ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LI 1970 3

УДК 517.948.33

МАТЕМАТИКА

В. Г. Оганджанян

Теоремы существования для нелинейных интегральных уравнений с неподвижными особенностями

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 29/IV 1970)

Для системы нелинейных интегральных уравнений

$$x(t) = \int_a^b K(t, s, x(s))ds + f(t) \tag{1}$$

с неподвижными особенностями исследуется вопрос о существовании решений в пространстве $C_n[a, b]$ непрерывных вектор-функций $x(t) = \{x_1(t), \cdots, x_n(t)\}$.

Развивая исследования работ ([1-4]), мы предлагаем леммы о компактности и непрерывности сингулярного интегрального оператора, порождающего (1). На основе этих лемм и принципа Шаудера мы формулируем критерии существования, уточняющие ряд известных теорем.

п 1. Ниже используются следующие обозначения и определения:

R_n—n-мерное вещественное, линейное пространство векторов $x = \{x_1, \cdots, x_n\}$ с полуупорядоченностью: $x \leq y$, если $x_i \leq y_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ и нормой: $\|x\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. Таким образом, если $x \in C_n[a, b]$, то $\|x\| \in C[a, b]$.

$|x|$ — означает вектор $|x| = \{|x_1|, \cdots, |x_n|\}$.

$D = G \times R_n$, где $G = [a, b] \times [a, b]$.

$G(t)$, $G(s)$ — соответственно t и s сечения множества D.

Предполагается, что $f \in C_n[a, b]$.

Если $P(x)$ есть некоторое предложение относительно x, то символом $\{x : P(x)\}$ обозначается множество всех тех x, для которых справедливо $P(x)$.

Пусть вектор-функция $K(t, s, x) = \{K_1(t, s, x_1, \cdots, x_n), \cdots, K_n(t, s, x_1, \cdots, x_n)\}$ определена при $t \in E \subset [a, b]$, $s \in E^* \subset [a, b]$ и $x \in R_n$ ($\text{mes}\, E = \text{mes}\, E^* = b - a$).

Определение 1. *Будем говорить, что вектор-функция $K(t, s, x)$ удовлетворяет условию Каратеодори, если она измерима по s при всех $(t, x) \in E \times R_n$ и непрерывна по x при всех $t \in E$ и почти всех $s \in E^*$.*

Определение 2. *Будем говорить, что скалярная функция* $H(t, s, x_1, \cdots, x_n)$ $(t \in E, s \in E^*, x \in R_n)$ *имеет в* $G(s')$ $(s' \in [a, b])$ *сильную особенность по* s, *если* $\exists x \in C_n[a, b]$, $x(s') \neq 0$, что $\forall t \in E$

$$\left| \int_a^b H(t, s, x_1(s), \cdots, x_n(s))\, ds \right| = +\infty.$$

Определение 3. *Будем говорить, что вектор-функция* $K(t, s, x)$ *имеет в* $G(s')$ $(s' \in [a, b])$ *сильную особенность по* s, *если хотя бы одна компонента имеет в* $G(s')$ *сильную особенность по* s.

п 2. Рассмотрим систему (1) в следующих трех случаях:

I. Вектор-функция $K(t, s, x)$ определена в области

$$D_1 = \{(t, s, x) : (t, s, x) \in D \setminus \bigcup_{j=0}^{m} G(t_j)\ (a < t_j < b)\}$$

удовлетворяет условию Каратеадори и не имеет сильной особенности по s, но в окрестностях t-сечений $G(t_j)$ $(j = 0, 1, \cdots, m)$ может быть, вообще говоря, неограниченной.

II. Вектор-функция $K(t, s, x)$ определена в области

$$D_2 = \{(t, s, x) : (t, s, x) \in D \setminus \bigcup_{i=0}^{k} G(s_i)(a \leqslant s_i \leqslant b)\}$$

удовлетворяет условию Каратеадори, может иметь сильные особенности по s в s-сечениях $G(s_i)$ $(i = 0, 1 \cdots, k, s_0 = a, s_k = b)$.

III. Вектор-функция $K(t, s, x)$ определена в области

$$D_3 = \left\{(t, s, x) : (t, s, x) \in D \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{m} G(t_j)\right) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{k} G(s_i)\right) (a < t_j,\ s_i < b)\right\}$$

удовлетворяет условию Каратеадори и может иметь, сильные особенности по s в s-сечениях $G(s_i)$ $(i = 0, 1, \cdots, k, s_0 = a, s_k = b)$. В этом случае $K(t, s, x)$, вообще говоря, может быть неограниченной в окрестностях t-сечений $G(t_j)$ $(j = 0, 1, \cdots, m)$.

