ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LI 1970 1

УДК 539.37

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. Л. Абрамян

Кручение составного вытянутого эллипсоида вращения

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 3/III 1970)

Некоторые задачи о кручении тел вращения в эллипсоидальных координатах, когда скручивающая нагрузка задается в напряжениях, рассматривались в ряде работ ([1-3] и др.). Кручение вытянутого эллипсоида вращения, когда на части его поверхности отсутствуют перемещения, а на остальной части заданы напряжения, рассмотрено в работе ([4]).

Кручение гиперболоида вращения при смешанных граничных условиях рассмотрено в работе ([5]).

В настоящей работе рассматривается кручение вытянутого эллипсоида вращения, составленного из двух полуэллипсоидов из различных материалов, когда крутящая нагрузка приложена на поверхности эллипсоида напряжениями. Решение задачи представляется в виде суммы рядов Лежандра и Банерджи.

1. В вытянутых эллипсоидальных координатах α, β, φ решение задачи о кручении тел вращения сводится к определению ([4]) функции перемещения $\Psi(\alpha, \beta)$, которая в области осевого сечения эллипсоида удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\beta^2}+3\operatorname{cth}\alpha\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}+3\operatorname{ctg}\beta\frac{\partial\Psi}{\partial\beta}=0. \qquad (1.1)$$

Перемещение u_φ и напряжения $\tau_{\alpha\varphi}$ и $\tau_{\beta\varphi}$ выражаются через функцию $\Psi(\alpha, \beta)$ следующими формулами:

$$u_\varphi=c\operatorname{sh}\alpha\sin\beta\Psi(\alpha,\beta);$$

$$\tau_{\alpha\varphi}=G\frac{\operatorname{sh}\alpha\sin\beta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha-\cos^2\beta}}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}; \qquad (1.2)$$

$$\tau_{\beta\varphi}=G\frac{\operatorname{sh}\alpha\sin\beta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha-\cos\beta}}\frac{\partial\Psi}{\partial\beta},$$

где $2c$ — фокусное расстояние эллипсоида, а G — модуль сдвига.

Рассмотрим кручение вытянутого эллипсоида вращения, составленного из двух полуэллипсоидов из различных материалов. Полагаем, что крутящая нагрузка приложена на свободной поверхности эллипсоида напряжениями (рис. 1).

