ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LI 1970 2

УДК 517.9

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Р. С. Минасян

О плоском установившемся течении тепла в зигзагообразном теле

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 20/IV 1970)

В работе дается решение задачи плоского установившегося течения тепла в призматическом теле, имеющем в плане зигзагообразную форму (рис. 1), когда на гранях области задано распределение температуры, а внутри тела происходит тепловыделение. Математически задача сводится к решению уравнения ([1])

$$\frac{\partial^2 U(x,\ y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U(x,\ y)}{\partial y^2}=-\frac{1}{\lambda}w(x,\ y), \tag{1}$$

где λ — коэффициент теплопроводности материала, $w(x,\ y)$ — интенсивность тепловыделения, а также удовлетворению граничным условиям

$$U(x,\ \omega x)=S_0(x),\quad U(x,\ \omega x+d)=S(x). \tag{2}$$

Здесь $\omega=\operatorname{tg}\theta$.

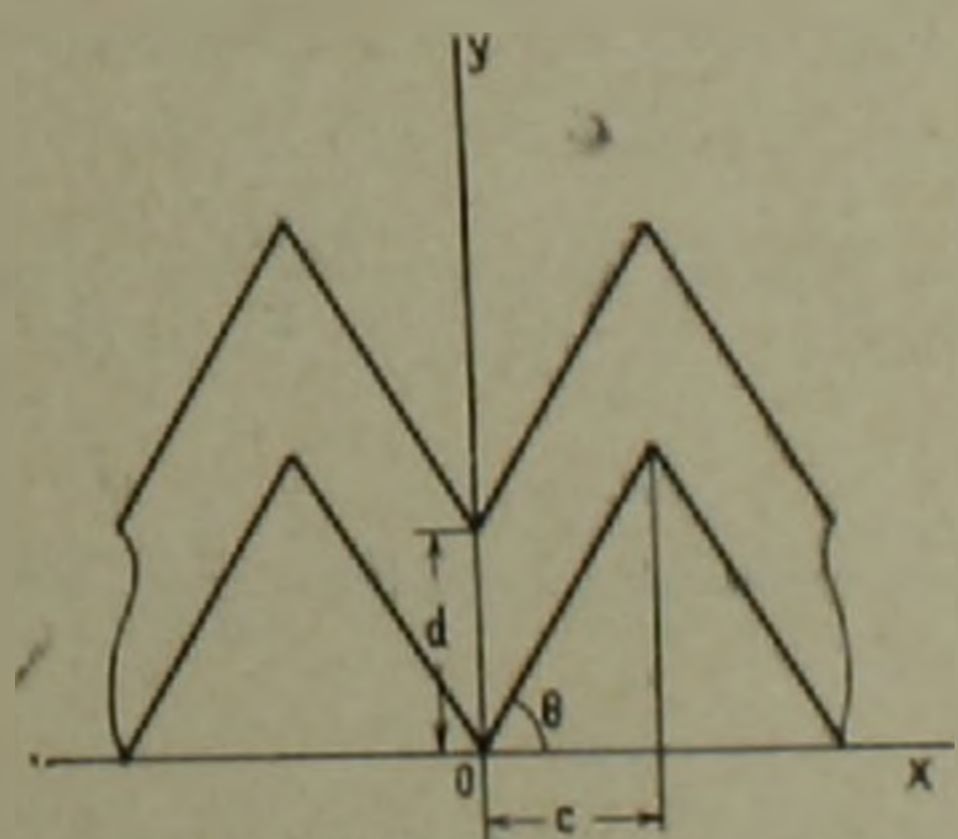

Рис. 1

Для простоты ограничиваемся симметричным случаем, когда

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=c}=0. \tag{3}$$

Относительно функций $S_0(x)$ и $S(x)$ предполагаем, что они непрерывны и обладают почти всюду в (O, c) производной с ограниченной вариацией. Что касается $w(x, y)$, то предполагаем, что она удовлетворяет условиям Дирихле.

