

УДК 539.311

МЕХАНИКА

В. Ц. Гюми, Г. З. Микасян

Выпучивание длинной эксцентрично закрепленной пластинки
 под действием поперечной нагрузки

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 22/VI 1970)

Пусть пластинка толщины h , ширины b шарнирно закреплена по длинным сторонам и нагружена поперечным давлением интенсивности q . В отличие от известной задачи (¹), здесь предполагается, что закрепление краев пластинки является нецентральным по отношению к толщине ($\Delta \neq \frac{h}{2}$, рис. 1).

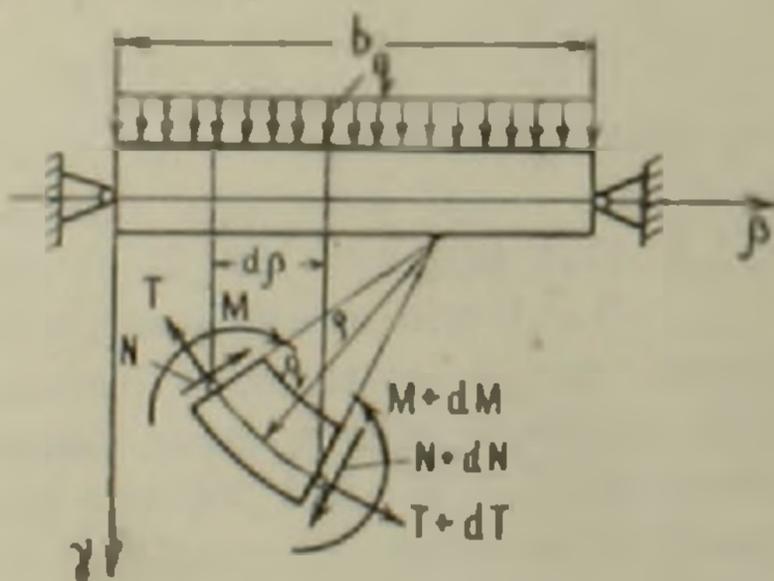


Рис. 1

1. Уравнения равновесия пластинки имеют вид:

$$\frac{dT}{d\beta} + \frac{1}{\rho} \frac{dM}{d\beta} = 0, \quad \frac{d^2M}{d\beta^2} - \frac{T}{\rho} + q = 0, \quad (1.1)$$

где (²)

$$M = Kz + Dx, \quad T = Cz + Kx, \quad (1.2)$$

$$C = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad K = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{h}{2} - \Delta \right), \quad D = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{h^2}{3} - \Delta h + \Delta^2 \right), \quad (1.3)$$

$$\epsilon = \frac{dv}{d\beta} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{d\beta} \right)^2, \quad z = \frac{1}{\rho} = - \frac{d^2w}{d\beta^2}.$$

Отметим, что здесь делается попытка отказаться от обычного (1.1) предположения о постоянстве усилия T по ширине пластинки. Используя (1.2), систему (1.1) представим в виде:

$$\frac{dx}{d\beta} = - \frac{K + D x \frac{dx}{d\beta}}{C + K x} \quad (1.4)$$

$$D \frac{d^2x}{d\beta^2} + K \frac{d^2x}{d\beta^2} - x(C + Kx) + q = 0.$$

Из первого уравнения (1.4), с точностью до малых высшего порядка, получим:

$$x = - \frac{D_0}{C} \frac{x^2}{2} - d_0 x + \varepsilon_0, \quad D_0 = D - K d_0, \quad d_0 = \frac{K}{C}, \quad (1.5)$$

тогда второе уравнение (1.4) приводится к виду:

$$(1 - d_0 x) \frac{d^2x}{d\beta^2} - d_0 \left(\frac{dx}{d\beta} \right)^2 + \frac{x^2}{3} - \frac{C \varepsilon_0}{D_0} x + \frac{q}{D_0} = 0. \quad (1.6)$$

Граничные условия задачи запишутся следующим образом:

$$v = \int_0^{\beta} \left[\varepsilon_0 - \frac{D_0}{2C} x^2 - d_0 x - \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{d\beta} \right)^2 \right] d\beta = 0, \quad w = 0, \quad (1.7)$$

$$M = - d_0 D_0 \frac{x^2}{2} + D_0 x + d_0 C \varepsilon_0 = 0,$$

при $\beta = 0, \beta = l$.

