

УДК 57.62—50+519.95

БИОФИЗИКА

Г. А. Арутюнян, Л. З. Григорян, Г. А. Серова

О колебаниях дискретных систем

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. М. Гарибяном 7/IV 1970)

Исследование дискретных систем представляет интерес не только в технике, но и в биологии (1, 2).

Мы будем рассматривать колебания системы при дискретном управлении  $F(t - \tau)$  с задержкой  $\tau$ , которое суммируясь с белым шумом  $\psi(t)$ , представляющим симметричное случайное слагаемое  $+b$  или  $-b$  с одинаковой вероятностью появления, задает состояние системы в момент времени  $t + \Delta t$ , выражаемое соотношением:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + F(t - \tau) + \psi(t), \quad (1)$$

где  $x(t)$  — состояние системы в момент времени  $t$ . Управление действует с задержкой  $\tau$ , кратной  $\Delta t^*$ , в виде\*\*

$$F(t - \tau) = \begin{cases} +a, & \text{если } x(t - \tau) < x_0, \\ -a, & \text{если } x(t - \tau) > x_0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $a$  — величина коррекции;

$x_0$  — устанавливаемое состояние.

Соотношение (2) определяет управление при  $x_0$ , не принадлежащем пространству состояний, т. е. когда  $x_0$  не достижимо из-за дискретности переходов. Если же  $x_0$  достижимо, то вместе с соотношением (2) дополнительно рассмотрим

$$F(t - \tau) = \begin{cases} +a & \text{с вероятностью } p, \\ -a & \text{с вероятностью } q = 1 - p \end{cases} \quad (3)$$

при  $x(t - \tau) = x_0$ .

Для случая  $\Delta t \ll \tau$  и произвольного  $|\psi(t)|$  из промежутка  $(0, |F|]$  система была промоделирована на ЦВМ и при этом было получено, что наиболее вероятная частота колебаний соответствует отношению  $\frac{1}{4\tau}$  (3). Приведенное соотношение наблюдается в спектрах ряда экс-

\* Поведение дискретной системы, оперирующей с дискретными значениями сигналов, описывается заданием значений ее состояний в дискретные моменты времени.

\*\* Превышение возбуждения над порогом вызывает срабатывание клапки, известное в биологии под названием принципа „все или ничего“.

периментов для изменения диаметра зрачка глаза ( $\tau = 250$  мсек), тремора руки ( $\tau = 25$  мсек), а также для точки пересечения линии прицеливания с мишенью при стрельбе ( $\tau = 150 - 250$  мсек) (3-6).

Изменения состояний системы можно описать однородной цепью Маркова, для которой можно выделить множества существенных  $C$  и несущественных  $H$  состояний. В множестве  $C$  все состояния сообщаются.

Число состояний при  $|\psi(t)| = |F(t - \tau)|$  минимально и порядка  $2 \frac{\tau}{\Delta t}$ . В остальных случаях оно гораздо больше.

При  $|\psi| = |F|$  состояния и переходные вероятности удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} P_i P_{ij}^{(n)} &= \sum_{k=1}^N P_k P_{ki}^{(1)} P_{kj}^{(n-1)}, \\ P_i &= \sum_{k=1}^N P_k P_{ki}^{(n)}, \\ i, j &= 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $P_i$  — вероятности состояний,

$P_{ki}^{(n)}$  — условная вероятность перехода из состояния  $k$  в состояние  $i$  за время  $t^{**}$  ( $t = \Delta t, \tau$ );

$P_{kij}^{(n, \tau)}$  — условная вероятность перехода в состояние  $j$  за время  $\tau + \Delta t$  через состояния  $k$  и  $i$ , проходимые за время  $\tau$ ;

$$N = \begin{cases} 2 \frac{\tau}{\Delta t} + ? & \text{при } x_0 \in C, \\ 2 \left( \frac{\tau}{\Delta t} + 1 \right) & \text{при } x_0 \in \bar{C} \end{cases}$$

— число существенных состояний.

На рис. 1 приведены результаты решения уравнений (4) относительно  $P_i$ , рассмотренных для случая  $p = q$  и  $\Delta t = \tau$ . Приводимые кривые сходны с экспериментально полученной картиной распределения координат точки пересечения линии прицеливания с мишенью (2,7).

