ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LI 1970 4

УДК 517.9

МАТЕМАТИКА

Г. В. Вирабян

О полноте объединенной системы собственных элементов конечномерного оператора и его сопряженного

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 6/IV 1970)

1°. Хорошо известно ([1]), что линейный оператор $\mathfrak{M}$, действующий в N-мерном комплексном эвклидовом пространстве R^N, имеет полную ортонормированную систему собственных элементов тогда и только тогда, если он нормален, т. е. если он коммутирует со своим сопряженным.

Когда оператор не имеет простой структуры, то у него полной системы собственных элементов не существует, однако в этом случае он и его сопряженный оператор вместе уже могут иметь полную совокупность собственных элементов в пространстве R^N.

Таким образом, возникает вопрос, когда совокупность собственных элементов оператора $\mathfrak{M}$ и его сопряженного $\mathfrak{M}^*$ вместе образует полную систему в R^N.

Настоящая заметка посвящена этому вопросу.

2°. Ниже устанавливаются некоторые критерии существования полной совокупности собственных элементов оператора $\mathfrak{M}$ и его сопряженного $\mathfrak{M}^*$.

Имеет место следующая:

Теорема 1. *Совокупность собственных элементов оператора $\mathfrak{M}$ и его сопряженного $\mathfrak{M}^*$ вместе образует полную ортонормированную систему в R^N тогда и только тогда, если при некотором ортонормированном базисе пространства R^N матрица преобразования оператора $\mathfrak{M}$ имеет вид:*

$$\mathfrak{M}=\begin{Vmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_l & \gamma_{l1} & \cdots & \gamma_{lm} \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \mu_m \end{Vmatrix}, \quad l+m=N \tag{1}$$

Доказательство. Доказательство первой части теоремы почти очевидно.

Перейдем к доказательству второй части.

Пусть ортонормальный базис пространства R^N

$$\vec{P}_1, \cdots, \vec{P}_l, \vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_m, \quad l + m = N \tag{2}$$

состоит из совокупности собственных элементов оператора $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{M}\vec{P}_i = \lambda_i \vec{P}_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, l)$$

и сопряженного оператора $\mathfrak{M}^*$

$$\mathfrak{M}\vec{q}_j = \mu_j \vec{q}_j, \quad (j = 1, 2, \cdots, m). \tag{3}$$

Покажем, что в этом случае матрица преобразования оператора $\mathfrak{M}$ при этом базисе имеет вид (1).

Пусть $\vec{u}$ произвольный элемент из R^N. Тогда

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \vec{P}_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \vec{q}_j,$$

где

$$\alpha_i = (\vec{u}, \vec{P}_i), \qquad \beta_j = (\vec{u}, \vec{q}_j)$$
$$(i = 1, 2, \cdots, l) \quad (j = 1, 2, \cdots, m).$$

$(\,,\,)$ — скалярное произведение в R^N.

Применяя оператор $\mathfrak{M}$, получим:

$$\mathfrak{M}\vec{u} = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \lambda_i \vec{P}_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathfrak{M}\vec{q}_j. \tag{4}$$

$$\mathfrak{M}\vec{q}_j = \sum_{i=1}^{l} (\mathfrak{M}\vec{q}_j, \vec{P}_i)\vec{P}_i + \sum_{k=1}^{m} (\mathfrak{M}\vec{q}_j, \vec{q}_k)\vec{q}_k =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \gamma_{ij} \vec{P}_i + \mu_j \vec{q}_j; \tag{5}$$

где

$$\gamma_{ij} = (\mathfrak{M}\vec{q}_j, \vec{P}_i), \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots, l \\ j = 1, 2, \cdots, m \end{pmatrix}.$$

Или после подстановки выражения (5) в (4)

$$\mathfrak{M}\vec{u} = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \lambda_i \vec{P}_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu_j \vec{q}_j + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{l} \gamma_{ij} \beta_j \vec{P}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \left\{ \sum_{j=1}^{m} \gamma_{ij} \beta_j + \alpha_i \lambda_i \right\} \vec{P}_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu_j \vec{q}_j;$$

А это значит, что матрица преобразования оператора $\mathfrak{M}$ в ортонормированном базисе (2) имеет вид (1). Теорема доказана.

Замечание 1. Если оператор $\mathfrak{M}$ и его сопряженный, вместе взятые, имеют полную совокупность собственных элементов в R^N, то этим же свойством обладает всякий оператор, подобный $\mathfrak{M}$.

3°. В этом пункте мы рассмотрим частный класс конечномерных операторов и для них изучим поставленный выше вопрос о полноте совокупности собственных элементов данного и сопряженного операторов.