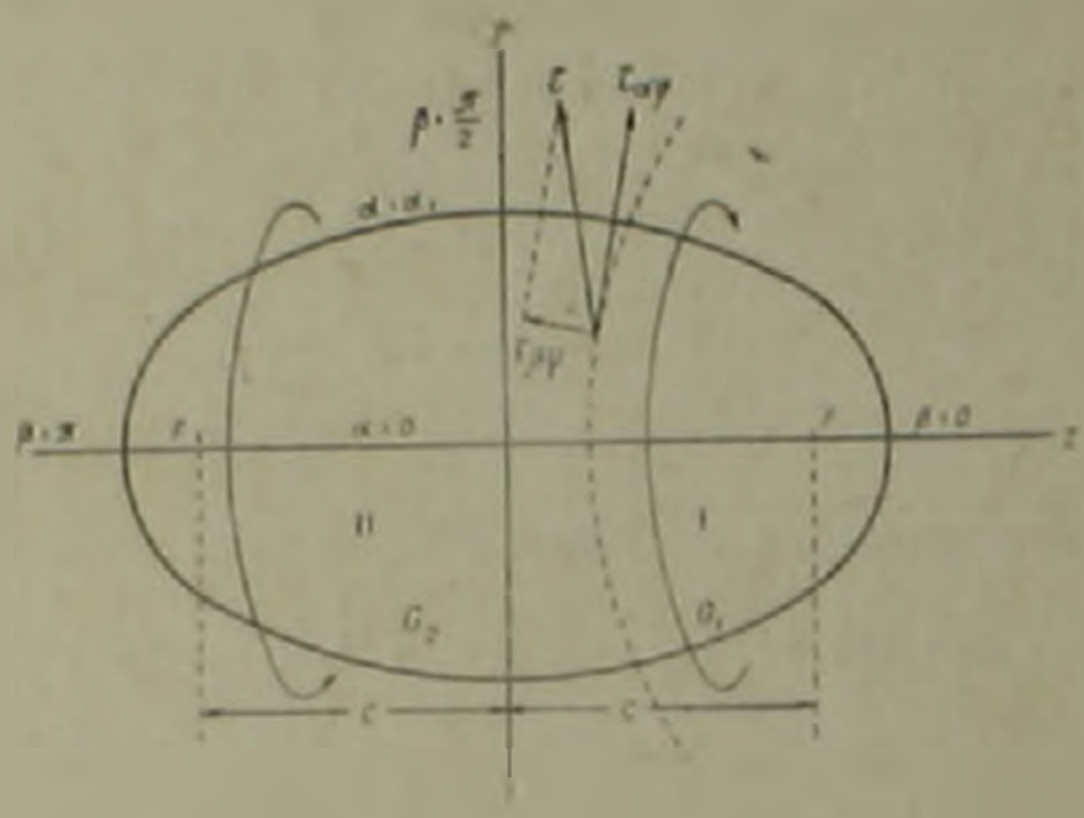

Рис. 1

Граничные условия задачи будут иметь вид:

$$\tau_{\alpha\beta}(\alpha_1,\ \beta) = f_1(\beta) \qquad \left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right);$$

$$\tau_{\alpha\beta}(\alpha_1,\ \beta) = f_2(\beta) \qquad \left(\frac{\pi}{2}<\beta<\pi\right). \tag{1.3}$$

Функцию перемещения $\Psi(\alpha,\ \beta)$ для этой задачи ищем в виде:

$$\Psi(\alpha,\ \beta) = \begin{cases} \Psi_1(\alpha,\ \beta) & \left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right) \\ \Psi_2(\alpha,\ \beta) & \left(\frac{\pi}{2}<\beta<\pi\right) \end{cases} \tag{1.4}$$

Тогда для определения функций $\Psi_l\ (l=1,2)$ будем иметь следующие условия:

$$G_1 \operatorname{sh}\alpha_1 \sin\beta \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\alpha_1} = \sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha_1 - \cos^2\beta}\, f_1(\beta) \qquad \left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right);$$

$$G_2 \operatorname{sh}\alpha_1 \sin\beta \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\alpha_1} = \sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha_1 - \cos^2\beta}\, f_2(\beta) \qquad \left(\frac{\pi}{2}<\beta<\pi\right); \tag{1.5}$$

$$G_1 \left.\frac{\partial \Psi_1}{\partial \beta}\right|_{\beta=\frac{\pi}{2}} = G_2 \left.\frac{\partial \Psi_2}{\partial \beta}\right|_{\beta=\frac{\pi}{2}};$$

$$\Psi_1\left(\alpha,\ \frac{\pi}{2}\right) = \Psi_2\left(\alpha,\ \frac{\pi}{2}\right). \tag{1.6}$$

Решения уравнения (1.1) для функций $\Psi_i (i = 1,2)$ берем в виде суммы рядов Лежандра и Банерджи

$$\Psi_i(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k-1}^{(i)} P_{2k-1}(\operatorname{ch}\alpha) P'_{2k-1}(\cos\beta) + \tag{1.7}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{(i)} P'_{-\frac{1}{2}+i\tau_k}(\operatorname{ch}\alpha)\, P'_{-\frac{1}{2}+i\tau_k}(\cos\beta) \qquad (i = 1.2),$$