Матрицы переходных вероятностей, при этом, имеют следующий вид:

$$|P_{ij}^{(1, \tau)}| = \begin{vmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0,5 & 2/6 & 0 \\ 0 & 2,6 & 0,5 & 1,6 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5' \end{vmatrix}$$

для случая  $x_0 \in \bar{C}$  и

\* Нумерацию  $1, 2, \dots, N$  мы используем для обозначения состояний системы.

\*\* Здесь и далее знак в скобках при степени представляет индекс времени.

$$|P_{ij}^{(n)}| = \begin{vmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,5 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{vmatrix}$$

для случая  $x_0 \in C$ . Они не дают представления о периодических процессах системы, но могут помочь при их вычислении. Пусть событие  $A$  означает наступление состояния  $i = 1$  или  $2$ . Тогда событие  $\bar{A}$  будет представлять наступление состояний  $3$  или  $4$  при  $x_0 \in C$  и  $3$  или  $4$

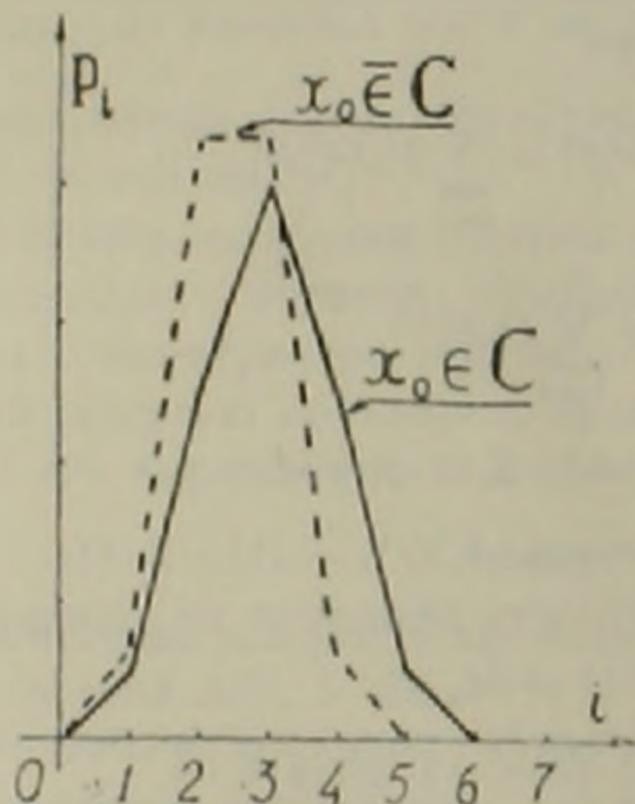


Рис. 1

или  $5$  при  $x_0 \in C$ . Периодом  $T$  процесса будем понимать среднее время чередования событий  $A \rightarrow \bar{A} \rightarrow A$  и  $\bar{A} \rightarrow A \rightarrow \bar{A}$ . Однако вычисление половины периода оказывается более простым. Математическое ожидание времени перехода для событий  $A \rightarrow \bar{A}$  и  $\bar{A} \rightarrow A$  имеет вид:

$$E\left(\frac{T}{2} = t\right) = P_A P_{A\bar{A}}^{(t)} + P_{\bar{A}} P_{\bar{A}A}^{(t)},$$

где  $P_A$  и  $P_{\bar{A}}$  — вероятности событий  $A$  и  $\bar{A}$  соответственно;  $P_{A\bar{A}}^{(t)}$  и  $P_{\bar{A}A}^{(t)}$  — условные вероятности переходов за время  $t$ , определяемые соотношениями:

$$P_{A\bar{A}}^{(t)} = \frac{\sum_{i \in A} P_i \sum_{j \in \bar{A}} P_{ij}^{(t)}}{\sum_{i \in A} P_i} \quad (4)$$

и

$$P_{\bar{A}A}^{(t)} = \frac{\sum_{i \in \bar{A}} P_i \sum_{j \in A} P_{ij}^{(t)}}{\sum_{i \in \bar{A}} P_i} \quad (5)$$

