ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
L 1970 5

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

В. М. Едигарян

Теорема единственности относительно моментов производных бесконечно дифференцируемых функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 7/II 1970)

Известно, что в теории квазианалитичности и обобщенной квазианалитичности решаются задачи единственности следующего типа: каким условиям должны удовлетворять последовательности $\{n_k\}$ и $\{m_n\}$, чтобы из соотношений

$$f^{(n_k)}(0)=0,$$

$$\|f^{(n)}(x)\|_{L^p}\leqslant m_n,\quad p=2,\ \infty \tag{A}$$

следовало $f(z)\equiv 0$ в классе бесконечно дифференцируемых функций [1].

С другой стороны известна проблема Шилов-Гельфанда, где также ставится аналогичная задача единственности для функций $f(x)\in C^\infty(-\infty,+\infty)$, когда удовлетворяются условия [2]:

$$|f^{p}(x)\,x^{q}|\leqslant M_{p,q},\quad p>0,\quad q>0 \tag{B}$$

и другая разновидность этой задачи, когда $f(x)\in C^\infty(0,+\infty)$ и выполняется какое-либо из условий:

$$\int\limits_0^\infty |f^{(n)}(t)|\,t^{n+\varkappa}\,dt\leqslant M_{n,\varkappa},\quad \varkappa>0$$

(см. [3]). (C)

$$|f^{(n)}(t)|\,t^{n+\varkappa}<M_{n,\varkappa},\quad t\in(0,+\infty)$$

В настоящей статье поставлена задача, которая в некотором смысле связывает эти задачи.

Теорема. *Пусть $f(x)$ бесконечно дифференцируема на* $(0,+\infty)$ *и удовлетворяет условиям*

$$\int\limits_0^\infty t^{k}f^{(k)}(t)\,dt=0\quad (k=0,\ 1,\ 2,\cdots) \tag{1}$$

$$\int_0^\infty t^{\lambda_k} |f^{(k)}(t)|\, dt < M_k \quad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{2}$$

Тогда $f(x) \equiv 0$, *если*

$$\lambda_k = k - \gamma_k^{\delta} > 0, \quad \lim_{y \to \infty} |y| \int_0^\infty \frac{N_k^+(t) - N_k^-(t)}{t\,(y^2 + t^2)}\, dt > \frac{\pi}{2} \tag{3}$$

$$\int^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2}\, dr = +\infty \tag{4}$$

где

$$0 = \gamma_0 < 1 < \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \cdots, \sum \frac{1}{\gamma_\nu} = +\infty, \sum \frac{1}{\gamma_\nu^2} < +\infty,$$

$$T(r) = \sup_n \frac{r^{\gamma_n}}{m_n}, \quad m_n = C_n M_n, \quad C_n = B_n C_n'$$

$$\beta_{n-1} = \exp\left[\sum_0^{n-1}\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\gamma_\nu}\right) - \frac{1}{\gamma_n}\right] \quad B_n = \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \beta_{n-1}^{\gamma_n - 1} \prod\limits_{\nu=n}^{\infty}\left(\frac{\nu - \gamma_n}{\nu}\right) e^{\frac{\gamma_n}{\gamma_\nu}}}{(n-1)! \prod\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\left(\frac{\gamma_\nu - \gamma_n}{\gamma_\nu}\right) e^{\frac{\gamma_n}{\gamma_\nu}}}$$

а $N_k^+(t)$ *и* $N_k^-(t)$ — *соответственно числовые функции последовательностей*

$$N_k^+(t): \ \gamma_{k+1} - \gamma_k - \delta, \ \gamma_{k+2} - \gamma_k - \delta, \cdots,$$

$$N_k^-(t): \ k + 1 - \gamma_k - \delta, \ k + 2 - \gamma_k - \delta, \cdots.$$

Доказательство. Составим функцию

$$F(z) = \int_0^\infty \omega\left(\frac{z}{t}, \gamma\right) f(t)\, dt,$$

где

$$\omega\left(\frac{z}{t}, \gamma\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1 + \frac{\zeta}{\nu}\right) e^{-\frac{\zeta}{\nu}}}{\zeta \prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1 + \frac{\zeta}{\gamma_\nu}\right) e^{-\frac{\zeta}{\gamma_\nu}}} \left(\frac{z}{t}\right)^{-\zeta} d\zeta,$$

которая, согласно условию (3) и результату работы ([4]), стр. 511, наверняка бесконечно дифференцируема.

