

УДК 530

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Р. С. Оганесян

К теории политропической атмосферы в целом

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. С. Саакяном 23/III 1970)

Рассмотрим вопрос равновесия атмосферы с учетом политропического режима. Ставим цель, найти закон распределения плотности, вычислим эффективный размер и массу атмосферы, учитывая только силы гравитационного взаимодействия. Не затрагивая локальные задачи, целью которых является нахождение распределения полей температур, давлений, скоростей в сравнительно небольшой области пространства, существования атмосферы, в целом, необходимо связать со сходимостью следующего интеграла (1)

$$4\pi \int_R^\infty \rho(r) r^2 dr < \infty, \quad (1)$$

где R — радиус центрального ядра, $\rho(r)$ — плотность распределения атмосферы, удовлетворяющая следующим граничным условиям в интервале (R, ∞) :

$$\begin{aligned} r = R, \quad \rho &= \rho_0 \\ r \rightarrow \infty, \quad \rho &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Кроме того $\rho(r)$, а также температура $T(r)$ должны удовлетворять требованиям: $\rho(r) > 0$ и $T(r) > 0$ в интервале (R, ∞) .

Плотность распределения гравитирующих масс с учетом политропического режима в атмосфере определяется из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} &= \frac{d}{dr} (V_0 + \varphi), \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) &= -4\pi G\rho, \\ P &= k\rho^1, \end{aligned} \quad (3)$$

где V_0 — внешний потенциал гравитационного ядра, γ — показатель политропы, который принимает обычно любое значение.

Таким образом, требуется решить граничную задачу и найти класс собственных функций и спектр собственных значений.

Представим

$$\rho(r) = A_n \theta^n; \quad \gamma = 1 + \frac{1}{n}, \quad (4)$$

где A_n , θ , n — подлежащие определению неизвестные величины. Из (3) с учетом (4) находим, что

$$K(n+1) \{4\pi G A_n^{\frac{n-1}{n}}\}^{-1} \cdot \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) = -\theta^n, \quad (5)$$

которое, с помощью обозначений

$$a_n^2 = K(n+1) \{4\pi G A_n^{\frac{n-1}{n}}\}^{-1}, \quad r = a_n \xi$$

приводится к известному уравнению Эйдена (2)

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \theta^n = 0. \quad (6)$$

Поскольку нас интересуют решения уравнения (6) в интервале (R, ∞) не содержащие особенности, можем представить

$$\theta = C \xi^{-\beta}. \quad (7)$$

Подстановка в (6) дает

$$-\beta(1-\beta)\xi^{-\beta-2} = C^{n-1} \xi^{-\beta n}.$$

В виду произвольности β и C , можно положить

$$\beta + 2 = \beta n; \quad \beta(1-\beta) = C^{n-1} \quad (8)$$

$$\beta = \frac{2}{n-1}; \quad C^{n-1} = \frac{2(n-3)}{(n-1)}.$$

Следовательно,

$$\theta = \left\{ \frac{2(n-3)}{(n-1)^2} \right\}^{\frac{1}{n-1}} \xi^{-\frac{2}{n-1}}, \quad (9)$$

$$\rho = A_n \left\{ \frac{2(n-3)}{(n-1)^2} \right\}^{\frac{n}{n-1}} \xi^{-\frac{2n}{n-1}}.$$

При $r = R$, или $\xi = \xi_n = R/a_n$, $\rho = \rho_0$ (плотность атмосферы на поверхности ядра). Следовательно,

$$A_n = \rho_0 \left\{ \frac{(n-1)^2}{2(n-3)} \right\}^{\frac{n}{n-1}} \xi_n^{\frac{2n}{n-1}}$$

Подставляя в (9), получим закон распределения плотности в виде

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{\xi_n}{\xi} \right)^{\frac{2n}{n-1}} = \rho_0 \left(\frac{R}{r} \right)^{\frac{2n}{n-1}}. \quad (10)$$

Возможные значения индекса политропической модели атмосферы определяются после подстановки (10) в (1).

$$4 \pi \rho_0 \int_R^\infty \left(\frac{R}{r} \right)^{\frac{2n}{n-1}} r^2 dr < \infty. \quad (11)$$

Для сходимости необходимо

$$\frac{3-n}{n-1} > 0$$

откуда следует:

$$1) \quad 3 > n; \quad n < 1, \quad \text{т. е.} \quad 1 < n < 3 \quad (12)$$

$$2) \quad 3 < n; \quad n < 1 \quad \text{невозможно.}$$

Таким образом, спектр собственных значений нашей задачи определяется условием (12), а класс собственных функций — (10).