В прямой сумме эвклидовых пространств $R^N \times R^N = H$ со скалярным произведением

$$\langle \vec{P}, \vec{q} \rangle = (P_1, q_1) - (C^{-1} P_2, q_2)$$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}, \ \vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \in H.$$

Рассмотрим оператор, заданный с помощью операторной матрицы

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ C & D \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Относительно элементов этой матрицы предполагается, что они сами являются операторами, отображающими пространство R^N в R^N, причем C и $C^{-1} \cdot D$ симметрические относительно скалярного произведения $(\, , \,)$, а C отрицательно определенный.

Сопряженный к оператору $\mathfrak{M}$ относительно скалярного произведения (6) имеет вид:

$$\mathfrak{M}^* = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ -C & D \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Теорема 2. *Для того, чтобы совокупность собственных элементов оператора $\mathfrak{M}$ и его сопряженного $\mathfrak{M}^*$ вместе образовала полную систему в пространстве H, необходимо и достаточно, чтобы квадратное операторное уравнение*

$$U^2 - DU - C = 0 \tag{9}$$

обладало решением, имеющим простую структуру в R^N.

Доказательство. Необходимость. Пусть совокупность собственных элементов операторов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^*$ вместе образует полную систему в пространстве H

$$\mathfrak{M}\vec{P}_i = \lambda_i \vec{P}_i, \ \vec{P}_i = \begin{pmatrix} P_1^{(i)} \\ P_2^{(i)} \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

$$\mathfrak{M}^* \vec{q}_j = \mu_j \vec{q}_j, \ \vec{q}_j = \begin{pmatrix} q_1^{(j)} \\ q_2^{(j)} \end{pmatrix}, \ (j = 1, 2, \cdots, n)$$

$$(m+n=2N)$$

Или в раскрытой форме

$$\left.\begin{aligned} &P_2^{(i)}=\lambda_i P_1^{(i)},\\ &CP_1^{(i)}+DP_2^{(i)}=\lambda_i P_2^{(i)}\end{aligned}\right\},\ (i=1,\ 2,\cdots,\ m). \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} &-q_2^{(j)}=\mu_j q_1^{(j)},\\ &-cq_1^{(j)}-Dq_2^{(j)}=\mu_j q_2^{(j)}\end{aligned}\right\},\ (j=1,\ 2,\cdots,\ n). \tag{11}$$

В системах (10), (11) соответственно подставляя первое равенство во второе, получим:

$$(C+\lambda_i D-\lambda_i^2 E)P_1^{(i)}=0,\quad (i=1,\ 2,\cdots,\ m)$$

$$(C+\mu_j D-\mu_j^2 E)q_1^{(j)}=0.\quad (j=1,\ 2,\cdots,\ n).$$

Здесь $P_1^{(i)}$ и $q_1^{(j)}$ отличны от нуля, поскольку в противном случае $\vec{P}_i$ и $\vec{q}_j$ не были бы собственными векторами.

Таким образом, первые компоненты собственных векторов как оператора $\mathfrak{M}$, так и сопряженного оператора $\mathfrak{M}^*$ являются собственными элементами для квадратичного операторного пучка

$$L(\lambda)=C+\lambda D-\lambda^2 E. \tag{12}$$

Из полноты системы собственных векторов

$$\left\{\vec{P}_i,\ \vec{q}_j\right\}\quad \begin{aligned} &i=1,\ 2,\cdots,\ m.\\ &j=1,\ 2,\cdots,\ n.\end{aligned}\qquad m+n=2N.$$

в H следует полнота системы первых компонент этих векторов в пространстве R^N.

Значит квадратичный операторный пучок (12) имеет полную систему собственных элементов $\{e_i\}$, $(i=1,\ 2,\cdots,\ N)$ в R^N, т. е.

$$L(\lambda_{i_k})\,e_k=0,\quad (k=1,\ 2,\cdots,\ N)$$

и для произвольного элемента $P\in R^N$ имеется представление

$$P=\sum_{k=1}^{N} a_k e_k.$$

Определим в R^n оператор U по формуле

$$UP=\sum_{k=1}^{N} a_k\lambda_{i_k} e_k,\quad P\in R^N.$$

Очевидно, что таким образом определенный оператор U имеет простую структуру в R^N и удовлетворяет квадратному операторному уравнению (9).

В самом деле, система $\{e_k\}$, $(k = 1, 2, \cdots, n)$ является одновременно и системой собственных элементов оператора U и для любого $P \in R^N$ имеем:

$$(U^2 - DU - C)P = \sum_{k=1}^{N} a_k(\lambda_{i_k}^2 E - \lambda_{i_k} D - C)e_k =$$

$$= -\sum_{k=1}^{N} a_k L(\lambda_{i_k})e_k = 0.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть оператор U имеет простую структуру в R^N и является решением квадратного операторного уравнения (9). Покажем, что тогда оператор $\mathfrak{M}$ вместе с сопряженным $\mathfrak{M}^*$ имеют полную в H совокупность собственных векторов.

Полную в R^N систему собственных значений и собственных элементов оператора U обозначим через $\begin{vmatrix} \lambda_i \\ u_i \end{vmatrix}$, $(i = 1, 2, \cdots, N)$.