Интегрируя по частям k-раз, получим

$$F(z) = (-1)^k \int_0^\infty \omega^{(-k)}\left(\frac{z}{t}, \gamma\right) f^{(k)}(t)\, dt. \tag{5}$$

где

$$\omega^{(-k)}\left(\frac{z}{t}, \gamma\right) = \frac{t^k}{(k-1)!\,2\pi i}\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{\prod\limits_{\nu=k}^{\infty}\left(1+\frac{\zeta}{\nu}\right)e^{-\frac{\zeta}{\nu}}\,e^{-\zeta\sum\limits_{\nu=1}^{k-1}\frac{1}{\nu}}\left(\frac{z}{t}\right)^{-\zeta}}{\zeta\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{\zeta}{\gamma_\nu}\right)e^{-\frac{\zeta}{\gamma_\nu}}}\,d\zeta,$$

так как проинтегрированные части согласно (2) и

$$\lim_{t\to 0}\omega^{(-k)}\left(\frac{z}{t}, \gamma\right) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

равны нулю.

Дифференцируя (5) в смысле Г. В Бадаляна k-раз имеем

$$(-1)^k F_k(z) = \frac{(-1)^k}{z^{\gamma_{k-1}-1}} \times \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{k-1}\gamma_\nu}{(k-1)!}\int\limits_0^{\infty}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{e^{-\zeta\left[\sum\limits_{\nu=1}^{k-1}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\gamma_\nu}\right)\right]}\prod\limits_{\nu=k}^{\infty}\left(1+\frac{\zeta}{\nu}\right)e^{-\frac{\zeta}{\nu}}\left(\frac{z}{t}\right)^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=k}^{\infty}\left(1+\frac{\zeta}{\gamma_\nu}\right)e^{-\frac{\zeta}{\gamma_\nu}}}\right)t^k f^{(k)}(t)\,dt,$$

откуда замена переменной $\zeta = \xi - \gamma_k$ нам даст

$$\frac{F_k(z)}{z^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1}} = \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{k}\gamma_\nu}{(k-1)!\,e}\cdot\frac{e^{\gamma_k\sum\limits_{\nu=1}^{k-1}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\gamma_\nu}\right)}\prod\limits_{\nu=k}^{\infty}\left(\frac{\nu-\gamma_k}{\nu}\right)e^{\frac{\gamma_k}{\gamma_\nu}}}{\prod\limits_{\nu=k+1}^{\infty}\left(\frac{\gamma_\nu-\gamma_k}{\gamma_\nu}\right)e^{\frac{\gamma_k}{\gamma_\nu}}}\times$$

$$\times\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\left(\frac{z}{t}\right)^{-\xi}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{e^{-\xi\left[\sum\limits_{\nu=1}^{k-1}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\gamma_\nu}\right)-\frac{1}{\gamma_k}\right]}\prod\limits_{\nu=k}^{\infty}\left(1+\frac{\xi}{\nu-\gamma_k}\right)e^{-\frac{\xi}{\nu}}\,d\xi}{\xi\prod\limits_{\nu=k+1}^{\infty}\left(1+\frac{\xi}{\gamma_\nu-\gamma_k}\right)e^{-\frac{\xi}{\gamma_\nu}}}\right)t^{k-\gamma_k}f^{(k)}(t)\,dt$$

или

$$\frac{F_k(z)}{z^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1}} = \int\limits_0^{\infty}A_k(zt)\,t^{k-\gamma_k}f^{(k)}(t)\,dt. \qquad (6)$$

