УДК 530.1

МЕХАНИКА

Академик АН Армянской ССР А. Г. Назаров

Трансфинитные числа, наделенные свойствами действительных чисел

(Представлено 7/VIII 1970)

Впредь, если не будет оговорено особо, мы отвлечемся от количественного содержания действительного числа. Действительные числа будем рассматривать как символы, в частности, как совокупности цифр, выписанных в определенном порядке. Над этими символами осуществляются те или иные операции преобразования, допущенные для них.

В тех случаях, когда надо будет подчеркнуть, что нас интересует количественная сторона каких-либо символов вообще, в том числе символов действительных чисел, мы перед ними будем ставить знак *mag* (сокращение от латинского *magnitudo* — величина), причем конфигурацию символа в случае действительного числа менять не будем.

Например, если *a* есть символ какого-либо действительного числа, то

$$\text{mag } a = a. \quad (1)$$

Впоследствии убедимся, что двоякая трактовка действительного числа *a* как отвлеченного символа или как изображения действительного числа, характеризующего величину, не будет вызывать затруднений при чтении текста.

Ко множеству действительных чисел добавим число, изображенное символом ∞ (∞ — повернутое). Этому символу приписываем следующие свойства:

1) Математические операции, допускаемые для любых постоянных положительных действительных чисел, допускаются также и для ∞ ; *

2) Путем неограниченного вычитания единиц из ∞ можем получить натуральное число, в частности 1, и обратно, путем неограниченного суммирования единиц можем получить ∞ .

* Например, допускаются к рассмотрению $-\infty$, $\sqrt{-\infty}$, поскольку допускаются $-k$, $\sqrt{-k}$, где *k* — положительное действительное число.

Итак имеем следующую последовательность чисел:

$$1, 2, 3, \dots n, \dots m - k, m - k + 1, \dots m - 2, m - 1, m, \quad (2)$$

где n и k сколь угодно большие целые числа. Суммарное число членов последовательности чисел есть m .

Из определения m следует, что его величина, т. е.

$$\text{tag } m = \infty. \quad (3)$$

Символы, содержащие m , условимся называть трансфинитными числами, наделенными свойствами действительных чисел, или сокращенно трансфинитными действительными числами.

Например выражения

$$a m^2, (m + a)^2 = m^2 + 2a m + a^2, \pm \sqrt{a + b m}, \quad (4)$$

$$\frac{c}{m} = c m^{-1}, \quad \frac{m}{m} = m^0 = 1, \quad \ln m, \quad \sin m$$

и т. д., являются трансфинитными действительными числами.

Выражения (4) и само m не имеют смысла. В процессе работы с трансфинитными действительными числами им будет приписано некоторое содержание, достаточное для наших целей*.

В последовательности чисел (2) невозможно указать ни наибольшее натуральное число, ни наименьшее трансфинитное действительное число. Этим подчеркивается пропасть, отделяющая конечное от бесконечного. Сколько бы ни увеличивали n в пределах конечного числа операций прибавления единиц и сколько бы ни увеличивали k также в пределах конечного числа операций прибавления единиц, никогда члены n и $m - k$ последовательности (2) не встретятся между собою. Вместе с тем нет разрыва между членами последовательности (2), так как число членов в точности равно m . Переход от конечного к трансфинитному и обратно возможен лишь при посредстве неограниченного числа операций прибавления или вычитания единиц. Последовательность (2) назовем отрезком трансфинитного натурального ряда.

Путем неограниченного прибавления единиц к m получим натуральный трансфинитный ряд. Выпишем первые его члены:

$$\begin{aligned} &1, 2, 3, \dots n, \dots m - k, m - k + 1, \dots, m - 2, m - 1, m, \\ &m + 1, m + 2, \dots 2m - 1, 2m, 2m + 1, \dots 3m, \dots 4m, \\ &\dots nm - k, nm - k + 1, \dots, nm - 1, nm, nm + 1, \dots \quad (5) \\ &m^2 - km - k_1, \dots m^2, m^2 + km + k_1, \dots m^3, \dots m^n, \dots \\ &\dots m^{n-k}, \dots m^n, \dots m^{n+k}, m^{2n}, \dots m^{m^2} \dots \end{aligned}$$

* О неопределенности m см. последующую статью в ДАН Армянской ССР.

