ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LI 1970 3

МЕХАНИКА

УДК 539.3

В. С. Тоноян, С. А. Мелкумян

Контактная задача для полуплоскости с вертикальным разрезом

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 20/VII 1970)

Рассматривается плоская контактная задача для изотропной полуплоскости, разрезанной вдоль оси y (рис. 1), начиная с расстояния „a“ от границы.

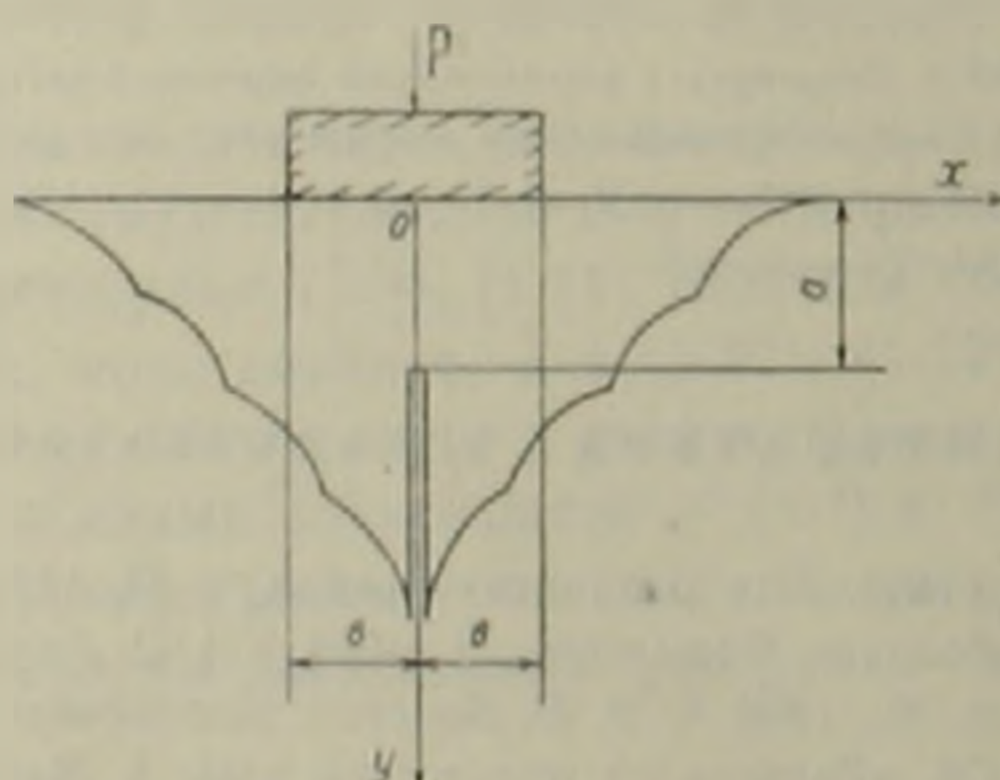

Рис. 1

Предполагается, что на участке $2b$ границы полуплоскости приложен жесткий штамп, симметрично расположенный относительно разреза, на всей границе полуплоскости касательные напряжения отсутствуют, нормальные напряжения на границе отсутствуют вне штампа. На линии разреза напряжения считаются отсутствующими.

Решение задачи сводится к системе из двух „парных“ интегральных уравнений. Эта система в свою очередь сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Показано, что решение последнего уравнения может быть найдено методом последовательных приближений.

В силу симметрии граничных условий достаточно рассматривать только область квадранта ($0 < x < \infty$; $0 < y < \infty$), при этом граничные условия задачи будут иметь вид

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0 \quad (0 < x < \infty); \quad \tau_{xy}(0, y) = 0 \quad (0 < y < \infty)$$

$$v(x, 0) = f(x) \quad (0 < x < b); \quad \sigma_y(x, 0) = 0 \quad (b < x < \infty) \tag{1}$$
$$u(0, y) = 0 \qquad (0 < y < a); \quad \sigma_x(0, y) = 0 \quad (a < y < \infty)$$

Бигармоническую функцию напряжений для решения рассматриваемой задачи берем в виде:

$$\Phi(x, y) = \int_0^\infty [A(\alpha) + \alpha x B(\alpha)] e^{-\alpha x} \cos(\alpha y)\, d\alpha +$$

$$+ \int_0^\infty [C(\beta) + \beta y D(\beta)] e^{-\beta y} \cos(\beta x)\, d\beta \quad (0 \leqslant x < \infty;\ 0 < y < \infty) \tag{2}$$

