ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LI 1970 4

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

В. Г. Болтянский, Э. А. Мирзаханян

Степень отображения в гильбертовом пространстве

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 16/III 1970)

В этой заметке мы даем определение степени отображения для отображений, принадлежащих введенному в ([2]) классу K и удовлетворяющих дополнительному условию компактности прообразов. Это определение степени отображения близко в идейном отношении к классическому определению Лере-Шаудера ([1]), но имеет и свои отличия. Дело в том, что класс отображений K, введенный в ([2]) (точнее, его замыкание $\overline{K}$) существенно шире, чем класс отображений вида $\lambda E + A$ (где E—тождественный, A—вполне непрерывный оператор). Отображения класса K лишь локально напоминают отображения $\lambda E + A$, в то время как в теории Лере-Шаудера используются не только локальные, но и глобальные свойства отображений вида $\lambda E + A$. Этим и объясняются особенности приводимого ниже определения степени отображения.

Прежде всего мы сформулируем следующее предложение о свойствах отображений класса K.

Предложение 1. *Пусть $f: M \to H$—отображение класса K (где M—открытое подмножество гильбертова пространства H) и и $X \subset M$—компактное множество. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такая конечномерная плоскость $L \subset H$, такое открытое множество $U \supset X$ (содержащееся в M) и такое число $\delta > 0$, что если $x, y \in U$ и угол между вектором $x - y$ и подпространством L не меньше $\frac{\pi}{2} - \delta$, то выполнено соотношение*

$$\|f(x) - f(y) - \lambda_f(x)(x - y)\| \leqslant \varepsilon \|x - y\|,$$

где $\lambda_f(x)$ терминальная производная отображения f (см. ([3])).

Перейдем теперь к определению степени отображения. Прежде всего введем следующее обозначение. Пусть $L \subset H$ — конечномерное подпространство, $a \in L$ и h—положительное число. Через $E_{a,h}(L)$ мы будем обозначать шар радиуса h с центром a, *ортогональный* подпространству L. Иначе говоря, $E_{a,h}(L)$ есть множество всех точек $x \in H$, удовлетворяющих условиям $x - a \perp L$ и $\|x - a\| < h$.

Предложение 2. *Пусть $f: M \to H$ — отображение класса K и $X \subset M$ — компактное множество, переходящее при отображении f в одну точку $f(X) = b \in H$. Предположим, что терминальная производная $\lambda_f(x)$ на множестве X строго положительна. Тогда существует такое конечномерное подпространство L, содержащее точку b, такая окрестность $U \subset M$ компакта X и такое положительное число h, что для любого конечномерного подпространства $L^* \supset L$ и любой точки $a \in \overline{U} \cap L^*$ множество $f(E_{a,h}(L^*))$ пересекается с L^* ровно в одной точке.*

Сформулированное предложение позволяет (для любого конечномерного подпространства $L^* \supset L$) построить отображение $\varphi: \overline{U} \cap L^* \to L^*$, положив

$$\varphi(a) = L^* \cap f(E_{a,h}(L^*)) \tag{1}$$

для любой точки $a \in \overline{U} \cap L^*$. Это отображение φ (определенное, если заданы f, X, L, U, h, указанные в предложении 2) и лежит в основе определения степени отображения.

Предложение 3. *Пусть $f: M \to H$ — отображение класса K и $b \in f(M)$ — такая точка, что ее прообраз $X = f^{-1}(b)$ компактен. Предположим, что терминальная производная $\lambda_f(x)$ на множестве X строго положительна. Тогда L, U и h, указанные в предложении 2, можно выбрать таким образом, что (при $L^* \supset L$) граница открытого в L^* множества $U \cap L^*$ переходит при отображении φ* (см. (1)) *в множество, не содержащее точки b.*

Ясно, что при выполнении условий предложения 3 определена степень отображения $\varphi: (U \cap L^*) \to L^*$ в точке b. Ясно также, что эта степень отображения не зависит от ориентации пространства L^* (если мы условимся ориентировать L^* и $U \cap L^*$ одинаково). Однако пока еще эта степень отображения может быть различной для разных конечномерных подпространств $L^* \supset L$. Оказывается (и в этом заключается наше следующее предложение), что *при выполнении условий предложения 3 можно L, U и h выбрать таким образом, чтобы для всех $L^* \supset L$ степень отображения $\varphi: (U \cap L^*) \to L^*$ была одной и той же.* Более того, эта степень отображения не зависит от случайного выбора элементов построения, а всецело определяется отображением f и точкой b. Иными словами, справедливо следующее

Предложение 4. *Пусть $f: M \to H$ — отображение класса K и $b \in f(M)$ — такая точка, что ее прообраз $X = f^{-1}(b)$ компактен. Предположим, что терминальная производная $\lambda_f(x)$ на множестве X строго положительна. Тагда существует такое число $c = c(f, b)$ (называемое степенью отображения $f: M \to H$ в точке b), которое обладает следующим свойством: если L, U и h* (см. предложение 3) *выбраны так, что степень отображения φ* (см. (1)) *одна и та же для всех конечномерных подпространств $L^* \supset L$, то эта степень отображения равна $c(f, b)$.*

Этим и завершается построение степени отображения. Именно, если $f: M \to H$ — такое отображение класса K, что прообраз $f^{-1}(b)$ любой точки $b \in f(M)$ компактен, то определена степень отображения $c(f, b)$. Если при этом множество M связно, то степень отображения $c(f, b)$ одинакова для всех точек $b \in f(M)$. В случае же, когда множество $f^{-1}(b)$ компактно не для всех $b \in f(M)$, степень отображения определена лишь в тех точках $b \in f(M)$, для которых прообраз $f^{-1}(b)$ компактен. Если при этом $N \subset f(M)$ — множество всех точек $b \in f(M)$ для которых прообраз $f^{-1}(b)$ компактен, то на каждой компоненте множества N степень отображения $c(f, b)$ постоянна. Далее, если f_0 и f_1 — гомотопные (в классе K) отображения класса K, заданные на множестве M, и f_t, $0 \leq t \leq 1$, — соединяющая их гомотопия и если при этом для всех $t \in [0, 1]$ выполнено включение $b \in f_t(M)$ и прообраз $f_t^{-1}(b)$ компактен, то $c(f_0, b) = c(f_1, b)$.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Գ. ԲՈԼՏՅԱՆՍԿԻ, Է. Ա. ՄԻՐԶԱԽԱՆՅԱՆ

Արտապատկերման աստիճանը հիլբերտյան տարածության մեջ

Տրվում է արտապատկերման աստիճանի սահմանումը (²) հոդվածում նկարագրված արտապատկերումների K դասին պատկանող և կետի նախապատկերի կոմպակտության լրացուցիչ պայմանին բավարարող արտապատկերումների համար։

Այդ սահմանումը գաղափարական տեսակետից մոտ է Լերե-Շաուդերի կլասիկ սահմանմանը (¹), բայց ունի նաև իր յուրահատկությունները, քանի որ K դասը (ավելի ճիշտ նրա K փակույթը) էապես լայն է, քան $\lambda E + A$ տեսքի արտապատկերումների դասը, որտեղ E-ն նույնական օպերատոր է, իսկ A-ն լրիվ անընդհատ օպերատոր։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ж. Лере* и *Ю. Шаудер*, Успехи математ. наук, т. I, вып. 3—4, 1946. [2] *В. Г. Болтянский*, Об одном классе отображений гильбертова пространства, ДАН Арм. ССР, т. LI, № 3 (1970).