Отметим, что случаи I и II содержатся в общем случае III, однако представляют самостоятельный интерес.

Ниже предполагаем следующее:

В случае I $\forall \gamma > 0$, $\forall t, t', t'' \in [a, b] \setminus \bigcup_{j=0}^{m} \{t_j\}$

$$\int_a^b \sup_{\|x\| \leqslant \gamma} \|K(t, s, x)\| ds < \infty$$

и

$$\lim_{|t' - t''| \to 0} \int_a^b \sup_{\|x\| \leqslant \gamma} \| K(t', s, x) - K(t'', s, x)\| ds = 0.$$

В случае II $\forall\gamma>0$, $\forall b_1,\cdots,b_{2k}$ таких, что $s_0<b_1<b_2<s_1<$ $<b_3<\cdots<b_{2k}<s_k$ и $\forall t, t', t''\in[a, b]$

$$\int\limits_{b_{2i-1}}^{b_{2i}} \sup_{\|x\|\le\gamma}\|K(t, s, x)\|ds<\infty \quad (i=0, 1,\cdots, k) \tag{2}$$

и

$$\lim_{|t'-t''|\to 0}\int\limits_{b_{2i-1}}^{b_{2i}} \sup_{\|x\|\le\gamma}\|K(t', s, x)-K(t'', s, x)\|ds=0 \quad (i=0, 1,\cdots, k) \tag{3}$$

В случае III $\forall\gamma>0$, $\forall b_1,\cdots,b_{2k}$ таких, что $s_0<b_1<b_2<s_1<$ $<b_3<\cdots<b_{2k}<s_k$ и $\forall t, t', t''\in[a, b]\setminus\bigcup\limits_{j=0}^{m}\{t_j\}$ имеют место соотношения (2) и (3).

п 3. На некотором множестве $T(K)\subset C_n[a, b]$ определим оператор K следующим образом: $Kx=y$, где

$$y(t)=\begin{cases}\int\limits_a^b K(t, s, x(s))ds+f(t) \text{ при } t\in[a, b]\setminus\bigcup\limits_{j=0}^{m}\{t_j\},\\ \lim\limits_{t\to t_j}\int\limits_a^b K(t, s, x(s))ds+f(t_j) \text{ при } t=t_j \quad (j=0, 1,\cdots, m).\end{cases}$$

Так как в рассматриваемых случаях конечный предел

$$\lim_{t\to t_j}\int\limits_a^b K(t, s, x(s))ds \quad (j=0, 1,\cdots, m),$$

может существовать не для всех $x\in C_n[a, b]$, то оператор K, вообще говоря, определен не на всем пространстве $C_n[a, b]$.

Под решением системы (1) понимаем неподвижную точку оператора K.

Пусть $Q\subset T(K)$ — непустое множество. Имеют место следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть имеет место случай* I. *Если*

$$\lim_{t\to t_j}\int\limits_a^b K(t, s, x(s))ds=A^j \quad (j=0, 1,\cdots, m)$$

где $A^j=\{A_1^j,\cdots,A_n^j\}$, $\|A^j\|<\infty$ $(j=0, 1,\cdots, m)$, *равномерно на* Q, *то оператор* K *действует из* Q *в* $C_n[a, b]$ *и вполне непрерывен.*

Лемма 2. *Пусть имеет место случай* II. *Если*

$$\lim_{\tau\to 0}\left|\int\limits_{E_i^{\tau}} K(t,\ s,\ x(s))ds\right| = 0$$

равномерно на множестве $\{(t,\ x):(t,\ x)\in[a,\ b]\times Q\}$, где

$$E_i^{\tau} = \{s : s\in u(s_i,\ \tau)\cap[a,\ b]\}\ (i=0,\ 1,\cdots,\ k), \tag{4}$$

то оператор K *действует из* Q *в* $C_n[a,\ b]$ *и вполне непрерывен.*

Лемма 3. *Пусть имеет место случай III. Если*

$$\lim_{t\to t_j}\int\limits_a^b K(t,\ s,\ x(s))ds = A^j\ \ (j=0,\ 1,\cdots,\ m), \tag{5}$$

где $A^j=\{A_1^j,\cdots,\ A_n^j\}$, $\|A^j\|<\infty$ $(j=0,\ 1,\cdots,\ m)$, *равномерно на* Q *и*

$$\lim_{\tau\to 0}\left|\int\limits_{E_i^{\tau}} K(t,s,x(s))\,ds\right| = 0,\ (i=0,\ 1,\cdots,\ k) \tag{6}$$

$(E_i^{\tau}(i=0,\ 1,\cdots,\ k)$ *определены в* (4)). *равномерно на множестве*

$$\{(t,\ x):(t,\ x)\in\left([a,\ b]\setminus\bigcup_{j=0}^{m}\{t_j\}\right)\times Q,$$

то оператор K *действует из* Q *в* $C_n[a,\ b]$ *и вполне непрерывен.*

п 4. В тех случаях, когда множество Q можно эффективно построить, приведенные леммы позволяют на основе принципа Шаудера сформулировать теоремы существования. Предлагаемые ниже утверждения иллюстрируют некоторые приемы конструирования такого множества Q.

