ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LI 1970 4

УДК 517.9

МАТЕМАТИКА

С. Г. Симонян

Асимптотика мультипликаторов системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 8/VII 1970)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами

$$x''(t) + \mu^2 Q(t)x(t) = 0, \quad Q(t+a) = Q(t), \quad \mu > 0, \tag{1}$$

где $x(t)$ — вектор столбец, $Q(t)$ — комплекснозначная матрица функция порядка $n \times n$ и регулярна в некоторой односвязной области G, содержащая вещественную ось R. Собственные числа матрицы $Q(t)$ вещественны, положительны и различны при $t \in R$. (2)

В частности, матрица $Q(t)$ может быть положительно определенная и эрмитова.

Обозначим собственные числа матрицы $Q(t)$ через

$$q_j^2(t), \quad j = 1 \cdots n.$$

Полагая

$$y_j(t) = x_j(t), \quad y_{n+j}(t) = \mu^{-1} x_j'(t), \quad j = 1 \cdots n,$$

преобразуем систему (1) к виду

$$y'(t) = \mu A(t) y(t), \quad A(t+a) = A(t), \tag{3}$$

где

$$A(t) = \begin{vmatrix} 0 & I_n \\ -Q(t) & 0 \end{vmatrix}, \quad I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}.$$

Пусть $Y(t, \mu)$ — некоторая фундаментальная матрица системы (3). Известно, что существует неособенная матрица $C(\mu)$, такая, что

$$Y(t+a, \mu) = Y(t, \mu)\, C(\mu). \tag{4}$$

Собственные числа матрицы $C(\mu)$, обозначим их через $\rho_j(\mu)$, $j = 1 \cdots 2n$, не зависят от выбора фундаментальной матрицы $Y(t, \mu)$ и называются мультипликаторами системы (3). Мы утверждаем, что для $\rho_j(\mu)$, $j=1\cdots 2n$, справедливо следующее асимптотическое разложение (см. теор. 3)

$$\rho_j(\mu) = \exp(i\mu\varphi_j)\psi_j(\mu), \quad \psi_j(\mu) \underset{\mu\to+\infty}{\sim} 1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_{jk}\mu^{-k}, \tag{5}$$

где

$$\varphi_j = \int_0^a q_j(t)\,dt > 0, \quad j = 1\cdots n, \quad \varphi_{n+j} = -\varphi_j. \tag{6}$$

Введем следующие обозначения:

$$\lambda_j(t) = iq_j(t), \quad j = 1\cdots n, \quad \lambda_{n+j}(t) = -iq_j(t)$$

$$\xi_j(t) = \int_0^t \lambda_j(\tau)\,d\tau, \quad \xi_{ij}(t) = \xi_i(t) - \xi_j(t), \tag{7}$$

$$\operatorname{Re}\xi_j(t) = \delta_j(t), \quad \operatorname{Re}\xi_{ij}(t) = \delta_{ij}(t), \quad \delta_{ij}(t_0) = \delta_{ij}^0$$

Обозначим через $\Lambda(t)$ диагональную матрицу $\Lambda(t) = \|\lambda_1(t), \lambda_2(t)\cdots \lambda_{2n}(t)\|$, через $B(t)$ — неособенную матрицу, удовлетворяющую условию $AB = B\Lambda$. Сформулируем следующую теорему, которая аналогична теореме 3.1 работы (2).

Теорема 1. *Пусть условие (2) выполнено. Тогда существует такая ограниченная односвязная область $G_1 \subset G$, $[0, a] \subset G_1$, что в этой области система (3) имеет $2n$ линейно независимых регулярных решений вида*

$$y_j(t) = \exp(\mu\xi_j(t))(b_j(t) + \mu^{-1}u_j(t, \mu)),$$

$$\mu \geqslant \mu_0 > 0, \quad j = 1\cdots 2n \tag{8}$$

$b_j(t)$ — столбцы матрицы $B(t)$, $u_j(t, \mu)$ — регулярные по t функции в области $t \in G_1$, $\mu \geqslant \mu_0 > 0$.