Прежде чем переходить к построению решения, преобразуем систему координат:

$$x = \xi; \quad y - \omega x = \eta\sqrt{1+\omega^2}. \tag{4}$$

Тогда функция $U^*(\xi, \eta) = U(\xi, \omega\xi + \eta\sqrt{1+\omega^2})$ будет удовлетворять в прямоугольной области $0 < \xi < c$; $0 < \eta < \frac{d}{\sqrt{1+\omega^2}}$ уравнению с неразделяющимися переменными

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial \xi^2} - 2\alpha\frac{\partial^2 U^*}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial\eta^2} = -\frac{1}{\lambda}w^*(\xi, \eta), \tag{5}$$

где обозначено

$$\alpha = \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}; \quad w^*(\xi, \eta) = w(\xi, \omega\xi + \eta\sqrt{1+\omega^2}), \tag{6}$$

и граничным условиям

$$U^*(\xi, 0) = S_0(\xi); \quad U^*\left(\xi, \frac{d}{\sqrt{1+\omega^2}}\right) = S(\xi);$$

$$\left|\frac{\partial U^*}{\partial\xi} - \alpha\frac{\partial U^*}{\partial\eta}\right|\Bigg|_{\xi=0} = \left|\frac{\partial U^*}{\partial\xi} - \alpha\frac{\partial U^*}{\partial\eta}\right|\Bigg|_{\xi=c} = 0. \tag{7}$$

Для нахождения функции $U^*(\xi, \eta)$ воспользуемся работой (²).

Будем искать функцию $U^*(\xi, \eta)$ одновременно в виде двух разложений в ряд:

$$U^*(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\xi)\sin\gamma_k\eta = \frac{g_0(\xi)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\xi)\cos\gamma_k\eta, \tag{8}$$

где

$$\gamma_k = \frac{k\pi}{d_1}, \quad d_1 = \frac{d}{\sqrt{1+\omega^2}}; \quad f_k(\xi) = \frac{2}{d_1}\int_0^{d_1} U^*(\xi, \eta)\sin\gamma_k\eta\,d\eta,$$

$$g_k(\xi) = \frac{2}{d_1}\int_0^{d_1} U^*(\xi, \eta)\cos\gamma_k\eta\,d\eta. \tag{9}$$

Для определения $f_k(\xi)$ и $g_k(\xi)$ умножим уравнение (5) поочередно на $\frac{2}{d_1}\sin\gamma_k\eta\,d\eta$ и $\frac{2}{d_1}\cos\gamma_k\eta\,d\eta$ и проинтегрируем от 0 до d_1. Принимая во внимание граничные условия (7), будем иметь:

$$f_k''(\xi)+2\alpha\gamma_k g_k'(\xi)-\gamma_k^2 f_k(\xi)=-\frac{2}{d_1}\left\{\frac{1}{\lambda}\int_0^{d_1} w^*(\xi,\eta)\sin\gamma_k\eta\,d\eta+\right.$$

$$\left.+\gamma_k\left[S_0(\xi)-(-1)^k S(\xi)\right]\right\}=-\frac{2}{d_1}P_k(\xi);$$

$$g_k''(\xi)-2\alpha\gamma_k f_k'(\xi)-\gamma_k^2 g_k(\xi)=-\frac{2}{d_1}\left\{\frac{1}{\lambda}\int_0^{d_1} w^*(\xi,\eta)\cos\gamma_k\eta\,d\eta+\right.$$

$$\left.+2\alpha\left[S_0'(\xi)-(-1)^k S'(\xi)\right]-S_1(\xi)+(-1)^k S_2(\xi)\right\}=-\frac{2}{d_1}Q_k(\xi).$$

Здесь обозначено (10)

$$S_1(\xi)=\left.\frac{\partial U^*}{\partial\eta}\right|_{\eta=0};\quad S_2(\xi)=\left.\frac{\partial U^*}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}.$$

Решая уравнения (10) и удовлетворяя соответствующим граничным условиям для $f_k(\xi)$ и $g_k(\xi)$, получим:

$$f_k(\xi)=\frac{2}{\nu\gamma_k d_1\operatorname{sh}\nu\gamma_k c}\left\{\operatorname{ch}\nu\gamma_k(c-\xi)\left[-\alpha\left(S_0(0)-(-1)^k S(0)\right)\sin\alpha\gamma_k\xi+\right.\right.$$

$$\left.+\int_0^{\xi}\left(P_k(t)\cos\alpha\gamma_k(\xi-t)-Q_k(t)\sin\alpha\gamma_k(\xi-t)\right)\operatorname{ch}\nu\gamma_k t\,dt\right]+$$