В уравнениях (4) и (5) вероятности переходов из состояния  $i$  в состояние  $j$  за время  $t$  можно найти через элементы вышеприведенных матриц по формуле:

$$P_{ij}^{(t)} = \sum_{k \in C} \sum_{l \in C} \dots \sum_{m \in C} \frac{\left[ \frac{t}{\Delta t} - 1 \right]_{\text{сумм}}}{\dots} P_{ik}^{(\Delta t)} P_{kl}^{(\Delta t)} \dots P_{mj}^{(\Delta t)} \quad (6)$$

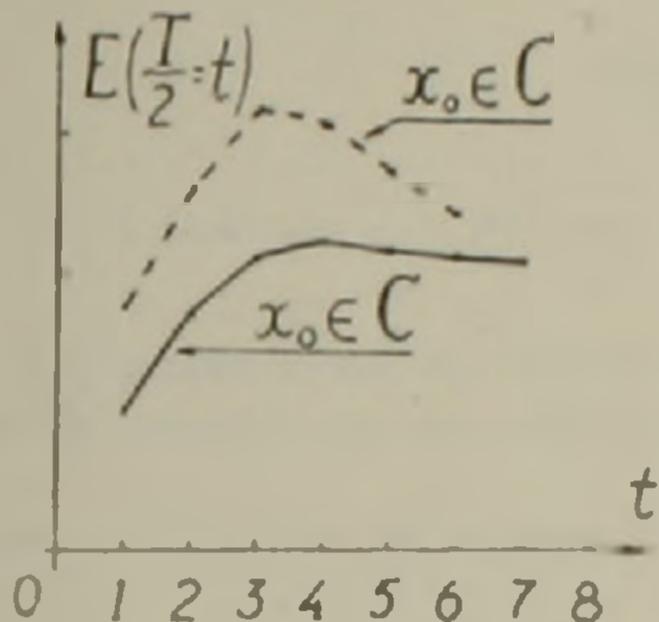


Рис. 2

На рис. 2 приводятся кривые для вероятностей половины периодов колебаний, полученные по формулам (4), (5), (6). По рисунку видно, что условие  $\Delta t = \tau$  приводит к уменьшению частоты примерно вдвое по сравнению с условием  $\Delta t \ll \tau$ . Это объясняет уменьшение частоты тремора, наблюдаемое при болезни Паркинсона из-за синхронизации двигательных единиц (3).

Авторы благодарны В. С. Гурфинкелю и А. М. Эльнеру за полезное обсуждение работы.

Вычислительный центр  
Академии наук Армянской ССР  
и Ереванского государственного  
университета

Հ. Հ. ՉԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Լ. Զ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Գ. Ա. ՍԵՐՈՎԱԼ

### Դիսկրետ սխեմաների տատանումների մասին

Ուսումնասիրվում է (1) հավասարումով տրված դիսկրետ սխեմաների վիճակի տատանումները:  $\Delta t$  պայմանի դեպքում լայն սահմաններում խանգարման մեծության փոփոխությունը դեկադարող ներգործության նկատմամբ չի ազդում սխեմաների վիճակների տատանման ամենահավանական հանախանգանությունների վրա, որն արտահայտվում է  $\frac{1}{4\tau}$  հարաբերությամբ: Մարկովի շղթայի համար կազմված հավասարումների սխեման անալիտիկորեն լուծված է մասնավոր դեպքերի համար: Արդյունքները բացատրում են կենսաբանական փորձերից ստացված որոշ սպեկտրալ տվյալները:

ЛИТЕРАТУРА — ФРЕНЧУПРРАНТ

- <sup>1</sup> М. А. Цетлин, Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем, М., 1969. <sup>2</sup> Г. А. Арутюнян, Methodика биомеханических исследований точностных движений человека, М., 1969, Канд. диссертация. <sup>3</sup> F. W. Campbell, J. G. Robson, G. Westheimer, Fluctuations of Accommodation under Steady Viewing conditions. J. Physiol., 145, 1959. <sup>4</sup> И. М. Гельфанд, М. Л. Цетлин, Успехи математических наук, т. 17, № 1, 1962. <sup>5</sup> В. С. Гурфинкель, Я. М. Коц, М. Л. Шик, Регуляция позы человека, М., 1965. <sup>6</sup> Г. А. Арутюнян, В. С. Гурфинкель, М. Л. Мирский, Биофизика, 14, 6 (1969). <sup>7</sup> Г. А. Арутюнян, В. С. Гурфинкель, М. Л. Мирский, Биофизика, 13, 3 (1968).