После вычисления интеграла (11) получаем довольно простую формулу для массы политропической атмосферы

$$M_a = 4 \pi \rho_0 R^3 \frac{n-1}{3-n}. \quad (13)$$

Вычисление массы атмосферы облегчается, если известна средняя плотность $\bar{\rho}_c$ или масса M_c центрального ядра. При этом окончательно получим

$$M_a = \frac{3(n-1)}{3-n} \cdot \frac{\rho_0}{\rho_c} M_c. \quad (14)$$

Из полученных результатов вытекает невозможность существования изотермической ($n = \infty$, $P = k\rho$) атмосферы, поскольку интеграл (11) расходится. По этой же причине исключается возможность существования атмосферы из газа с $n = 3$, $P = k\rho^{1/2}$. Наконец вычислим самосогласованный потенциал атмосферы с помощью (10) и (3). Для напряженности поля получаем

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{M_0 G}{r^2} \left(\frac{R}{r} \right)^{\frac{3-n}{n-1}} + \frac{A_1}{r^2}.$$

Пользуясь теоремой Гаусса (при $r \rightarrow R$, $\frac{d\varphi}{dr} \rightarrow 0$), находим

$$A_1 = GM_a.$$

и

$$\varphi = GM_a \left\{ \frac{1}{r} - \frac{(n-1)}{2R} \left(\frac{R}{r} \right)^{\frac{2}{n-1}} \right\}.$$

А общий потенциал ядра и атмосферы представится в виде

$$V_0 + \varphi = \frac{GM}{r} - \frac{GM_a (n-1)}{2R} \left(\frac{R}{r} \right)^{\frac{2}{n-1}},$$

где $M = M_c + M_a$ суммарная масса центрального ядра и атмосферы. Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим земную атмосферу.

1. Адиабатическая модель земной атмосферы является частным случаем рассматриваемой политропической модели, если γ заменить отношением теплоемкостей c_p/c_v . Поскольку наша атмосфера в основном состоит из двухатомного газа, то

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{7}{5} = 1 + \frac{1}{n}$$

откуда получаем $n = 2,5$. Имея ввиду также, что

$$\rho_0 = 1,29 \cdot 10^{-3} \text{ г см}^{-3}; \quad \bar{\rho}_c = 5,517 \text{ г см}^{-3}$$

для массы земной атмосферы находим

$$M_a \approx 2,24 \cdot 10^{-3} M_c \quad (M_c \text{ масса земли}),$$

что примерно на три порядка больше. Плотность уменьшается очень медленно по закону $\rho \approx \rho_0 \left(\frac{R}{r} \right)^{1,33}$, и эффективная толщина выходит больше, чем наблюдаемая. Следовательно, адиабатическая модель земной атмосферы далека от реальной картины.

2. Политропическая модель земной атмосферы оказывается более близкой к реальной картине. При этом, необходимо найти индекс политропы n . Для этой цели мы пользовались экспериментальными данными, относящимися к плотности атмосферы на различных высотах. В таблице приводятся значения n , вычисленные по формуле (10), причем отношение обычных плотностей заменено отношением плотностей чисел частиц ($\rho/\rho_0 = N/N_0$).

Из приведенной таблицы видно, что для земной атмосферы n очень мало отчается от единицы, причем, чем ближе к единице, тем быстрее падает плотность с высотой и тем меньше эффективная толщина. Действительно, масса атмосферы, заключенная между R и $R + H$ будет

$$M_a(H) = 4\pi\rho_0 \int_R^{R+H} \left(\frac{R}{r} \right)^{\frac{2n}{n-1}} r^2 dr$$

или

$$M_a(H) = \frac{n-1}{3-n} 4\pi\rho_0 R^3 \left\{ 1 - \left(1 + \frac{H}{R} \right)^{-\frac{3-n}{n-1}} \right\}. \quad (15)$$

Определим эффективную толщину атмосферы такой высоты H , при которой $9/10$ всей массы атмосферы заключена между R и $R + H$. Комбинируя (15) и (13) получим уравнение для определения H при данном n :

$$\lg\left(1 + \frac{H}{R}\right) = \frac{n-1}{3-n}. \quad (16)$$

Из таблицы видно, что n принимает различные значения для различных слоев атмосферы. Это свидетельствует о слоистой структуре атмосферы. Масса и эффективная толщина атмосферы в основном определяются свойствами нижнего слоя. В ближайшем к земле слое, в