$$+\operatorname{ch}\nu\gamma_k\xi\left[-\alpha\left(S_0(c)-(-1)^k S(c)\right)\sin\alpha\gamma_k(c-\xi)+\int_{\xi}^{c}\left(P_k(t)\cos\alpha\gamma_k(t-\xi)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+Q_k(t)\sin\alpha\gamma_k(t-\xi)\right)\operatorname{ch}\nu\gamma_k(c-t)\,dt\right]\right\};$$

$$g_k(\xi)=\frac{2}{\nu\gamma_k d_1\operatorname{sh}\nu\gamma_k c}\left\{\operatorname{ch}\nu\gamma_k(c-\xi)\left[\alpha\left(S_0(0)-(-1)^k S_0(0)\right)\cos\alpha\gamma_k\xi+\right.\right. \quad (11)$$

$$\left.+\int_0^{\xi}\left(P_k(t)\sin\alpha\gamma_k(t-\xi)+Q_k(t)\cos\alpha\gamma_k(t-\xi)\right)\operatorname{ch}\nu\gamma_k t\,dt\right]-$$

$$-\operatorname{ch}\nu\gamma_k\xi\left[\alpha\left(S_0(c)-(-1)^k S(c)\right)\cos\alpha\gamma_k(c-\xi)+\int_{\xi}^{c}\left(P_k(t)\sin\alpha\gamma_k(t-\xi)-\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-Q_k(t)\cos\alpha\gamma_k(t-\xi)\right)\operatorname{ch}\nu\gamma_k(c-t)\,dt\right]\right\},$$

где $\nu=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$. Для $k=0$ имеем

$$g_0(\xi) = C_0 - \frac{2}{d_1}\int_0^{\xi}\left\{(\xi - t)\left[\frac{1}{\lambda}\int_0^{d_1} w^*(t, \eta)\, d\eta + \alpha\,(S_0'(t) - S'(t)) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - S_1(t) + S_2(t)\right] + \alpha\,[S_0(t) - S(t)]\right\} dt, \qquad (12)$$

где C_0 — постоянная интегрирования, которая определится в дальнейшем. При этом должно выполняться следующее условие:

$$\int_0^c [S_1(\xi) - S_2(\xi) - \alpha\,(S_0'(\xi) - S'(\xi))]\, d\xi = \frac{1}{\lambda}\int_0^c\int_0^{d_1} w^*(\xi, \eta)\, d\eta\, d\xi. \qquad (13)$$

В выражения для $f_k(\xi)$ и $g_k(\xi)$ входят неизвестные значения $S_1(\xi)$ и $S_2(\xi)$. Для их определения потребуем выполнения первой группы граничных условий (7) вторым представлением функции $U^*(\xi, \eta)$.

$$\frac{g_0(\xi)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\xi) = S_0(\xi), \quad \frac{g_0(\xi)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k g_k(\xi) = S(\xi). \qquad (14)$$

Умножим оба уравнения (14) на $\frac{2}{c}\cos\delta_j\xi\, d\xi$, где $\delta_j = \frac{j\pi}{c}$, и проинтегрируем от 0 до c. Замечая, что ряды в (14) сходятся в $(0, c)$ равномерно, вследствие чего возможна перестановка знаков суммы и интеграла, после некоторых преобразований получим

$$a_j^{(s)} = -2\alpha\delta_j\,\frac{\operatorname{ch}\nu\delta_j d_1 - (-1)^s\cos\alpha\delta_j d_1}{d_1\operatorname{sh}\nu\delta_j d_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[1 + (-1)^{k+j}](\delta_j^2 - \gamma_k^2)m_k^{(s)}}{(\gamma_k^2 + \delta_j^2)^2 - 4\alpha^2\gamma_k^2\delta_j^2} +$$

$$+ p_j^{(s)}. \qquad (s = 0;\ 1) \qquad (15)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$a_j^{(s)} = 2\int_0^c [S_1(\xi) - (-1)^s S_2(\xi)]\cos\delta_j\xi\, d\xi;$$

$$m_k^{(s)} = \gamma_k d_1\,[f_k(0) - (-1)^s f_k(c)] + 2\nu\,[S_0(0) - (-1)^k S(0) -$$

