ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LI 1970 3

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

В. Г. Болтянский

Об одном классе отображений гильбертова пространства

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 12/III 1970)

В этой заметке дается построение некоторого класса K непрерывных отображений $f: M \to H$, где M — открытое подмножество гильбертова пространства H. Этот класс отображений обладает рядом удачных свойств. Локально (т. е. в окрестности каждой точки $x_0 \in M$) отображение $f: M \to H$ класса K напоминает по своим свойствам отображение вида $\lambda E + A$, где E — тождественный оператор, A — вполне непрерывный оператор, а λ — действительное число, которое, однако, зависит от точки $x_0 \in M$. При этом замыкание $\overline{K}$ класса отображений K содержит, в частности, все отображения $\lambda E + A$. Таким образом, сохраняя многие свойства класса отображений вида $\lambda E + A$, класс $\overline{K}$ является вместе с тем значительно более широким.

Перейдем к точным определениям и формулировкам. Будем говорить, что отображение $f: M \to H$ принадлежит классу K, если для любой точки $x_0 \in M$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое конечномерное подпространство $L \subset H$, такая окрестность $U \subset M$ точки x_0 и такие числа $\lambda \geq 0$, $\delta > 0$, что если $x, y \in U$ и угол между вектором $x - y$ и подпространством L не меньше $\frac{\pi}{2} - \delta$, то

$$\|f(x) - f(y) - \lambda(x - y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|. \tag{1}$$

П р е д л о ж е н и е 1. *Каждое отображение $f: M \to H$ класса K локально удовлетворяет условию Липшица.*

Пользуясь этим предложением, можно несколько упростить определение класса отображений K. Именно, пусть M — открытое множество пространства H и $f: M \to H$ — отображение, локально удовлетворяющее условию Липшица. Отображение f тогда и только тогда принадлежит классу K, когда для любой точки $x_0 \in M$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое конечномерное подпространство $L \subset H$, такая окрестность $U \subset M$ точки x_0 и такое число $\lambda \geq 0$, что если $x, y \in U$ и $x - y \perp L$, то выполнено соотношение (1).

Можно также предложить и дальнейшую модификацию определения класса K. Пусть $e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots$ — фиксированный ортонормированный базис пространства H. Пусть, далее, M — открытое множество пространства H и $f\colon M \to H$ — отображение, локально удовлетворяющее условию Липшица. Отображение f тогда и только тогда принадлежит классу K, когда для любой точки $x_0 \in M$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное n, такая окрестность $U \subset M$ точки x_0 и такое число $\lambda > 0$, что если $x, y \in U$ и вектор $x - y$ ортогонален векторам $e_1, e_2, \cdots, e_n$, то выполнено соотношение (1).

Предложение 2. *При фиксированном M все отображения $f\colon M \to H$, принадлежащие классу K, образуют выпуклое множество. Иначе говоря, если $f, g\colon M \to H$ — отображения класса K и если $0 \leqslant k \leqslant 1$, то отображение $kf + (1-k)g\colon M \to H$ также принадлежит классу K.*

Следующее предложение устанавливает важное характеристическое свойство отображений класса K.

Предложение 3. *Пусть $f\colon M \to H$ — отображение, принадлежащее классу K. Тогда существует (и притом единственная) неотрицательная действительная непрерывная функция $\lambda(x)$, определенная на M и обладающая следующим свойством: для любой точки $x_0 \in M$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое конечномерное подпространство $L \subset H$, такая окрестность $U \subset M$ точки x_0 и такое число $\delta > 0$, что если $x, y \in U$ и угол между вектором $x - y$ и подпространством L не меньше $\frac{\pi}{2} - \delta$, то*

$$\|f(x) - f(y) - \lambda(x_0)(x - y)\| < \varepsilon \|x - y\|. \tag{2}$$

Это предложение показывает, что числа λ, участвующие в первоначальном определении отображений класса K (см. (1)) и зависящие от выбора точки $x_0 \in M$, могут быть „организованы" в единую непрерывную функцию $\lambda(x)$, заданную на всем множестве M. При этом основное соотношение (1), входящее в определение класса K, преобразуется к виду (2).

Функцию $\lambda(x) = \lambda_f(x)$, существование и единственность которой устанавливается предложением 3, будем называть *терминальной производной* отображения f (принадлежащего классу K). Без труда устанавливаются формулы „дифференцирования" суммы отображений и произведения отображения на число:

$$\lambda_{f+g} = \lambda_f + \lambda_g; \quad \lambda_{kf} = k\lambda_f \quad (k > 0).$$

Следующее предложение содержит правило „дифференцирования" сложной функции (см. (3)).