где

$$A_k(zt) = B_k \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} \frac{\left(\frac{z}{t\beta_{k-1}}\right)^{-\zeta} \prod_{\nu=k}^{\infty}\left(1 + \frac{\zeta}{\nu - \gamma_k}\right) e^{-\frac{\zeta}{\nu}}}{\zeta \prod_{k+1}^{\infty}\left(1 + \frac{\zeta}{\gamma_\nu - \gamma_k}\right) e^{-\frac{\zeta}{\gamma_\nu}}}\, d\zeta,$$

$$\beta_{k-1} = \exp\left|\sum_{\nu=1}^{k-1}\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\gamma_\nu}\right) - \frac{1}{\gamma_k}\right|.$$

$$B_k = \frac{\prod_{\nu=1}^{k}\gamma_\nu}{(k-1)!e} \cdot \frac{e^{\gamma_k \sum_{\nu=1}^{k-1}\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\gamma_\nu}\right)} \prod_{\nu=k}^{\infty}\left(\frac{\nu - \gamma_k}{\nu}\right) e^{\frac{\gamma_k}{\nu}}}{\prod_{\nu=k+1}^{\infty}\left(\frac{\gamma_\nu - \gamma_k}{\gamma_\nu}\right) e^{\frac{\gamma_k}{\gamma_\nu}}}$$

Из условий (1) и ([illegible]) следует, что

$$\lim_{z \to 0} \frac{F_k(z)}{z^{\gamma_k - \gamma_{k-1} - 1}} = 0.$$

Так как

$$\lim_{z \to 0} A_k(zt) = B_k.$$

Оценим теперь $\left|\frac{F_k(z)}{z^{\gamma_k - \gamma_{k-1} - 1}}\right|$. Имеем:

$$\left|\frac{F_k(z)}{z^{\gamma_k - \gamma_{k-1} - 1}}\right| \leqslant \int_0^{\infty} |A_k(zt)|\, t^{k - \gamma_k} |f^{(k)}(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t \in (0,\infty)} |A_k(zt)| \int_0^{\infty} t^{k-\gamma_k} |f^{(k)}(t)|\, dt \leqslant M_k \sup_{t \in (0,\infty)} |A_k(zt)|. \tag{7}$$

Так как при $0 < t < 1$ взяв $\delta > 0$ в (2) будем иметь:

$$|A_k(zt)| = \left| B_k \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} \frac{\left(\frac{z}{t\beta_{k-1}}\right)^{-\zeta} \prod_{\nu=k}^{\infty}\left(1 + \frac{\zeta}{\nu - \gamma_k}\right) e^{-\frac{\zeta}{\nu}}\, d\zeta}{\zeta \prod_{\nu=k+1}^{\infty}\left(1 + \frac{\zeta}{\gamma_\nu - \gamma_k}\right) e^{-\frac{\zeta}{\gamma_\nu}}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| B_k C_k' \frac{|t|^{\delta}}{|z|^{\delta}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|z^{-iy}| \prod_{\nu=k}^{\infty}\left[1 + \frac{y^2}{(\nu - \gamma_k - \delta)^2}\right]^{1/2}}{(\delta^2 + y^2)^{1/2} \sum_{\nu=k+1}^{\infty}\left[1 + \frac{y^2}{(\gamma_\nu - \gamma_k - \delta)^2}\right]^{1/2}} |dy| \right| <$$

$$< \frac{B_k C_k''}{|z|^{\delta}},$$

где

$$C_k' = \frac{\exp\left[\delta\sum_{\nu=1}^{k-1}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\gamma_\nu}\right)\right]\prod_{\nu=k}^{\infty}\left(\frac{\nu-\gamma_k-\delta}{\nu-\gamma_k}\right)e^{\frac{\delta}{\nu-\gamma_k}}}{\prod_{\nu=k+1}^{\infty}\left(\frac{\gamma_\nu-\gamma_k-\delta}{\gamma_\nu-\gamma_k}\right)e^{\frac{\delta}{\gamma_\nu-\gamma_k}}},$$

а при $t > 1$ взяв $\delta < 0$, имеем также

$$|A_k(zt)| \leqslant \frac{B_k C_k'}{|z|^\delta}. \tag{8}$$

Следовательно из соотношений (6), (7) и (8) будем иметь

$$\left|\frac{F_k(z)}{z^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1}}\right| \leqslant \frac{M_k B_k C_k'}{|z|^\delta}. \tag{9}$$

Составим теперь функцию

$$\Phi(t) = \int_0^\infty \omega_1(zt, \gamma) F(z)\, dz,$$

где

$$\omega_1(zt, \gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{(zt)^{-\zeta}\, d\zeta}{\zeta\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{\zeta}{\gamma_\nu}\right)e^{-\frac{\zeta}{\gamma_\nu}}},$$

которая в силу условия (2) аналитична в $\operatorname{Re} z > 0$.