Заметим, что эта система является одновременно и системой собственных элементов для квадратичного операторного пучка.

Рассмотрим следующие системы векторов в пространстве H

$$\vec{u}_i = \begin{pmatrix} u_i \\ \lambda_i u_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \cdots, N. \tag{13}$$

$$\vec{v}_i = \begin{pmatrix} u_i \\ -\lambda_i u_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \cdots, N. \tag{14}$$

Тогда система векторов (13) является системой собственных векторов для оператора $\mathfrak{M}$, а система (14) является системой собственных векторов для сопряженного оператора $\mathfrak{M}^*$.

Рассмотрим теперь систему $2N$ векторов пространства H.

$$\{\vec{u}_i, \vec{v}_i\}, \quad (i = 1, 2, \cdots, N).$$

Покажем, что эта система образует базис в пространстве H.

Действительно, из равенства

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \vec{u}_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{v}_i = 0$$

имеем

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \begin{pmatrix} u_i \\ \lambda_i u_i \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{N} \beta_i \begin{pmatrix} u_i \\ -\lambda_i u_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} (\alpha_i + \beta_i) u_i \\ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (\alpha_i - \beta_i) u_i \end{pmatrix} = \vec{0}$$

или в силу линейной независимости системы u_i $(i = 1, 2, \cdots, N)$ и дефинитности оператора C

$$\begin{aligned} \alpha_i + \beta_i &= 0, \\ \alpha_i - \beta_i &= 0. \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \cdots, N).$$

т. е.
$$\alpha_i = \beta_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, N.$$

Таким образом, совокупность собственных элементов операторов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^*$ образует базис в пространстве H.

Теорема полностью доказана.

Аналогично доказывается следующая

Теорема 2 bis. *Для того, чтобы совокупность собственных элементов оператора $\mathfrak{M}$ и его сопряженного $\mathfrak{M}^*$ вместе образовали полную ортонормированную систему в пространстве H, необходимо и достаточно, чтобы квадратное операторное уравнение (9) обладало нормальным в R^N решением U, т. е.*

$$U^2 - DU - C = 0 \quad и \quad UU^* = U^*U.$$

Замечание 2. В процессе доказательства теоремы был одновременно установлен следующий факт:
операторы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^*$ вместе имеют полную совокупность собственных векторов в пространстве H тогда и только тогда, если квадратичный операторный пучок (12) обладает полной системой собственных элементов в R^N.

Замечание 3. Если в представлении (7) операторы C и D самосопряженные и коммутируют между собой, то квадратное операторное уравнение (9) имеет нормальные в R^N решения вида

$$u = \frac{D}{2} \pm \frac{\sqrt{D^2 + 4C}}{2}$$

и, следовательно, согласно теореме 2 bis, в этом случае операторы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^*$ вместе имеют полную в H ортогонально-нормированную систему собственных векторов.

Замечание 4. Если операторы C и $C^{-1}D$ самосопряженные в R^N, причем C положительно определенный, тогда квадратное операторное уравнение (9) обладает нормальным решением и, в силу теоремы 2 bis, в этом случае можно утверждать, что оператор $\mathfrak{M}$ вместе со своим сопряженным имеет полную ортонормальную систему собственных векторов в пространстве H.

Более того, в этом случае оператор $\mathfrak{M}$ оказывается самосопряженным относительно скалярного произведения

$$\langle \vec{P}, \vec{Q} \rangle = (P_1, Q_1) + (C^{-1} P_2, Q_2).$$

$$\langle \mathfrak{M}\vec{P}, \vec{Q} \rangle = (P_2, Q_1) + (C^{-1}[CP_1 + DP_2], Q_2) =$$
$$= (P_1, Q_2) + (P_2, Q_1 + C^{-1} DQ_2) = (P_1, Q_2) + (C^{-1} P_2, CQ_1 + DQ_2) =$$
$$= \langle \vec{P}, \mathfrak{M}\vec{Q} \rangle.$$

для любых $\vec{P}=\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}$, $\vec{Q}=\begin{pmatrix}Q_1\\Q_2\end{pmatrix}$ из R^N.

Поэтому система собственных элементов соответствующего квадратичного операторного пучка в данном случае двукратно полна в пространстве R^N в смысле М. В. Келдыша ([2]).

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Գ. Վ. ՎԻՐԱԲՅԱՆ

Վերջավոր չափանի օպերատորի և նրա համալուծի սեփական էլեմենտների միացյալ սիստեմի լրիվության մասին

Աշխատանքում ստացված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում N չափանի ունիտար R^N տարածությունում գործող գծային $\mathfrak{M}$ օպերատորի և նրա $\mathfrak{M}^*$ համալուծի սեփական էլեմենտների հավաքը R^N-ում կազմում է լրիվ սիստեմ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. М. Гельфанд*, Лекции по линейной алгебре, 1948. [2] *М. В. Келдыш* ДАН, 77, № 1 (1951).