$$- (-1)^s(S_0(c) - (-1)^k S(c))];$$

$$p_j^{(s)} = \frac{2}{\operatorname{sh}\nu\delta_j d_1}\left\{\frac{1}{\lambda}\int_0^c\int_0^{d_1} w^*(\xi, \eta)\,[\cos\delta_j(\xi + \alpha\eta)\operatorname{sh}\nu\delta_j(d_1 - \eta) +\right.$$

$$+ (-1)^s\cos\delta_j(\xi - \alpha d_1 + \alpha\eta)\operatorname{sh}\nu\delta_j\eta]\, d\eta\, d\xi + \nu\operatorname{sh}\nu\delta_j d_1\int_0^c [S_0'(\xi) + \qquad (16)$$

$$+(-1)^i S'(\xi)]\sin\delta_j\xi\, d\xi + \frac{\alpha\nu}{\delta_j d_1}[1+(-1)^j](\operatorname{ch}\nu\delta_j d_1 -$$

$$-\cos\alpha\delta_j d_1)[S_0(0)-S(0)-(-1)^j(S_0(c)-S(c))]\}.$$

При $k=0$ имеем:

$$a_0^{(1)}=\frac{4\alpha}{\nu d_1^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{\gamma_k^2}m_k^{(0)}+\frac{2}{d_1}\int_0^c\left[\frac{1}{\lambda}\int_0^{d_1}w^*(\xi,\eta)(d_1-2\eta)\,d\eta-\right.$$

$$\left.-S_0(\xi)+S(\xi)\right]d\xi;$$

$$a_0^{(0)}=2\int_0^c\left[\frac{1}{\lambda}\int_0^{d_1}w^*(\xi,\eta)\,d\eta+\alpha(S_0'(\xi)-S'(\xi))\right]d\xi;$$

$$C_0=-\frac{\alpha c}{d_1}[S_0(c)-S(c)]-\frac{\alpha d_1}{2c}[S_0(0)-S(0)-S_0(c)+S(c)]+ \tag{17}$$

$$+\frac{1}{cd_1}\int_0^c\left[\frac{1}{\lambda}\int_0^{d_1}w^*(\xi,\eta)\,d\eta+2\alpha(S_0'(\xi)-S'(\xi))\right]\xi^2\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{\lambda cd_1}\int_0^c\int_0^{d_1}w^*(\xi,\eta)\,\eta\,(d_1-\eta)\,d\eta\,d\xi+\frac{1}{c}\int_0^c[S_0(\xi)+S(\xi)]\,d\xi-$$

$$-\frac{1}{cd_1}\left[\frac{a_0^{(0)}c^2}{6}+2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j a_j^{(0)}}{\delta_j^2}+\frac{\alpha}{\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^k}{\gamma_k^2}m_k^{(0)}\right].$$

В свою очередь $m_k^{(0)}$ и $m_k^{(1)}$, согласно (11), определятся из следующей системы:

$$m_k^{(s)}=-2\alpha\gamma_k\frac{\operatorname{ch}\nu\gamma_k c-(-1)^s\cos\alpha\gamma_k c}{c\operatorname{sh}\nu\gamma_k c}\left[\frac{1+(-1)^s}{2\gamma_k^2}a_0^{(k)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{j+s})(\gamma_k^2-\delta_j^2)\,a_j^{(k)}}{(\gamma_k^2+\delta_j^2)^2-4\alpha^2\gamma_k^2\delta_j^2}\right]+q_k^{(s)}, \tag{18}$$

где

$$q_k^{(s)}=\frac{2}{\operatorname{sh}\nu\gamma_k c}\left\{\frac{1}{\lambda}\int_0^c\int_0^{d_1}w^*(\xi,\eta)[\sin\gamma_k(\eta+\alpha\xi)\operatorname{ch}\nu\gamma_k(c-\xi)+\right.$$

$$+(-1)^s\sin\gamma_k(\alpha c-\alpha\xi-\eta)\operatorname{ch}\nu\gamma_k\xi]\,d\eta\,d\xi+\int_0^c[S_0'(\xi)-(-1)^s S'(\xi)][\alpha\sin\alpha\gamma_k\xi\,\times$$

$$\times\operatorname{ch}\nu\gamma_k\xi+\nu\cos\alpha\gamma_k\xi\operatorname{sh}\nu\gamma_k(c-\xi)+(-1)^s(\alpha\sin\alpha\gamma_k(c-\xi)\operatorname{ch}\nu\gamma_k\xi+ \tag{19}$$