Предложение 4. *Пусть $f\colon M \to H$ и $g\colon M' \to H$ — такие отображения, принадлежащие классу K, что $f(M) \subset M'$. Тогда композиция $g \circ f\colon M \to H$ также является отображением класса K.*

При этом терминальная производная $\lambda_{g\circ f}$ отображения $g\circ f$ вычисляется по формуле

$$\lambda_{g\circ f}(x) = \lambda_g(f(x))\cdot\lambda_f(x) \qquad (x\in M). \tag{3}$$

Предложение 4 позволяет построить некоторую категорию K, объектами которой являются всевозможные открытые множества гильбертова пространства H, а морфизмами—отображения, принадлежащие классу K. Более подробно, пусть M и Q — некоторые открытые множества пространства H, а f — такое отображение класса K, определенное на M, что $f(M)\subset Q$. Тогда тройку (f, M, Q) мы условимся считать морфизмом с областью определения M и областью значений Q. Композиция двух морфизмов всегда определена, если область значений первого совпадает с областью определения второго. Иначе говоря, если (f, M, Q) и (g, N, P) — такие два морфизма, что $Q = N$, то определена их композиция $(g\circ f, M, P)$.

Выше мы отмечали, что всякое отображение вида $\lambda E + A$ (где A — вполне непрерывный оператор) принадлежит классу $\overline{K}$. Если при этом отображение $\lambda E + A$ принадлежит самому классу K, то его терминальная производная постоянна (и равна λ). Таким образом, класс $\overline{K}$, содержащий отображения с переменной терминальной производной существенно шире класса отображений вида $\lambda E + A$.

В заключение рассмотрим один простой пример отображения класса K. Пусть H^* — гильбертово пространство, содержащее H в качестве подпространства дефекта 1 (т. е. все векторы в H^*, ортогональные подпространству H, коллинеарны между собой). Пусть, далее, Σ — шар радиуса 1 в H^*, касающийся подпространства H, и пусть a — центр шара Σ, а b — такая внутренняя точка этого шара, что ее расстояние от H не меньше 1. Через φ_a, φ_b обозначим центральное проектирование подпространства H на поверхность шара Σ из точек a, b соответственно. Тогда для любого открытого множества $M\subset H$ отображение $f = \varphi_b^{-1}\circ\varphi_a : M\to H$ принадлежит классу K. Терминальная производная λ_f этого отображения f определяется следующим образом. Пусть $x\in M$ и $y = f(x)$, т. е. $\varphi_a(x) = \varphi_b(y) = q$, где q — некоторая точка на поверхности шара Σ. Тогда

$$\lambda_f(x) = \frac{|a-q|}{|a-x|}\cdot\frac{|b-y|}{|b-q|}.$$

Отметим, что отображение f обладает еще одним важным свойством: для любого компактного множества $X\subset M$ его прообраз $f^{-1}(X)$ также компактен.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Վ. Գ. ԲՈԼՏՅԱՆՍԿԻ

Հիլբերտյան տարածության մեջ արտապատկերումների մի դասի մասին

Հոդվածում կառուցված է $f: M \to H$ անընդհատ արտապատկերումների մի նոր դաս, որտեղ M-ը H հիլբերտյան տարածության բաց ենթաբազմությունն է։ Այդ դասը, որն ունի մի շարք հաջող հատկություններ նշանակված է K տառով։ Այդ դասի արտապատկերումները լոկալ (այսինքն M բազմության յուրաքանչյուր x_0 կետի շրջակայքում) իրենց հատկություններով հիշեցնում են $\lambda E+A$ տեսքի արտապատկերումները, որտեղ E-ն նույնական օպերատոր է, A-ն լրիվ անընդհատ օպերատոր, իսկ λ-ն իրական թիվ, որը սակայն կախված է x_0 կետից։

Այսպիսով, պահպանելով $\lambda E+A$ տեսքի արտապատկերումների դասի շատ հատկություններ, K դասի $\overline{K}$ փակույթը հանդիսանում է բավականին ավելի լայն դաս։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *И. М. Рапопорт*, О некоторых асимптотических методах в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Изд. АН УССР, Киев, 1954. 2 *М. В. Федорюк*, Матем. сборник, т. 79 (121), № 4 (8), 477—516, 1969. 3 *М. В. Федорюк*, Докторская диссертация, М., 1966. 4 *Ф. Р. Гантмахер*, Теория матриц, Изд. «Наука», М., 1967.