Напряжения и перемещения определяются при помощи известных формул [1]

$$\sigma_x(x, y) = -\int_0^\infty \alpha^2 [A(\alpha) + \alpha x B(\alpha)]\, e^{-\alpha x} \cos(\alpha y)\, d\alpha +$$

$$+ \int_0^\infty \beta^2 [C(\beta) + D(\beta)(\beta y - 2)]\, e^{-\beta y} \cos(\beta x)\, d\beta;$$

$$\sigma_y(x, y) = \int_0^\infty \alpha^2 [A(\alpha) + B(\alpha)(\alpha x - 2)]\, e^{-\alpha x} \cos(\alpha y) d\alpha -$$

$$- \int_0^\infty \beta^2 [C(\beta) + \beta y D(\beta)]\, e^{-\beta y} \cos(\beta x)\, d\beta;$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -\int_0^\infty \alpha^2 [A(\alpha) + B(\alpha)(\alpha x - 1)] e^{-\alpha x} \sin(\alpha y)\, d\alpha -$$

$$- \int_0^\infty \beta^2 [C(\beta) + D(\beta)(\beta y - 1)] e^{-\beta y} \sin(\beta x)\, d\beta; \tag{3}$$

$$u(x, y) = \frac{1}{E}\left\{\int_0^\infty \alpha [A(\alpha)(1+\nu) + B(\alpha)(1-\nu) + B(\alpha)\alpha x(1+\nu)] e^{-\alpha x} \cos(\alpha y) d\alpha +\right.$$

$$\left. + \int_0^\infty \beta [C(\beta)(1+\nu) - 2D(\beta) + D(\beta)\beta y(1+\nu)] e^{-\beta y} \sin(\beta x)\, d\beta\right\} - a_0 y + b_0;$$

$$v(x,\ y)=\frac{1}{E}\left\{\int_0^\infty \alpha\,[A(\alpha)(1+\nu)-2B(\alpha)+B(\alpha)\alpha x(1+\nu)]\,e^{-\alpha x}\sin(\alpha y)\,d\alpha+\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty \beta\,[C(\beta)(1+\nu)+D(\beta)(1-\nu)+D(\beta)\,\beta y(1+\nu)]\,e^{-\beta y}\cos(\beta x)\,d\beta\right\}+a_0x+c_0.$$

Закрепляя бесконечно удаленную точку будем иметь $a_0=b_0=$ $=c_0=0$.

Удовлетворяя граничным условиям (1), получим:

$$C(\beta)=D(\beta); \tag{4}$$

$$A(\alpha)=B(\alpha); \tag{5}$$

$$\int_0^\infty \beta C(\beta)\cos(\beta x)\,d\beta=\frac{Ef(x)}{2}; \qquad (0<x<b)$$

$$\int_0^\infty \beta^2 C(\beta)\cos(\beta x)\,d\beta=\int_0^\infty \alpha^2(\alpha x-1)\,A(\alpha)\,e^{-\alpha x}\,d\alpha \quad (b<x<\infty) \tag{6}$$

$$\int_0^\infty \alpha A(\alpha)\cos(\alpha y)\,d\alpha=0 \quad (0<y<a)$$

$$\int_0^\infty \alpha^2 A(\alpha)\cos(\alpha y)\,d\alpha=\int_0^\infty \beta^2(\beta y-1)\,e^{-\beta y}C(\beta)\,d\beta \quad (a<y<\infty) \tag{7}$$

Подобные „парные" уравнения рассматривались в работах [2, 3] и в других.

Умножая первое из уравнений (6) на множитель $\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}$ и интегрируя полученное равенство по x от нуля до r, потом дифференцируя по r, имеем:

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \beta C(\beta)\,\beta r J_1(\beta r)\,d\beta=-\frac{E}{2}\int_0^r \frac{f'(x)\,x\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}} \quad (0<r<b) \tag{8}$$

Аналогично умножая второе из уравнений (6) на $\frac{x}{\sqrt{x^2-r^2}}$ и интегрируя полученное равенство по x от r до бесконечности, получаем:

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \beta C(\beta)\,\beta r\,J_1(\beta r)\,d\beta=-\int_0^\infty \alpha^3 r^2 K_0(\alpha r)\,A(\alpha)\,d\alpha \quad (b<r<\infty) \tag{9}$$

При получении (8) и (9) были учтены значения следующих интегралов [4]

$$\int_0^r \frac{\cos(\beta x)\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{\pi}{2} J_0(\beta r); \qquad \int_r^\infty \frac{x\cos(\beta x)\,dx}{\sqrt{x^2-r^2}} = -\frac{\pi}{2} J_1(\beta r);$$

$$\int_r^\infty \frac{x e^{-\alpha x}\,dx}{\sqrt{x^2-r^2}} = rK_1(\alpha r); \qquad \int_r^\infty \frac{x^2 e^{-\alpha x}\,dx}{\sqrt{x^2-r^2}} = r^2 K_0(\alpha r) + \frac{r}{\alpha} K_1(\alpha r),$$

где $K_i(\alpha r)$ — функции Макдональда;

$J_i(\beta r)$ — цилиндрические функции первого рода.