Высота h , км	Плотность числа час- тиц N	Индекс по- литропы n	Высота h , км	Плотность числа час- тиц N	Индекс по- литропы n
0	$2,7 \cdot 10^{19}$	1,00239	120	$2,5 \cdot 10^{13}$	1,00230
10	$7,2 \cdot 10^{18}$	1,00216	130	$4 \cdot 10^{11}$	1,00224
20	$1,5 \cdot 10^{18}$	1,00212	150	$1,5 \cdot 10^{11}$	1,00244
30	$3,2 \cdot 10^{17}$	1,00216	200	$2 \cdot 10^{10}$	1,00291
40	$8,1 \cdot 10^{16}$	1,00223	300	$3 \cdot 10^9$	1,00402
50	$2,5 \cdot 10^{16}$	1,00219	400	$5 \cdot 10^8$	1,00490
60	$5 \cdot 10^{15}$	1,00230	500	$5 \cdot 10^7$	1,00560
70	$2 \cdot 10^{15}$	1,00230	600	$2 \cdot 10^7$	1,00640
80	$2 \cdot 10^{14}$	1,002110	700	$6 \cdot 10^6$	1,00708
90	10^{14}	1,00224	800	$2 \cdot 10^6$	1,00789
100	$2,5 \cdot 10^{13}$	1,00224	900	$1 \cdot 10^6$	1,00861
110	$8,5 \cdot 10^{12}$	1,00224	1000	$4 \cdot 10^5$	1,00925

пределах $0 \leq h \leq 200$ км индекс политропы изменяется очень незначительно, его среднее значение равно $\bar{n} = 1,00227$. Вычисляя массу и эффективную толщину атмосферы по этому среднему значению $\bar{n}$, с помощью формул (14) и (16), получим соответственно

$$\bar{M}_a = 0,8 \cdot 10^{-6} M_z; \bar{H} \approx 16,7 \text{ км.}$$

Таким образом, получается, что масса атмосферы примерно в миллион раз меньше массы земли, а эффективная толщина составляет 16—17 км. Для верхних слоев индекс постепенно и медленно увеличивается, однако соответствующий им порядок массы атмосферы почти не меняется, а эффективная толщина увеличивается. Однако в использованной нами таблице (1) данные о распределении плотности атмосферы выше 200 км приведены через каждые 100 км. Это не дает возможности более точно определить среднее значение $\bar{n}$ для верхних слоев.

В заключение хочу выразить благодарность проф. А. А. Власову за постоянный интерес к решению этой задачи, а также проф. Г. С. Саакяну за обсуждения полученных результатов на теоретическом семинаре.

Ереванский государственный
университет

Պոլիտրոպիկ ատմոսֆերայի տեսության մասին

Գիտարկվում է երկնային մարմինների շուրջը ատմոսֆերայի զոյություն հարթը՝ պոլիտրոպիկ՝
ռեծիմի հաշվառմամբ, Գտնված է խտության բախման սրինաչափությունը ատմոսֆերայում՝

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{R}{r} \right)^{\frac{2n}{n-1}}$$

տեսքով, որտեղ R -կենտրոնական մարմնի շառավիղն է, ρ_0 ատմոսֆերայի խտությունը
 $r = R$ մակերևույթի վրա, իսկ n -ը պոլիտրոպի ինդեքսը, որը փոփոխվում է $1 < n < 3$ տիրույ-
թում: Ատմոսֆերայի զանգվածի համար ստացված է հետևյալ արտահայտությունը՝

$$M_a = \frac{3(n-1)}{3-n} \cdot \frac{\rho_0}{\rho_c} M_c,$$

որտեղ ρ_c -ն կենտրոնական երկնային մարմնի միջին խտությունն է, M_c -ն երա զանգվածը:
Մասնավորաբար երկրի ատմոսֆերայի համար ստացվում են $n = 1.00227$, $M_a = 0.8 \cdot 10^{-6}$, որ-
տեղ M_c -ն երկրի զանգվածն է: Այն ֆեկտիվ բարձրությունը մինչև որ կենտրոնացված է երկրի
ատմոսֆերայի ողջ զանգվածի 9/10 մասը, կազմում է 16—17 կմ:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Կ Ր Ո Վ Ա Ն ՈՒ Մ ՈՒ Ն

¹ А. А. Власов, Статистические функции распределения, М., 1956. ² С. Чандрасекар, Введение в учение о строении звезд, М., 1950. ³ Я. Н. Альперт, Распространения радиоволн и ионосфера, М., 1950.