$$+\nu\cos\alpha\gamma_k(c-\xi)\operatorname{sh}\nu\gamma_k\xi)]\,d\xi\}.$$

Таким образом, для определения $a_j^{(s)}$ и $m_k^{(s)}$ получили совокупность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (15), (17) и (18). Исследование полученной совокупности показывает, что при $|\alpha|<0{,}9$ суммы модулей коэффициентов в каждом из уравнений системы (15) и (18), начиная с $k>2$, $j>2$, строго меньше единицы. Свободные $p_j^{(s)}$ и $q_k^{(s)}$, как легко видеть из (16) и (19), оставаясь ограниченными в своей совокупности, убывают с быстротой $0\left(\frac{1}{j}\right)$ и $0\left(\frac{1}{k}\right)$.

Из теории бесконечных систем ([3]) следует единственность ограниченного решения систем (15), (17) и (18) и сходимость метода последовательных приближений. Заметим далее, что при $|\alpha|\leqslant 0{,}78$ неизвестные $a_j^{(s)}$ и $m_k^{(s)}$, начиная с некоторых $j=j_1$; $k=k_1$, зависящих от α и отношения сторон $\frac{d}{c}$, стремятся к нулю соответственно с быстротой $0\left(\frac{1}{\sqrt{j}}\right)$ и $0\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. В самом деле, обозначив $a_j^{(s)}=\frac{A_j^{(s)}}{\sqrt{\delta_j}}$; $m_k^{(s)}=\frac{M_k^{(s)}}{\sqrt{\gamma_k}}$, для новых неизвестных $A_j^{(s)}$ и $M_k^{(s)}$ получим системы уравнений, суммы модулей коэффициентов в каждом из уравнений, начиная с $k=k_1$, $j=j_1$, не превосходят числа, меньшего единицы, а свободные члены стремятся к нулю с быстротой $0\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$, $0\left(\frac{1}{\sqrt{j}}\right)$.

Подставляя значение $f_k(\xi)$ из (11) в первое из разложений (8), принимая во внимание (15), (16) и (18) и переходя к декартовым координатам, после различных преобразований окончательно получим

$$U(x,y)=\left(1-\frac{y-\omega x}{d}\right)S_0(x)+\frac{y-\omega x}{d}S(x)+$$

$$+\frac{1}{2d}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\gamma_k(\nu y-\alpha x)}{\gamma_k(\operatorname{ch}2\nu\gamma_k d-\cos 2\alpha\gamma_k d)}\Big\{(m_k^{(0)}+m_k^{(1)})F_k(x)+(m_k^{(1)}-$$

$$-m_k^{(0)})F_k(c-x)-\frac{2}{\lambda}\int_0^x\int_{\omega x_1}^{d+\omega x_1}w(x_1,y_1)G_k(x,x_1,\nu y_1)\,dy_1dx_1+$$

$$+\frac{2}{\lambda}\int_x^c\int_{\omega x_1}^{d+\omega x_1}w(x_1,y_1)G_k(c-x,c-x_1,\alpha c-\nu y_1)\,dy_1dx_1+$$

$$+2\int_0^x[S_0'(x_1)-(-1)^kS'(x_1)]\,L_k(x,x_1)\,dx_1-$$

$$
-2\int_{x}^{c}[S_0'(x_1)-(-1)^k S'(x_1)]\,L_k(c-x,\ c-x_1)\,dx_1\Bigg\}+
$$

$$
+\frac{1}{2c}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin\delta_j\lambda}{\delta_j(\operatorname{ch}2\nu^2\delta_j d-\cos 2\alpha\nu\delta_j d)}\left[(a_j^{(0)}+a_j^{(1)})N_j(\nu y-\alpha x)+\right.
$$

$$
\left.+(a_j^{(1)}-a_j^{(0)})N_j(\nu d-\nu y+\alpha x)\right]. \tag{20}
$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$
F_k(x)=\operatorname{ch}\nu\gamma_k(2c-x)\cos\alpha\gamma_k x-\operatorname{ch}\nu\gamma_k x\cos\alpha\gamma_k(2c-x);
$$