где

$$P'_n(z) = \frac{d}{dz} P_n(z).$$

Заметим, что при $|\xi| \leqslant 1$ для функций Лежандра имеют место следующие соотношения:

$$P_{2k-1}(-\xi) = -P_{2k-1}(\xi);$$

$$P'_{2k-1}(-\xi) = P'_{2k-1}(\xi);$$

$$\int_0^1 (1-\xi^2) P'_{2m-1}(\xi) P'_{2n-1}(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_{-1}^{0} (1-\xi^2) P'_{2m-1}(\xi) P'_{2n-1}(\xi)\, d\xi = \begin{cases} \dfrac{2n(2n-1)}{4n-1} & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}; \tag{1.8}$$

$$P'_{2k-1}(0) = 0. \tag{1.9}$$

Заметим также, что возможность представления произвольной функции в ряд по коническим функциям $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)$ установлена в работе Д. Банерджи ([6]).

Представление произвольной функции в ряд по производным конической функции $\{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\}$ также возможно, что можно установить, следуя методу Банерджи.

Действительно, пусть имеет место разложение

$$F(\operatorname{ch}\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k P'_{-\frac{1}{2}+i\tau_k}(\operatorname{ch}\alpha) \operatorname{sh}^2\alpha \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant l) \tag{1.10}$$

и предположим, что оно справедливо на интервале $(0 \leqslant \alpha \leqslant l)$.

Воспользуемся интегральным представлением

$$\operatorname{sh}^2\alpha\, P'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha) = -\left(\tau^2 + \frac{1}{4}\right)\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\alpha} \sqrt{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch} u}\, \cos\tau u\, du, \tag{1.11}$$

которое на основании формулы

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\alpha}\frac{\cos\tau\psi\,d\psi}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}\psi}} \tag{1.12}$$

выведено в работе (⁴).

Произведя в правой части (1.11) интегрирование по частям, получим:

$$\operatorname{sh}^2\alpha\,P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)=-\frac{1+4\tau^2}{2\sqrt{2}\pi}\int_0^{\alpha}\frac{\sin\tau u\cdot\operatorname{sh}u\,du}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}u}}. \tag{1.13}$$

Подставляя (1.13) в (1.10), будем иметь

$$F(\operatorname{ch}\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\varphi(\operatorname{ch}u)\operatorname{sh}u\,du}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}u}} \tag{1.14}$$

или

$$F(t)=\int_1^{t}\frac{\varphi(z)\,dz}{\sqrt{t-z}}. \tag{1.15}$$

Для заданной функции $F(t)$ функция $\varphi(z)$ определится решением интегрального уравнения Абеля (1.15):

$$\varphi(z)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dz}\int_1^{z}\frac{F(t)dt}{\sqrt{z-t}}=\frac{1}{\pi}\int_1^{z}\frac{F'(t)dt}{\sqrt{z-t}}, \tag{1.16}$$

где использовано значение $F(1)=0$.

В уравнении (1.14) было введено обозначение

$$\varphi(\operatorname{ch}u)=-\frac{3}{2\sqrt{2}\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{\tau_k}(1+4\tau_k^2)}{\tau_k}\sin\tau_k u\quad(0<u<l). \tag{1.17}$$

которое представляется как разложение функции $\varphi(\operatorname{ch}u)$ в ряд Фурье

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}a_{\tau_k}\frac{(1+4\tau_k^2)}{\tau_k}=\frac{2}{l}\int_0^{l}\varphi(\operatorname{ch}u)\sin\tau_k u\,du. \tag{1.18}$$

Если разложение (1.17) сходится и интегральное уравнение (1.14) имеет непрерывное и единственное решение, тогда разложение (1.10) также будет сходиться.