Из соотношения (4) имеем, что

$$y_j(t+a) = \sum_{k=1}^{2n} c_{jk}y_k, \quad j = 1\cdots 2n. \tag{9}$$

Теорема 2. *Пусть $y_j(t)$ — решение системы (3), построенное в теореме 1. Тогда при всех i, $j = 1\cdots 2n$*

$$c_{ij}(\mu) = O(\exp(-\delta_{ij}^0\mu)), \quad i > j, \quad \mu \geqslant \mu_0 > 0 \tag{10}$$

$$c_{ij}(\mu) = O(\mu^{-1}), \quad i < j, \quad \mu \geqslant \mu_0 > 0. \tag{11}$$

$$c_{jj}(\mu) \underset{\mu\to+\infty}{=} \exp(i\mu\varphi_j)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_{jk}\mu^{-k}\right). \tag{12}$$

Доказательство этой теоремы следует из теоремы 1 и из результатов [3].

Теорема 3. *Пусть условие (2) выполнено. Тогда для мультипликаторов системы (3) справедливо асимптотическое разложение*

$$\rho_j(\mu) \underset{\mu\to+\infty}{=} \exp(i\mu\varphi_j)\,\psi_j, \quad \psi_j \sim 1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_{jk}\,\mu^{-k}, \tag{5}$$

где φ_j, $j = 1 \cdots n$, определяются по формуле (6), $d_{jk} = \text{const}$.

Доказательство. Согласно соотношению (4) мультипликаторы системы (3) являются корнями алгебраического уравнения

$$\det\,[C(\mu) - \rho I_{2n}] = 0. \tag{13}$$

В силу теоремы 2 матрица левой части (15), с точностью порядка экспоненциально малой величины, треугольная [4], т. е.

$$[C(\mu) - \rho I_{2n}] = \begin{bmatrix} c_{11} - \rho & & O(\exp(-\delta_{ij}^{0}\mu)) \\ & \ddots & \\ O(\mu^{-1}) & & c_{2n,\,2n} - \rho \end{bmatrix} \quad \mu > \mu_0 > 0. \tag{14}$$

В силу теоремы 1 и (14) из (13) следует, что

$$\prod_{j=1}^{2n} (\rho(\mu) - c_{jj}(\mu)) = O(\exp(-\delta_{ij}^{0}\mu)), \quad \mu > \mu_0, \quad \delta_{ij}^{0} > 0,$$

и

$$\rho_j(\mu) \sim c_{jj}(\mu) + O(\exp(-\delta_{ij}^{0}\mu)), \quad \mu \to +\infty. \tag{15}$$

В силу (12), из (15) приходим к заключению этой теоремы.

В заключение автор выражает свою признательность профессору М. В. Федорюку за оказанное внимание и обсуждение этой работы.

Ереванский политехнический
институт

Ս. Գ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

Պարբերական գործակիցներով երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի մուլտիպլիկատորների ասիմպտոտիկ վերլուծության մասին

Երկրորդ կարգի պարբերական գործակիցներով դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի գործակիցների վրա դրված որոշ սահմանափակումների դեպքում ապացուցվում է, որ սիստեմի մուլտիպլիկատորները վերածվում են ասիմպտոտիկ շարքերի՝ ըստ մեծ պարամետրի։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. М. Рапопорт*. О некоторых асимптотических методах в теории обыкновенны дифференциальных уравнений. Изд. АН УССР, Киев, 1954. [2] *М. В. Федорюк*, Матема сборник, т. 79 (121), № 4 (8), 477—516, 1969. [3] *М. В. Федорюк*, Докторская диссерта ция, М., 1966. [4] *Ф. Р. Гантмахер*, Теория матриц, Изд. «Наука», М., 1967.