Пусть $\varepsilon(\omega)$ общее обозначение трансфинитного числа, входящего в натуральный трансфинитный ряд (5). Оно представляет собою полином, содержащий ω в различных целочисленных степенях, в том числе содержащих и ω , умноженные на целочисленные коэффициенты из натурального ряда $1, 2, 3, \dots, n, \dots$

Ясно, что

$$\text{mag } \varphi(\omega) = \infty. \quad (6)$$

Рассматриваемые здесь трансфинитные числа имеют внешнее сходство с порядковыми трансфинитными числами Кантора (на основе ω). Но различия между ними существенны, что можно усмотреть из табл. 1.

Таблица 1

Число ω	Число ω
Числа $\omega - k$ отсутствуют	Числа $\omega - k$ существуют
$k + \omega = \omega + k$	$k + \omega = \omega + k \neq \omega$
$k\omega = \omega k$	$k\omega = \omega k \neq \omega$
$\omega^n = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots + \omega^n + \dots$	$\omega^n - 1 = (\omega - 1)(\omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \dots + \omega^2 + \omega + 1)$.

Под величиной произвольного трансфинитного действительного числа $f(\omega)$ будем понимать:

$$\text{mag } f(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$$

Например:

1) $\text{mag } \ln \omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \infty,$

2) $\text{mag } \frac{c}{\omega} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{n} = 0,$

3) $\text{mag } \sin \omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$ представляет собою неопределенную величину, меняющуюся от -1 до $+1$

4) $\text{mag } (-1)^\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$ или

5) Могут существовать неопределенности в трансфинитных действительных числах и другого рода.

Например выражение

$$\frac{2 + (-1)^\omega}{\omega}$$

принимает значения либо $\frac{1}{\omega}$, либо $\frac{3}{\omega}$ и, вместе с тем

$$\text{mag} \frac{2 + (-1)^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + (-1)^n}{n} = 0$$

в обоих случаях.

$$6) \quad \text{mag} \frac{3n^2 + 2}{4n^2 + n + 3} = \lim \frac{3n^2 + 2}{4n^2 + n + 3} = \frac{3}{4}.$$

$$7) \quad \text{mag} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e.$$

$$8) \quad \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} = \frac{df(x)}{dx},$$

где $f(x)$ — дифференцируемая функция.

Мы видим, что величина трансфинитного действительного числа есть либо постоянное действительное число, либо бесконечно большое число, либо же неопределенна, т. е. принимает несколько или бесконечное множество значений.

Будем рассматривать такие последовательности, каждый член которых непосредственно определяется как функция от его номера. Таким образом последовательности, члены которых определяются рекуррентными соотношениями, исключаются из рассмотрения.

Пусть дана последовательность действительных чисел

$$a_1 = f(1), \quad a_2 = f(2), \quad \dots \quad a_n = f(n) \quad \dots \quad (7)$$

На основе этой последовательности определим трансфинитную последовательность путем замены натурального ряда трансфинитным натуральным рядом.

В результате получим

$$\begin{aligned} a_1 = f(1), \quad a_2 = f(2), \quad \dots \quad a_n = f(n), \quad \dots \quad a_{n-k} = f(n-k), \\ \dots \quad a_{n-1} = f(n-1), \quad a_n = f(n), \quad a_{n+1} = f(n+1), \\ \dots \quad a_{n^2} = f(n^2) \quad \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Если по-прежнему через $\varphi(n)$ обозначим трансфинитное число, входящее в трансфинитный натуральный ряд, то соответствующий ему член последовательности из (8) будет иметь вид:

$$a_{\varphi(n)} = f[\varphi(n)]. \quad (9)$$

Любое трансфинитное действительное число можем рассматривать как член вполне определенной трансфинитной последовательности. Например, для $\ln n$ из выражений (4) имеем:

$$\ln 1, \ln 2, \dots \ln n, \dots \ln(n-k) \dots \ln n. \quad (10)$$

Легко показать, что величины всех трансфинитных действительных чисел, входящих в одну и ту же трансфинитную последовательность, одинаковы, т. е.

$$\text{mag } f[\varphi(\infty)] = \text{mag } f(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} f[\varphi(n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n). \quad (11)$$

Действительно, последовательность

$$f[\varphi(1)], f[\varphi(2)] \dots f[\varphi(n)] \dots \quad (X)$$

является подпоследовательностью последовательности

$$f(1), f(2), f(3) \dots f(n) \dots \quad (XX)$$

Согласно известной теореме, пределы последовательностей (X) и (XX) совпадают, откуда вытекает справедливость (11).

В частности, всякое действительное число a можем рассматривать как член трансфинитной последовательности

$$1^1 a, 1^2 a, \dots 1^n a, \dots 1^{\omega} a, \dots 1^{\omega+1} a, \dots 1^{\omega+2} a, \dots$$

и величина члена, номер которого $\varphi(\infty)$ есть

$$\text{mag } 1^{\varphi(\infty)} a = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^{\varphi(n)} a = a.$$

Таким образом, всякое действительное число можем рассматривать как частный случай трансфинитного действительного числа.