2. Произведя суммирование в рядах Банерджи, входящих в (1.7), по корням (⁸) уравнения

$$P'_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha_1)=0 \tag{2.1}$$

и удовлетворив условиям (1.5), получим:

$$A^{(i)}_{2k-1}P'_{2k-1}(\operatorname{ch}\alpha_1)\operatorname{sh}^2\alpha_1=\frac{4k-1}{2k(2k-1)}\frac{a^{(i)}_k}{G_i}\quad(i=1,\ 2). \tag{2.2}$$

При этом использованы соотношения (1.8) и следующие обозначения:

$$a^{(1)}_k=\int_0^1(1-\xi^2)^{1/4}P'_{2k-1}(\xi)\,f_1^*(\xi)\,d\xi;$$

$$a^{(2)}_k=\int_0^1(1-\xi^2)^{1/4}P'_{2k-1}(\xi)\,f_2^*(\xi)\,d\xi; \tag{2.3}$$

$$f_i^*(\xi)=f_i(\arccos\xi)\sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha_1-\xi^2}\quad(i=1,2). \tag{2.4}$$

Удовлетворив первому из условий (1.6), получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty}[G_1B^{(1)}_k-G_2B^{(2)}_k]P'_{-\frac{1}{2}+i\tau_k}(0)P'_{-\frac{1}{2}+i\tau_k}(\operatorname{ch}\alpha)=0\quad(0<\alpha<\alpha_1), \tag{2.5}$$

откуда следует

$$G_1B^{(1)}_k=G_2B^{(2)}_k. \tag{2.6}$$

Удовлетворив второму из условий (1.6), будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty}(A^{(1)}_{2k-1}-A^{(2)}_{2k-1})P'_{2k-1}(0)P'_{2k-1}(\operatorname{ch}\alpha)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(B^{(2)}_k-B^{(1)}_k)P'_{-\frac{1}{2}+i\tau_k}(0)P'_{-\frac{1}{2}+i\tau_k}(\operatorname{ch}\alpha)\quad(0<\alpha<\alpha_1). \tag{2.7}$$

Пользуясь значением следующего интеграла

$$\int_0^{\alpha_1}\operatorname{sh}^3\alpha\,P'_{-\frac{1}{2}+i\tau_k}(\operatorname{ch}\alpha)P'_{-\frac{1}{2}+i\tau_p}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\alpha=\begin{cases}0 & k\neq p\\ \Omega_{\tau_k} & p=k\end{cases}, \tag{2.8}$$

где

$$\Omega_{\tau_k}=\frac{1+4\tau_k^2}{4\pi\tau_k}P'_{-\frac{1}{2}+i\tau_k}(\operatorname{ch}\alpha_1)\left[\operatorname{sh}^2\alpha_1\int_0^{\alpha_1}\frac{u\sin\tau_k u\,du}{\sqrt{2\operatorname{ch}\alpha_1-2\operatorname{ch}u}}-\right.$$

$$\left.-2\operatorname{ch}\alpha_1\int_0^{\alpha_1}u\sin\tau_k u\sqrt{2\operatorname{ch}\alpha_1-2\operatorname{ch}u}\,du\right] \tag{2.9}$$

и τ_k суть корни уравнения (2.1), из (2.7) получим:

$$\Omega_{\tau_p}(B_p^{(2)} - B_p^{(1)})P'_{-\frac{1}{2}+i\tau_p}(0) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (A_{2k-1}^{(1)} - A_{2k-1}^{(2)})P'_{2k-1}(0) \int_0^{\alpha_1} \operatorname{sh}^3\alpha P'_{2k-1}(\operatorname{ch}\alpha)P'_{-\frac{1}{2}+i\tau_p}(\operatorname{ch}\alpha)\, d\alpha. \quad (2.10)$$

Так как функции $P'_{2k-1}(t) = \varphi_{2k-1}(t)$ и $P'_{-\frac{1}{2}+i\tau_p}(t) = y_{\tau_p}(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$(t^2-1)y''_{\tau_p}(t) + 4ty'_{\tau_p}(t) + \left(\tau_p^2 + \frac{9}{4}\right)y_{\tau_p}(t) = 0;$$

$$(t^2-1)\varphi''_{2k-1}(t) + 4t\varphi'_{2k-1}(t) - (4k^2-2k-2)\varphi_{2k-1}(t) = 0, \quad (2.11)$$