$$
G_k(x,\ x_1,\ \nu y_1)=\sin\gamma_k(\alpha x-\nu y_1)\operatorname{sh}\nu\gamma_k(2c-x+x_1)-
$$

$$
-\sin\gamma_k(2\alpha c-\alpha x+\nu y_1)\operatorname{sh}\nu\gamma_k(x-x_1)+\sin\gamma_k(\alpha x+
$$

$$
+\nu y_1)\operatorname{sh}\nu\gamma_k(2c-x-x_1)-\sin\gamma_k(2\alpha c-\alpha x-\nu y_1)\operatorname{sh}\nu\gamma_k(x+x_1);
$$

$$
L_k(x,\ x_1)=\alpha[\sin\alpha\gamma_k(2c-x+x_1)\operatorname{sh}\nu\gamma_k(x-x_1)-
$$

$$
-\sin\alpha\gamma_k(x-x_1)\operatorname{sh}\nu\gamma_k(2c-x+x_1)-\sin\alpha\gamma_k(x+
$$

$$
+x_1)\operatorname{sh}\nu\gamma_k(2c-x-x_1)+\sin\alpha\gamma_k(2c-x-x_1)\operatorname{sh}\nu\gamma_k(x+x_1)]+
$$

$$
+\nu[\cos\alpha\gamma_k(2c-x+x_1)\operatorname{ch}\nu\gamma_1(x-x_1)-\cos\alpha\gamma_k(x- \tag{21}
$$

$$
-x_1)\operatorname{ch}\nu\gamma_k(2c-x+x_1)+\cos\alpha\gamma_k(2c-x-x_1)\operatorname{ch}\nu\gamma_k(x+x_1)-
$$

$$
-\cos\alpha\gamma_k(x+x_1)\operatorname{ch}\nu\gamma_k(2c-x-x_1)];
$$

$$
N_j(y)=\sin\alpha\delta_j y\operatorname{sh}\nu\delta_j(2\nu d-y)-\sin\alpha\delta_j(2\nu d-y)\operatorname{sh}\nu\delta_j y.
$$

К другому представлению функции $U(x,\ y)$ придем, если во второе из разложений (8) подставим значение $g_k(x)$ и проделаем аналогичные выкладки.

Таким образом, для $U(x,\ y)$ получим два выражения, предпочитая одно другому в зависимости от быстроты сходимости рядов в исследуемой точке.

Задаваясь значениями функций $S_0(x)$, $S(x)$ и $\frac{1}{\lambda}w(x,\ y)$, а также отношением $\frac{d}{c}$ и величиной угла θ, из (15), (17) и (18) решением усеченных систем найдем оценки для $a_j^{(s)}$, $m_k^{(s)}$ и C_0 сверху и снизу, после чего способом, описанным в ([4]), из (20) получим значения $U(x,\ y)$ с избытком и недостатком. Заметим далее, что при $\alpha=0$ ряды, входящие в выражения для $m_k^{(s)}$ и $a_j^{(s)}$, исчезают, бесконечные системы (15) и (18) линейных уравнений вырождаются в равенства и решение совпадает с решением, получаемым классическим способом.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Զիգզագաձև մարմնում ջերմության հարթ կայունացած հոսանքի մասին

Հոդվածում դիտարկվում է զիգզագաձև ընդլայնական կտրվածք ունեցող պրիզմատիկ մարմնում ջերմության հարթ կայունացած հոսանքի խնդիրը։ Կոորդինատական սիստեմի ձևափոխման շնորհիվ խնդիրը բերվում է տրոհվող փոփոխականներով (5) հավասարման լուծմանը։ Լուծումը տրվում է ըստ եռանկյունային և ցուցչային ֆունկցիաների շարքերի միջոցով, որոնց անհայտ գործակիցները որոշվում են գծային հանրահաշվական հավասարումների լիովին ռեգուլյար անվերջ սիստեմներից։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. В. Лыков*, Теория теплопроводности, изд. „Высшая школа", М., 1967. [2] *Р. С. Минасян*, ДАН Арм. ССР, т. XXIII, № 4 (1956). [3] *Л. В. Канторович* и *В. И. Крылов*, Приближенные методы высшего анализа, М.—Л., Физматгиз, 1962. [4] *Р. С. Минасян*, „Известия АН Арм. ССР", серия физ.-мат. наук, т. XI, № 3 (1958).