Из выражений (8) и (9) получим:

$$C(\beta) = -\frac{E}{\pi}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\int_0^b J_1(\beta r)\,dr \int_0^r \frac{f'(x)\,x\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}} -$$

$$-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\beta}\int_0^\infty \alpha^2 A(\alpha)\,d\alpha \int_b^\infty r^2 J_1(\beta r) K_0(\alpha r)\,dr \qquad (10)$$

Тем же путем, преобразуя (7), имеем:

$$A(\alpha) = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty \beta^3 C(\beta)\,d\beta \int_a^\infty t^2 J_1(\alpha t) K_0(\beta t)\,dt. \qquad (11)$$

Исключая $A(\alpha)$ из (10) и (11), получаем следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$G(\eta) = \Omega(\eta) + \int_0^\infty K(\eta,\beta)\, G(\beta)\,d\beta, \qquad (12)$$

где

$$G(\eta) = \eta\, C(\eta); \qquad (13)$$

$$\Omega(\eta) = -\frac{E}{\pi}\int_0^b J_1(\eta r)\,dr \int_0^r \frac{f'(x)\,x\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}}; \qquad (14)$$

$$K(\eta,\beta) = \frac{8}{\pi^2}\beta^2 \int_b^\infty r^2 J_1(\eta r)\,dr \int_a^\infty \frac{t^2 K_0(\beta t)\,dt}{(t^2+r^2)^2}. \qquad (15)$$

При получении формул (14) и (15) было учтено, что [4]

$$\int_0^\infty \alpha^2 K_0(\alpha r) J_1(\alpha t)\,d\alpha = \frac{2t}{(t^2+r^2)^2}.$$

Покажем, что интегральное уравнение (12) можно решить методом последовательных приближений.

Нетрудно видеть, что

$$\int_0^\infty |K(\eta,\ \beta)|\,d\beta < \frac{8}{\pi^2}\int_0^\infty \beta^2\,d\beta\int_0^\infty t^3K_0(\beta t)\,dt\int_0^\infty \frac{r^2J_1(\eta,\ r)}{(t^2+r^2)^2}\,dr,$$

учитывая ([4])

$$\int_0^\infty \frac{r^2J_1(\eta r)}{(t^2+r^2)^2}\,dr=\frac{\eta}{2}K_0(\eta t);\qquad \int_0^\infty \beta^2K_0(\beta t)\,d\beta=\frac{\pi}{2t^3}$$

$$\int_0^\infty K_0(\eta t)\,dt=\frac{\pi}{2\eta};$$

имеем

$$\frac{8}{\pi^2}\int_0^\infty \beta^2\,d\beta\int_0^\infty t^3K_0(\beta t)\,dt\int_0^\infty \frac{r^2J_1(\eta r)}{(t^2+r^2)^2}\,dr=1,$$

следовательно

$$\int_0^\infty |K(\eta,\ \beta)|\,d\beta<1.$$

Очевидно, что функция $\Omega(\eta)$ ограничена сверху и стремится к нулю когда $\eta\to\infty$.

Решая интегральное уравнение (12) методом последовательных приближений, получаем выражение функции $G(\eta)$. Далее, по формулам (13), (11) последовательно можно определить все искомые функции.

Напряжения и перемещения по известным формулам (3) будут определены в любой точке полуплоскости.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ, Ս. Ա. ՄԵԼՔՈՒՄՅԱՆ

Ուղղաձիգ ճեղքով կիսահարթության կոնտակտային խնդիր

Դիտարկվում է հորիզոնական եզրից վերջավոր հեռավորության վրա կիսաանվերջ, ուղղաձիգ ճեղք ունեցող իզոտրոպ կիսահարթության կոնտակտային խնդիրը։

Կիսահարթության հորիզոնական եզրին ճնշում է վերջավոր հիմքով, ճեղքի նկատմամբ համաչափ դասավորված, կոշտ դրոշմը։ Ենթադրվում է, որ շփումը՝ դրոշմի և կիսահարթության միջև բացակայում է։ Պարզության համար, ընդունված է, որ կիսահարթության եզրը՝ դրոշմից դուրս, ազատ է արտաքին ուժերից, ինչպես նաև ճեղքի եզրերում լարումները բացակայում են։

Խնդրի լուծումը բերվում է զույգ ինտեգրալ հավասարումներից բաղկացած սիստեմի, որի լուծումը հանգում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը։

Ցույց է տրված, որ վերջին հավասարումը կարելի է լուծել հաջորդական մոտեցումների եղանակով։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. И. Мусхелишвили*, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд. „Наука". ф/м М., 1966. [2] *А. А. Баблоян*, ПММ, т. 28, вып. 6 (1964). [3] *I. N. Sneddon*, The elementary solution of dual integral equation. Proc. Glasgon Math. Ass. vol. 4. 1960. 108—110. [4] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз. М., 1962.