то, умножив первое из них на $(t^2-1)\varphi_{2k-1}(t)$, а второе на $(t^2-1)y_{\tau_p}(t)$ и вычтя из первого произведения второе, после интегрирования разности в пределах от единицы до $t_1 = \operatorname{ch}\alpha_1$, получим

$$\int_1^{t_1} (t^2-1)P'_{2k-1}(t)P'_{-\frac{1}{2}+i\tau_p}(t)\, dt =$$

$$= \frac{(t_1^2-1)P'_{2k-1}(t_1)P'_{-\frac{1}{2}+i\tau_p}(t_1)}{\tau_p^2 + \left(2k-\frac{1}{2}\right)^2}. \quad (2.12)$$

Подставляя это значение в (2.10) и пользуясь соотношениями (2.2) и (2.6), получим:

$$B_p^{(2)} = \frac{P'_{-\frac{1}{2}+i\tau_p}(\operatorname{ch}\alpha_1)}{G_2(G_1-G_2)P_{-\frac{1}{2}+i\tau_p}(0)\Omega_{\tau_p}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P'_{2k-1}(0)(4k-1)(G_2a_k^{(1)} - G_1a_k^{(2)})}{2k(2k-1)\left[\tau_p^2 + \left(2k-\frac{1}{2}\right)^2\right]}. \quad (2.13)$$

Пользуясь определенными выражениями функций $\Psi_i(\alpha, \beta)$ $(i = 1, 2)$ и формулами (1.2), можно определить упругие перемещения и напряжения в любой точке составного эллипсоида.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Բ. Լ. ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ

Բաղադրյալ ձգված պտտման էլիպսոիդի ոլորումը

Հոդվածում դիտարկվում է ձգված պտտման էլիպսոիդի ոլորման խնդիրը։ Էլիպսոիդը կազմված է տարբեր նյութերից երկու կիսաէլիպսոիդների միացումով։ Ոլորումն իրագործվում է էլիպսոիդի մակերևույթի վրա կիրառված լարումներով։

Խնդրի լուծումը ներկայացվել է Լեժանդրի և Բաներջիի շարքերի գումարի տեսքով։

Կամայական ֆունկցիան ըստ սեռերի սեռի կոնական ֆունկցիաների շարքով ներկայացնելու հարցը ուսումնասիրվել է Բաներջիի աշխատանքում [6]։ Այդպիսի շարքերը հոդվածում անվանվել են Բաներջիի շարքեր։

Հոդվածի առաջին մասում ցույց է տրվել, որ կամայական ֆունկցիան հնարավոր է ներկայացնել նաև ըստ սեռերի սեռի կոնական ֆունկցիաների ածանցյալների շարքով։

Բաներջիի շարքերում օգտագործվող արժատների հատուկ բնութագրմամբ դիտարկված խնդրի համար ստացվել է փակ լուծում։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *E. Melan*, Technische Blatter, Prag, Nos. 48, 49/50, 1920, 417—419, 427—429 [2] *Th. Pöschl*, ZAMM, Bd. 2, Heft 2, 1922, 137—147. [3] *А. Ш. Локшин*. Изв. Екатеринвосл. инст., XI, № 1, 100—101, (1923) [4] *Б. Л. Абрамян, Н. Х. Арутюнян, А. А. Баблоян*, Изв. АН Арм ССР, Механика, т. 19, № 1, 3—12 (1966). [5] *М. А. Александрян, А. А. Баблоян*, Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. 20. № 6 (1967). [6] *D. P. Banerjee*, Proc. Cambr. Philos. Soc. vol. 34, p. 1, 30—32 (1938). [7] *М. Н. Журина, Л. Н. Карманина*. Таблицы функций, Лежандра $P^{(x)}_{-\frac{1}{2}+i\tau}$ М., Выч. Ц. АН СССР, 1963. [8] *Einar Hille*, Arkiv för matematik, astronomi och fysik, Bd. 13, № 17,1—76(1918). Arkiv för matematik, astronomi och fysik, Bd. 17, № 22, 1—16 (1923).