Теорема 1. *Пусть имеет место случай III; функция* $K(t,\ s,\ x)$ *в* D_3 *не убывает по* x; $\exists z_1,\ z_2\in C_n[a,\ b]$ *такие, что* $z_1(t)\leqslant\leqslant z_2(t)$ $t\in[a,\ b]$;

$$\lim_{t\to t_j}\int\limits_a^b K(t,\ s,\ z_\nu(s))\,ds = N_j(\nu=1,\ 2,\ \|N_j^\nu\|<\infty,\ j=0,1,\cdots,m)$$

и

$$Kz_\nu\in C_n[a,\ b]\ \ (\nu=1,\ 2).$$

Пусть, далее, $z_1\leqslant Kz_1$ *и* $z_2\geqslant Kz_2$.

Тогда: а) система (1) *имеет по крайней мере одно решение* $x(t)$ *причем* $z_1(t)\leqslant x(t)\leqslant z_2(t)$, $t\in[a,\ b]$;

б) *последовательность* $\{x_i(t)\}$:

$$x_{i+1}=Kx_i\ \ (i=0,\ 1,\cdots)$$

при $\forall t\in[a,\ b]$ *не возрастает, если* $x_0=z_2$ (*не убывает, если* $x_0=z_1$) *и равномерно на* $[a,\ b]$ *сходится к верхнему (нижнему)** *решению системы* (1).

* Решение $v(t)$ системы (1) называется верхним (нижним), если, каково бы не было решение $u(t)$ системы (1), имеем: $v(t)\geqslant u(t)$ $(v(t)\leqslant u(t))$, $t\in[a,\ b]$.

Доказательство основано на том, что можно положить

$$Q = \{x \in C_n[a, b] : z_1(t) < x(t) \leqslant z_2(t),\ t \in [a, b]\}.$$

Непосредственное использование теоремы 1 и схемы работы ([3]) приводит к теоремам о единственности и сходимости последовательных приближений для системы (1) без предположения о монотонности $K(t, s, x)$. Мы не останавливаемся на формулировках этих теорем. Ниже предлагаются теоремы существования без предположения о монотонности вектор-функции $K(t, s, x)$.

Будем говорить, что в области D_l вектор-функция $K(t, s, x)$ удовлетворяет условию Ω_l, если существует неубывающая по $\xi > 0$ вектор-функция $\Omega_l(t, s, \xi)$ такая, что почти всюду в D_l

$$|K(t, s, x)| \leqslant \Omega_l(t, s, |x|)$$

($l = 1, 2, 3$ — соответственно рассматриваемым случаям (I, II, III).

Теорема 2. *Пусть имеет место случай I (случай II) и $K(t, s, x)$ удовлетворяет условию Ω_1 (Ω_2). Пусть, далее, $\exists z \in C_n[a, b]$, $z(t) > 0$, $t \in [a, b]$ такая, что*

$$\lim_{t \to t_j} \int_a^b \Omega_1(t, s, z(s))\, ds = 0 \quad (j = 0, 1, \cdots, m)$$

$$\left(\int_a^b \Omega_2(t, s, z(s)) ds \in C_n[a, b] \right).$$

Если

$$z(t) > \int_a^b \Omega_1(t, s, z(s)) ds + |f(t)|,\ t \in [a, b] \setminus \bigcup_{j=0}^{m} \{t_j\}.$$

$$\left(z(t) \geqslant \int_a^b \Omega_2(t, s, z(s)) ds + |f(t)|,\ t \in [a, b] \right),$$

то система (1) *имеет решение* $x(t)$, *причем* $|x(t)| \leqslant z(t)$, $t \in [a, b]$.

Теорема 3. *Пусть имеет место случай* III *и* $K(t, s, x)$ *удовлетворяет условию* Ω_3. *Пусть, далее,* $\exists z \in C_n[a, b]$, *такая, что вектор-функция*

$$\psi(t) = \begin{cases} \int_a^b \Omega_3(t, s, z(s)) ds & \text{при } t \in [a, b] \setminus \bigcup_{j=0}^{m} \{t_j\}, \\ 0 & \text{при } t \in \bigcup_{j=0}^{m} \{t_j\} \end{cases}$$

непрерывна на $[a, b]$. *Если* $\forall t \in [a, b]$, $z(t) > \psi(t) + |f(t)|$, *то система* (1) *имеет решение* $x(t)$, *причем* $|x(t)| \leqslant z(t)$, $t \in [a, b]$.

