы Ланжевена в теории цепей, ДАН АрмССР, XLIX, № 3, 118—123. [3] *Ю. Т. Величко*, Идеальные элементы в схеме замещения линейного проходного четырехполюсника, Известия высш. уч. зав., серия радиотехники, т. 4, № 4, 1961. [4] *А. И. Мальцев*, Основы линейной алгебры, ГИТТЛ, М., 1948