После k-кратного обобщенного интегрирования по частям получим:

$$\Phi(t) = (-1)^k \int_0^\infty \frac{\omega_1^{[-k]}(zt) F_k(z)}{z^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1}}\, dz,$$

где

$$\omega_1^{[-k]}(zt) = \frac{z^{\gamma_k}}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{(zt)^{-\zeta}\, d\zeta}{\zeta(\zeta-1)\prod_{\nu=1}^{k-1}(\zeta-\gamma_\nu)\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{\zeta}{\gamma_\nu}\right)e^{-\frac{\zeta}{\gamma_\nu}}}.$$

Следовательно

$$|\Phi(t)| \leqslant M_k B_k C_k' \left|\int_0^\infty \frac{z^{\gamma_k+\delta}}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{(zt)^{-\zeta}\, d\zeta}{\zeta(\zeta-1)\prod_{\nu=1}^{k-1}(\zeta-\gamma_\nu)\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{\zeta}{\gamma_\nu}\right)e^{-\frac{\zeta}{\gamma_\nu}}}\, dz\right|.$$

Замена переменной $\zeta = \zeta' + \gamma_k + \delta$ нам даст:

$$|\Phi(t)| \leqslant \frac{M_k B_k C_k}{|t|^{\gamma_k+\delta}} \left| \int_0^\infty \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{(zt)^{-\zeta}}{(\zeta+\gamma_k+\delta)(\zeta+\gamma_k+\delta-1)\prod\limits_{\nu=1}^{k-1}(\zeta+\gamma_k+\delta-\gamma_\nu)} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{d\zeta}{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{\zeta+\gamma_k+\delta}{\gamma_\nu}\right) e^{-\frac{\zeta+\gamma_k+\delta}{\gamma_\nu}}} dz \right|.$$

Оценивая подинтегральную функцию, как и выше, и принимая во внимание условие (2), окончательно получим:

$$|\Phi(t)| \leqslant \frac{M_k B_k C_k}{|t|^{\gamma_k+\delta}}, \quad C_k = C_k' \frac{1}{\prod\limits_{\nu=1}^{k-1}(\gamma_k+\delta-\gamma_\nu)\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\gamma_\nu+\gamma_k+\delta}{\gamma_\nu}\right) e^{-\frac{\gamma_k+\delta}{\gamma_\nu}}}.$$

Из условия (3) следует, что $\Phi(t) \equiv 0$, следовательно $F(z) \equiv 0$, окончательно $f(z) \equiv 0$.

В заключение приношу благодарность Г. В. Бадаляну за постановку задачи и советы при выполнении.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Վ. Մ. ԽՆԴԳԱՐՅԱՆ

Միակության թեորեմ անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիաների ածանցյալների մոմենտների նկատմամբ

Այս աշխատանքում դրված և լուծված է (գտնված է միայն բավարար պայման) ընդհանրացված քվազիանալիտիկության մի խնդիր, որն իր դրվածքով ընկած է Շիլով-Գելֆանդի հայտնի պրոբլեմի և ընդհանրացված քվազիանալիտիկության խնդրի միջև:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Мандельбройт*, Примыкающие ряды Регуляризация последовательностей. Применения. [2] *Гелфанд-Шилов*, Пространства основных и обобщенных функций. (Обобщенные ф-ии. вып. 2 М., 1958. [3] *Г. В. Бадалян*, «Об одной теореме единственности и ее следствиях» Армянский гос. пед. ин-т им. Х. Абовяна, сборник научных трудов. серия физмат вып. III изд-во «Луйс» Ереван 1966 г. стр. 7—19. [4] *Г. В. Бадалян*, Известия АН СССР. сер мат т. 31, 1967 г. стр. 191—530