Пусть, приближенно

$$x \approx - \frac{d^2 w}{d\beta^2} \approx A \left(\sin \frac{\pi}{b} \beta + \varphi \right),$$

откуда, с учетом (1.7), имеем:

$$\begin{aligned} w &= A \left[\left(\frac{b}{\pi} \right)^2 \sin \frac{\pi}{b} \beta - \frac{\varphi}{2} (\beta^2 - b\beta) \right], \\ \varphi &= - \frac{1}{2A_1} \left(A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4A_1 A_3} \right), \\ \varepsilon_0 &= \frac{D_0}{C} \left(\frac{A^2 \varphi^2}{2} - \frac{A \varphi}{d_0} \right), \end{aligned} \quad (1.9)$$

при

$$A_1 = \pi^2 (1 + 12 n^2 + 4 n \kappa^2), \quad A_2 = 8 \pi (1 + 12 n^2) + 24 \pi^2 n^2 + 192 n \kappa^2,$$

$$A_3 = 192 n^2 - 21 \pi n \kappa^2, \quad n = \frac{d_0}{\pi}, \quad \kappa^2 = \left(\frac{w}{n} \right)^2 - \frac{A}{2}.$$

Решая (1.6) методом Бубнова-Галеркина, имеем:

$$q^* = \frac{1}{1 + 0,5n\varphi} \left\{ -k^3 (96\varphi^2 + 60\pi\varphi + 128\varphi + 9\pi) - \right. \\ \left. - k^2 \left[8\pi^2 mn (12\varphi^2 + 3\pi\varphi + 4) + \frac{24}{mn} \varphi (2\pi\varphi^2 + 8\varphi + \pi) \right] + \right. \\ \left. + 24\pi^2 k (4\varphi + \pi) \right\}, \quad (1.10)$$

$$q^* = 96 \frac{qb^3}{D_0}, \quad k = Ab = \frac{8\pi^2 m}{8 + \pi^2 \varphi} w^*, \quad m = \frac{h}{b}. \quad (1.11)$$

Для полноты картины определим закон изменения усилия T по ширине пластинки.

Подставляя значения v и x во второе соотношение (1.2), получим:

$$T^* = \frac{Tb^2}{D_0} = - \frac{8\pi^2 \varphi}{n(8 + \pi^2 \varphi)} w^* - \frac{64\pi^4}{(8 + \pi^2 \varphi)^2} \times \\ \times \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{b} \beta + \varphi \right) m^2 (w^*)^2 \sin \frac{\pi}{b} \beta. \quad (1.12)$$

2. Для анализа полученных результатов поступаем следующим образом. Задаемся параметрами m и n и безразмерным параметром прогиба w^* . По формулам (1.9), (1.11) находим безразмерные параметры φ , k . Далее, подставляя φ , k в (1.10), (1.12), определяем безразмерные значения нагрузки (q^*) и тангенциального усилия (T^*). В итоге получим искомые зависимости $q^*(w^*)$ и $T^*(w^*, \beta)$.

В качестве примера рассмотрим случай, когда $n = -1$, $m = 0,1$. На рис. 2, 3 представлены зависимости „нагрузка—прогиб“ и „усилие—прогиб“.