Доказательство последних двух теорем основано на том, что можно положить

$$Q = \{x \in C_n[a, b] : |x(t)| \leqslant z(t),\ t \in [a, b]\}.$$

Рассмотрим уравнение

$$x(t) = \int_0^{1/2} \frac{x^2(s)}{s^2} \exp \frac{x(s) - s}{t^2}\, ds + t^3.$$

Положив

$$z(t) = \frac{1}{2} t,\quad \Omega_1(t, s, \xi) = \frac{\xi^2}{s^2} \exp \frac{\xi - s}{t^2},$$

убеждаемся, что выполнены все условия теоремы 3 и, следовательно, уравнение имеет решение $x(t)$, причем $|x(t)| \leqslant \frac{1}{2} t,\ t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

п 5. В качестве примера применения приведенных утверждений исследуем вопрос о существовании решений сингулярной задачи Коши:

$$x_k' = f_k(t, x_1, \cdots, x_n) \quad (k = 1, \cdots, n), \tag{4}$$

$$x_k(0) = 0 \qquad (k = 1, \cdots, n), \tag{5}$$

где функции $f_k(t, x_1, \cdots, x_n)$ определены в области $E: 0 < t \leqslant b$, $|x| \leqslant \gamma$, измеримы по t при всех $\{x_1, \cdots, x_n\}$ и непрерывны по $\{x_1, \cdots$ $\cdots, x_n\}$ при всех $t \in [0, b]$. Функции $f_k(t, x_1, \cdots, x_n)$ могут быть, вообще говоря, неограниченными при $t = 0$.

Под решением системы (4) будем понимать непрерывные на $[0, b]$ и непрерывно дифференцируемые на $(0, b]$ функции $x_k = x_k(t)$ удовлетворяющие при $0 < t \leqslant c$ $(c \leqslant b)$ уравнениям (4).

Теорема 4. *Пусть в области E существуют производные $f'_{k, x_k}(t, x_1, \cdots, x_n)(k = 1, \cdots, n)$. Пусть, далее, в E выполняются неравенства*

$$|f_k(t, x_1, \cdots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \cdots, x_n)| \leqslant \varphi_k(t)\ (k = 1, \cdots, n),$$

$$f'_{k, x_k}(t, x_1, \cdots, x_n) \leqslant \psi_k(t)\ (k = 1, \cdots, n),$$

где функции $\varphi_k(t)$, $\psi_k(t)$ $(k = 1, \cdots, n)$ суммируемы на $[0, b]$.

Тогда задача (4), (5) *имеет решение.*

Тамбовский институт
химического машиностроения

Վ. Գ. ՕՀԱՆՋԱՆՅԱՆ

Անշարժ եզակիություններով ոչգծային ինտեգրալ հավասարումների համար գոյության թեորեմներ

Դիտարկվում է Ուրիսոնի տիպի ինտեգրալ օպերատորը՝

$$(Kx)(t) = \int_a^b K(t, s, x(s))ds$$

առանց ենթադրության, որ $\int_a^b K(t, s, x(s))ds$ գոյություն ունի բոլոր անընդհատ ֆունկցիաների համար։

Ձևակերպվում են բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում այդ օպերատորը գործում է անընդհատ ֆունկցիաների տարածության ենթաբազմությունից անընդհատ ֆունկցիաների տարածություն և լիովին անընդհատ է։ Այնուհետև օգտագործելով անշարժ կետի տոպոլոգիական սկզբունքը ձևակերպվում են թեորեմներ $x = Kx$ հավասարման լուծման գոյության և գնահատականի մասին։

Վերջում ձևակերպվում է մի բավարար հայտանիշ Կոշու սինգուլյար խնդրի լուծման գոյության մասին։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. А. Чечик*, Труды Московского математического общества, т. 8, 155—198, 1959 [2] *В. Г. Оганджанян*, Дифференц уравнения, 5, № 9, 1642—1651, 1969. [3] *Ю. С. Шатилов*, Дифференц уравнения, 3, № 2, 264—272, 1967 [4] *В. Г. Оганджанян*, *Ю. С. Шатилов*, Труды Тамбовск. ин-та химич маш., вып 2, 1968 [5] *Н. В. Азбелев*, *Л. Ф. Рахматуллина*, *А. И. Чигирев*. Дифференц уравнения, 6, № 2, 223—229, 1970