Займемся теперь упорядочением трансфинитных действительных чисел

Рассмотрим две трансфинитные последовательности

$$a_1, a_2, a_3 \dots a_n, \dots a_{\varphi(n)}, \dots$$

$$b_1, b_2, b_3 \dots b_n, \dots b_{\varphi(n)}, \dots$$

1. Если существует такое фиксированное N , что при $n > N$

$$a_n < b_n,$$

то будем утверждать, что $a_{\varphi(n)}$ предшествует $b_{\varphi(n)}$

$$a_{\varphi(n)} \prec b_{\varphi(n)}.$$

2. Если существует такое фиксированное N , что при $n > N$

$$a_n > b_n,$$

то будем утверждать, что $a_{\varphi(n)}$ следует за $b_{\varphi(n)}$:

$$a_{\varphi(n)} \succ b_{\varphi(n)}.$$

3. Если существует такое фиксированное N , что при $n > N$

$$a_n = b_n,$$

то будем утверждать, что

$$a_{\varphi(n)} = b_{\varphi(n)}.$$

Приведем примеры:

- 1) $1 \cdot 10^{-n} < 2 \cdot 10^{-n}$, так как $1 \cdot 10^{-n} < 2 \cdot 10^{-n}$;
- 2) $n^2 + n + 1 > n^2 + n$, так как $n^2 + n + 1 > n^2 + n$;
- 3) $1 + \frac{1}{n} > 1$, так как $1 + \frac{1}{n} > 1$;
- 4) $10^n < 10^n + 1 < 10^n + 10^{-n}$, так как $10^n < 10^n + 1 < 10^n + 10^{-n}$.

В первом примере величины обоих трансфинитных действительных чисел в точности равны нулю, хотя они различаются между собой в смысле предшествовать или следовать.

Во втором примере в правой и левой частях имеем дело с числами, величины которых бесконечно велики.

В третьем примере по обе стороны неравенства имеем дело с числами, величины которых равны 1, хотя они и различаются в смысле следования.

В четвертом примере величины всех трех чисел бесконечно велики, причем второе число отличается от первого на 1, а третье число отличается от второго на 10^{-n} , величина которого 0.

Мы видим, какие тонкие градации возможны в смысле упорядочения трансфинитных действительных чисел. Приведенное правило упорядочения позволяет различать числа между собою в смысле следования, если даже их величины бесконечны и различаются между собою на числа, величины которых 0.

Введение понятия о трансфинитных действительных числах понадобилось нам для геометрического построения образований типа импульсивных функций. Они нам нужны для решения некоторых разрывных задач механики твердого деформированного тела.

На формирование изложенного в первую очередь оказали влияние работы Кантора (¹), Больцано (²), Бореля (³) и Бэра (⁴).

Ордена Трудового Красного Знамени
Институт геофизики и инженерной
сейсмологии АН Армянской ССР

Հայկական ՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս Ա. Չ. ՆԱՅԵՐԱԳԸ

Իրական թվերի հասկարթյունների օժտված աղանձիներին թվեր

Իրական թվերի սիմբոլների բազմաթիվ առկայություն է ա սիմբոլ (տրված ω)։ Այս սիմբոլները վերաբերում են հետևյալ հասկարթյունները-

1. Իրական թվերի համար θ -առարկի սենն ըն ժամանակակից ցարժագ-թյունի θ -առարկի է հան ω -ի համար։

2. ω ից սեռահամարներն ժրամբներ հանկով կարելի է ստանալ թեական թիվ, ժամանակակից θ և հակահակի՝ ժրամբների սեռահամարով ցամարով կարելի է ստանալ ω ։

Չրա հիման վրա սրված է (3) աղանձիներն թեական շարքի սահմանումը։ Այս շարքի ω

պարունակող անդամները անվերջ յեռնելով Տրված է տրանսֆինիտ թվերի, այսինքն՝ ու պարունակող թվերի կարգավորման կանոնը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ G. Kantor, Gesammelte Abhandlungen. Berlin, Verlag von Julius Springer, 1932. ² Б. Больцано, Парадоксы бесконечного, Mathesis, Одесса, 1911. ³ E. Borel, Les paradoxes de Cantini, Gallimard, 2-^e e'd. ⁴ Р. Бэр, Теория разрывных функций, ГТТИ, М.—Л., 1932.