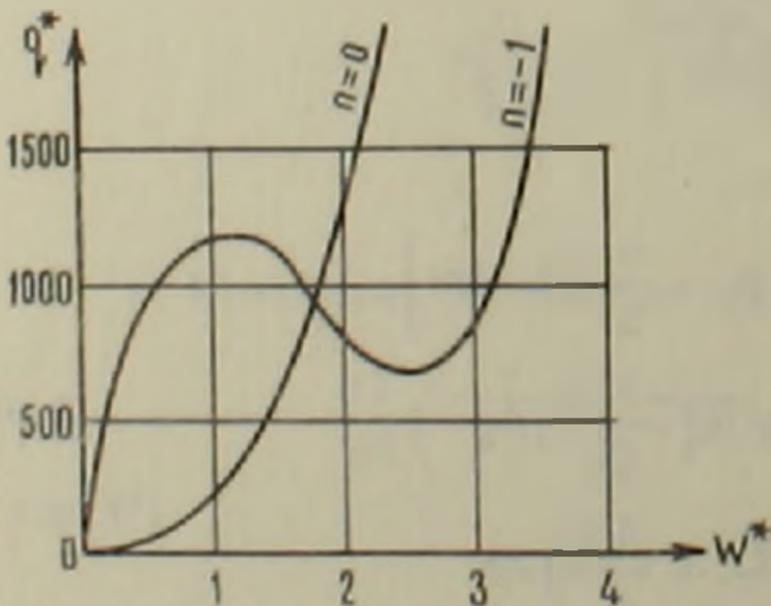


Рис. 2

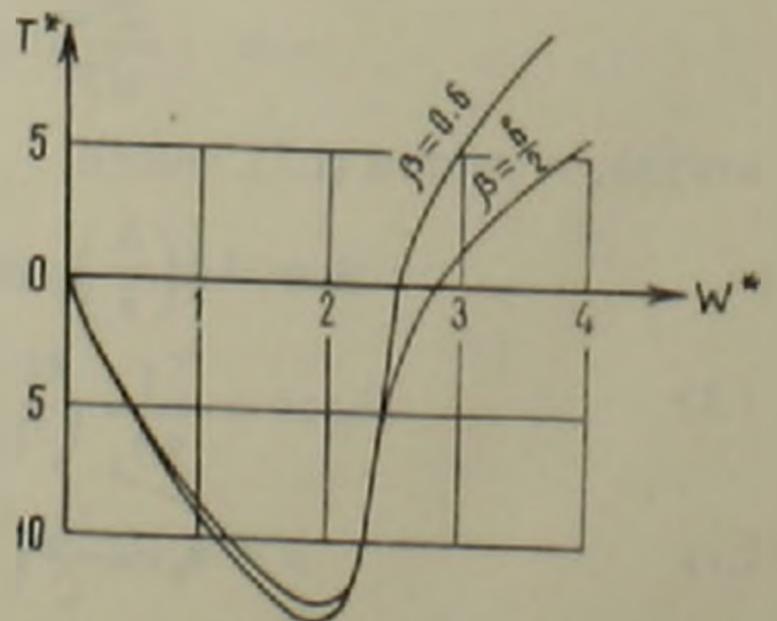


Рис. 3

Как показывают вычисления, наличие эксцентриситета в закреплении приводит к качественному изменению поведения пластинки под действием поперечной нагрузки. При $n = -1$ пластинка теряет устой-

чивость хлопком. Усилие T^* в координатной поверхности меняет знак, что происходит по ширине неодновременно. Усилие T^* в опорных сечениях равняется нулю при $w^* = -\frac{8}{\pi} l$.

Рассматривая зависимости $T^*(w^*, \beta)$, замечаем, что в достаточно большом диапазоне значений w^* ($0 \leq w^* \leq 2,5$) усилие T^* в зависимости от β изменяется незначительно. Таким образом заключаем, что при решении рассматриваемой задачи в известных пределах усилие T в координатной поверхности можно считать постоянным по ширине пластинки.

Институт математики и механики
Академии наук Ариянской ССР

Վ. Յ. ԳՆՈՒՆԻ, Չ. Չ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

Արտակենտրոն ամրացված երկար սալի ճկումը

Աշխատանքում ուսումնասիրված է արտակենտրոն ամրացված երկար սալի ճկման առանձնահատկությունները: Յուրջ է տրված, որ ամրացման աղյուսի պայմաններում սալը որակապես աշխատում է իբրև թաղանթ և ձևարար է կայունության կորուստ նորմալ բեռի տակ: Ինչպես ես ես երկու կայուն հավասարակշռության վիճակների գոյություն բեռի փոփոխման որոշակի տիրույթում:

Ապացուցված է, որ մինչև 2,5 հաստության կարգի ճկվածքներ նիզը կորդինատական մակերևույթում կարելի է ընդունել հաստատուն:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 И. Г. Бубнов, Строительная механика корабля, ч. II, 1914. 2 С. А. Амбарцумян, Теория анизотропных оболочек, Физматгиз, М., 1964. 3 А. С. Вольмир, Гибкие пластинки и оболочки, Гостехиздат, М., 1956. 4 В. В. Болотин, Нелинейная теория упругой устойчивости «в большом», Сб. «Расчеты на прочность», вып. 3, Машгиз, М., 1958